**Высшая геодезия 2. УКЛОНЕНИЕ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ**

**2.1 Основные понятия и определения**

**Уклонение отвесной линии**—это в первом приближении угол между направлением нормали к поверхности эллипсоида и направлением отвесной линии в исследуемой точке. В каждой точке земной поверхности отвес устанавливается по направлению ON, совпадающему с направлением силы тяжести (рис.2.1).

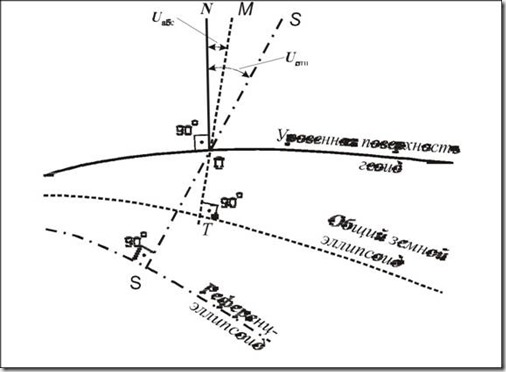
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/clip_image002-49.jpg)

Рисунок 2.1

Это направление всегда перпендикулярно уровенной поверхности в данной точке О.

Общий земной эллипсоид не может быть всюду параллельным уровенной поверхности. Поэтому нормаль mOM к общему земному эллипсоиду не совпадает с отвесной линией ON. Угол *uабс* . между отвесной линией и нормалью к общему земному эллипсоиду называется абсолютным уклонением отвесной линии.

Однако обработка геодезических измерений производится не на общем земном эллипсоиде, а на референц-эллипсоиде, который не совпадает с поверхностью земного эллипсоида. Угол *uотн* .-между отвесной линией и нормалью SOS к поверхности референц-эллипсоида называется относительным или астрономо-геодезическим уклонением отвесной линии.

Уклонения отвесных линий в разных точках земной поверхности не одинаковы и зависят от многих причин.

Так, абсолютные уклонения отвесных линий можно разделить на:

• —общие, соответствующие общим волнам квазигеоида; эти уклонения не превышают 8″ и вызваны причинами, складывающимися во всех точках земного шара (наличием океанических впадин и континентальных возвышенностей); для них характерно медленное изменение и однообразный характер на значительных площадях.

• —местные, соответствующие местным отступлениям квазигеоида от эллипсоида и вызванные чаще всего наличием отдельных горных хребтов и глубоких впадин; местные уклонения отвесных линий захватывают незначительные территории и, быстро изменяясь, могут существенно отличаться

друг от друга в сравнительно близких точках.

На Кавказе по меридиану г.Владикавказ уклонения отвесных на расстоянии 50 км имеют диапазон (+ 35)″ — (-18) ″, а на Гавайях амплитуда местной аномалии уклонений отвесных линий на расстоянии 120 км достигает 97,6″. В районе озера Байкал разности уклонений отвесных линий отдельных пунктов, расположенных на разных берегах озера (60 км) достигают 40″. Приведенные примеры связаны с резким изменением формы рельефа.

Но наблюдаются значительные изменения уклонений отвесных линий и при совершенно равном и спокойном рельефе. Примером местных аномалий отвесных линий может служить так называемая «местная Московская аттракция», обусловленная местным неравномерным распределением масс в земной коре. Московская аттракция проявляет себя изменениями уклонений отвесных линий на 15,6″ на расстоянии 25 км по меридиану колокольни Ивана Великого Московского Кремля. Подобные большие уклонений отвесных линий происходят в результате изменений в плотностях пород, расположенных ниже поверхности земли.

Референц-эллипсоид Красовского так определен, что уклонения отвесных линий на нашей территории в среднем составляют 3-4″, исключая, конечно, местные аномалии (районы Москвы, Кавказа, Байкала и др.). Уклонения отвесных линий необходимо знать для:

• изучения фигуры квазигеоида;

• установления референц-эллипсоида;

• решения редукционных задач при обработке геодезических измерений (перенос на поверхность референц-эллипсоида).

Через уклонения отвесных линий устанавливается простая связь между астрономическими (ϕ,λ) и геодезическими *(B,L)* координатами:

***B*= ϕ + ∆ϕ,**

***L*= λ + ∆λ,**

где ∆ϕ, ∆λ — весьма простые функции уклонения отвесных линий.

Уклонения отвесных линий определяются 2 параметрами:

1) величиной угла, обозначаемого обычно *u* и называемого полным уклонением отвесной линии;

2) азимутом плоскости в которой расположен этот угол, обозначаемый Θ.

Однако чаще уклонения отвесной линии определяются двумя другими величинами — проекциями полного уклонения отвесной линии на плоскости меридиана и первого вертикала данной точки:

1) проекция на плоскость меридиана называемая слагающей уклонения в меридиане — ξ (кси);

2) проекция на плоскость первого вертикала называемая слагающей уклонения в первом вертикале — η(эта).

При выполнении геодезических работ влияние уклонений отвесных линий в геометрическом смысле может рассматриваться как влияние некоторых ошибок систематического характера, подлежащих соответствующему анализу и учету.

Можно дать и несколько иное определение отвесной линии.

Так как направление отвесной линии совпадает с действительным направлением вектора силы тяжести *g*, а направление нормали к эллипсоиду может определяться нормалью к поверхности уровенного эллипсоида, то уклонение отвесной линии можно определить как угол между направлениями векторов действительного и нормального полей силы тяжести.

Величины уклонений отвесных линий могут быть определены астрономо-геодезическим, гравиметрическим и астрономо-гравиметрическим методом.

Для решения редукционных задач необходимо знать уклонения отвесных линий на каждом пункте триангуляции 1 класса, а в горных районах и на пунктах 2 класса.

**2.2. Астрономо-геодезический метод определения уклонений отвеса**

Рассмотрим некоторую точку *D* (пункт триангуляции) на земной поверхности. Будем первоначально считать, что она располагается и на поверхности референц-эллипсоида, т.е. земная поверхность и поверхность референц-эллипсоида пересекаются.

Для пункта триангуляции *D* вычислены геодезические координаты *B,L* и геодезический азимут *AM* на какой-либо предмет *M.*

На этом же пункте произведены астрономические определения, в результате которых получены астрономические координаты ϕ,λ и астрономический азимут *aM* на тот предмет *M*.

Построим с центром в точке *D* сферу *KZ*1*K*1 единичного радиуса (рис.2.2).

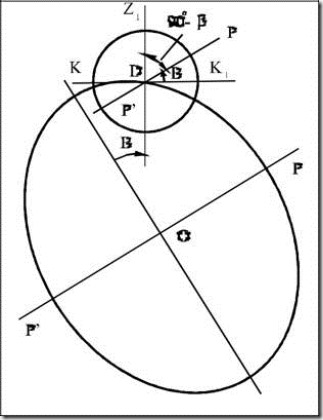
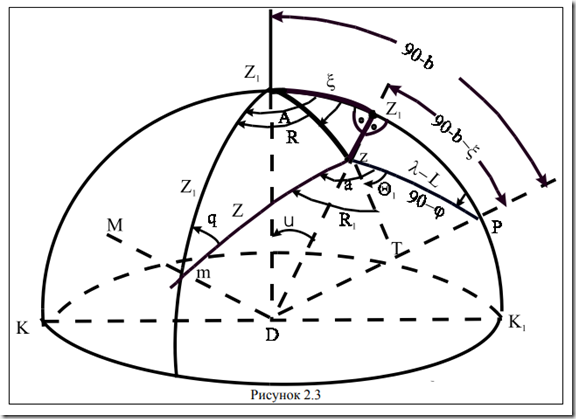
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/clip_image002-50.jpg)

Рис. 2.2

Нормаль к эллипсоиду (перпендикуляр к касательной *KK*1) продолжим до пересечения со вспомогательной сферой. Нормаль пересечет сферу в точке *Z*1, которая называется геодезическим зенитом в точке *D*.

Изобразим отдельно верхнюю полусферу *KZ*1*K*1 (рис.2.3).

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-522.png)

Аналогично продолжим направление отвесной линии до пересечения со сферой в точке *Z*. Это будет астрономический зенит точки *D*.

Из точки *D* проведем прямую параллельную оси Мира (оси вращения Земли), она пересечет сферу в точке *Р*.

Точка *m* является пересечением визирной оси теодолита со вспомогательной сферой при наведении трубы на предмет *M*.

Точки *Z* и *Z*1 соединим с точками *m* и *Р* дугами большого круга.

Тогда, вводя обозначения, будем иметь:

∪*mZ=Z*—измеренное зенитное расстояние(астрономическое,так как осьвращения теодолита с помощью уровня устанавливается по направлению силы тяжести);

∪*mZ*1*=Z*1— «геодезическое»зенитное расстояние,т.е.такое зенитное рас-стояние, которое получилось бы, если бы вертикальная ось теодолита была бы направлена по нормали к поверхности референц-эллипсоида;

*DZ*1*m*—плоскость прямого нормального сечения в точке*D*,проходящаячерез *М*;

∪*Z*1*P*=90°*-В* — дуга, измеряющая угол между полюсом и зенитом, поэтому выражение 90°*-В* соответствует геодезической широте точки *D*;

∪*ZP*=90°*—*ϕ — дуга связанная с направлением отвесной линии, поэтому выражение 90°*—*ϕ соответствует астрономической широте точки *D*;

*DZ*1*Р*—плоскость геодезического меридиана точки*D*;*DZР*—плоскость астрономического меридиана точки*D*;

∠*Z*1*РZ=*∆*l* — угол между геодезическими и астрономическими меридиана-ми точки *D*; т.к. астрономические и геодезические долготы отсчитываются от одного начального меридиана, то ∆*l=*λ*-L*;

— полное уклонение отвесной линии в точке *D* (дуга, соответствующая углу между направлением нормали к поверхности эллипсоида и на-правлением отвесной линии);

∠*РZ*1*Z=*Θ — геодезический азимут плоскости в которой находится полное уклонение отвесной линии;

∠*РZT=*Θ1 — астрономический азимут той же плоскости.

Проведем из *Z* дугу *ZZ*′ перпендикулярно к геодезическому меридиану, т.е. соответствующую сечению первого вертикала на эллипсоиде. Тогда:

∪*Z*1*Z*′*=*ξ — слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в меридиане;

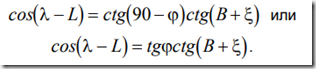
∪*ZZ*′*=*η — слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в первом вертикале.

Очевидно, что уклонение отвесной линии определяется двумя величина-ми, в качестве которых могут быть взяты:

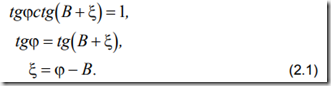
1) *u* и Θ или

2) ξ и η.

В прямоугольном треугольнике *ZZ*′*Р* возьмем 3 рядом лежащих элемента, заменим катет дополнением до 90° и по правилу Непера запишем:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-523.png)

Так как λ − *L* мало (несколько секунд), то принимаем, что *cos*(λ − *L*) = 1. Тогда

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-524.png)

Из этого же треугольника возьмем три элемента (два рядом, один отдельно: ( 90 − ϕ ) *,* ( λ − *L*)*,*η) и применим правило Непера:

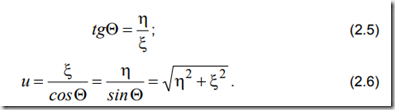
[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-525.png)

Так как величины η и ( λ − *L*) малы, то заменив синусы углов углами окончательно получим

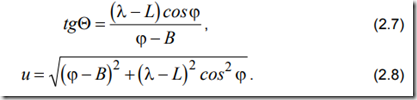
[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-526.png)

Для вычисления *u* и Θ возьмем сферический треугольник *Z*1*Z*′*Z.* Это прямоугольный треугольник с малыми сторонами. Поэтому его можно рассматривать как плоский и записать зависимости:

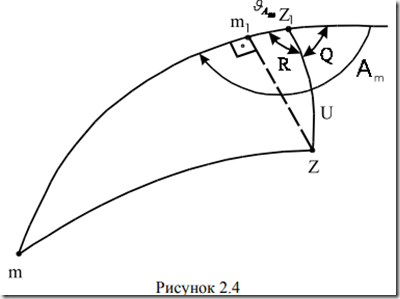
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-527.png)

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-528.png)

Подставляя ранее полученные выражения для ξ и η имеем

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-529.png)

Найдем проекцию ϑ*Am*=*m*1*Z*1 полного уклонения на вертикальную плоскость, имеющую азимут *Am*. Изобразим отдельно треугольник *mZ*1*Z* (рис.2.4).

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-530.png)

Из данного прямоугольного треугольника имеем:

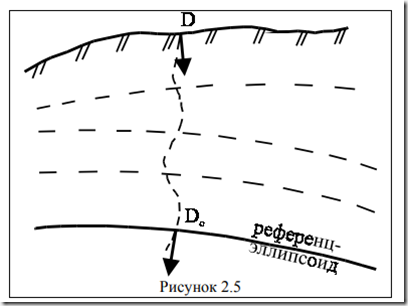
[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-531.png)

Принимая во внимание выражения (2.3) и (2.4), получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-532.png)

Полученные выше формулы выводились из предположения, что точка земной поверхности *D* и соответствующая ей точка на поверхности референц-эллипсоида совпадают.

В общем случае точка *D* земной поверхности не лежит на референц-эллипсоиде, а имеет некоторую высоту *Н*.

Отвесная линия является касательной в данной точке к направлению силовой линии тяжести, которая не является прямой линией (рис.2.5). Это линия двоякой кривизны и кроме этого ее направление может изменяться скачкообразно (вследствие изменения плотности внутри Земли).[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-533.png)

Поэтому направление отвесной линии в точке *D* не совпадает с направлением отвесной линии в точке *D*0.

В связи с этим для нахождения ξ пользуются следующей формулой, которая приводится без вывода

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-534.png)

Здесь *Н* должно быть взято в км. Последнее слагаемое при Н=1 км, В=45°, равно 0,17″.

При астрономо-геодезическом методе определения уклонения отвесных линий на пункте триангуляции должны быть известны точные астрономические и геодезические (из решения прямых задач) координаты. Вследствие сложности астрономических определений этот метод применяется только на пунктах Лапласа.

**2.3. Гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий**

Уклонения отвесных линий как и аномалии силы тяжести являются следствие несовпадения действительного и нормального потенциалов Земли, т.е. функций возмущающего потенциала *Т*.

Получим формулы, выражающие компоненты уклонений отвесных линий как функции аномалий силы тяжести.

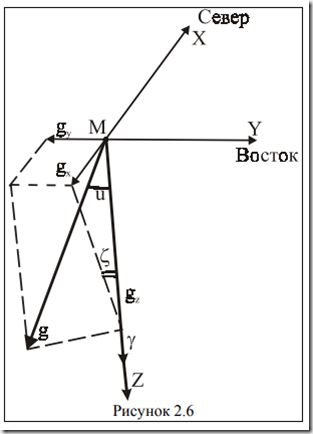
1.Выразим сначала составляющие ξ и ηчерез возмущающий потенциал.

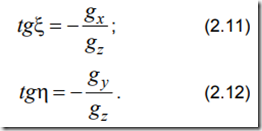
В некоторой точке М земной поверхности построим местную систему координат следующим образом (рис.2.6):

—направление оси z совпадает с вектором нормальной силы тяжести;

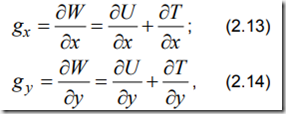
-ось x по меридиану;

-ось y на восток.

[[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-535.png)](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-535.png)Из рис. 2.6. следует:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-536.png)

Как известно

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-537.png)

где W,U,T — соответственно действительный, нормальный и возмущающий потенциалы.

Вследствие перпендикулярности вектора γ к плоскости Mxy получаем

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-538.png)

Поэтому

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-539.png)

Имея ввиду, что угол *u* не превышает 1′ можно положить, что *gz* ≈ γ и окончательно записать

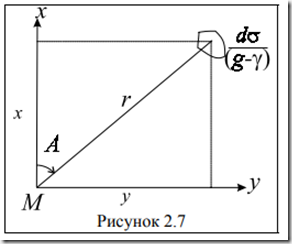
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-540.png)

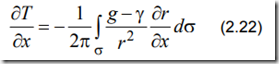
2.Теперь задача составит в нахождении производных [image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-541.png) и подстановке их в полученные формулы (2.19) и (2.10).

Для плоской Земли возмущающий потенциал вычисляется по формуле:

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-542.png)

где r — расстояние от данной точки M до элементарной области dσ (рис.2.7)

[[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-543.png)](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-543.png)Дифференцируя данную формулу получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-544.png)

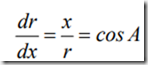
Расстояние r является функцией плоских координат

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-545.png)

Дифференцируя по *x* получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-546.png)

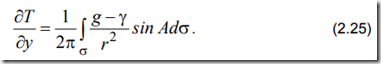
Тогда

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-547.png)

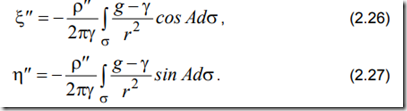
Отсюда можем записать

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-548.png)

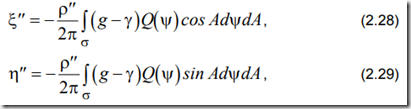
По аналогии:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-549.png)

Подставив полученные производные в формулы (2.19) и (2.20) получим значения уклонений отвесных линий

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-550.png)

Для сферической Земли формулы имеют более сложный вид:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-551.png)

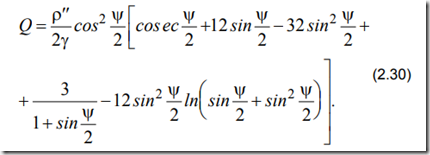
где ψ — сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей; *A*—азимут направления,по которому взятоψ;*Q*(ψ)—функция от сферического расстоянияψ.

Выражения (2.28), (2.29) называются формулами Венинг-Мейнеса, по имени голландского ученого, давшего их вывод в 1928 г. Величину *Q*(ψ) также называют функцией Венинг-Мейнеса.

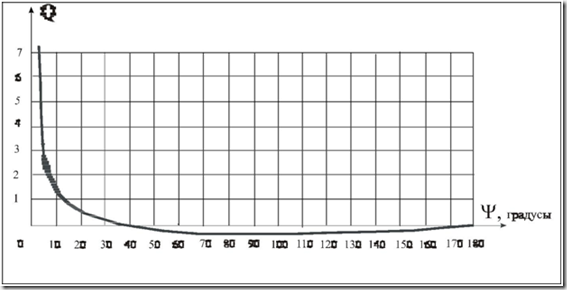
**2.3.1. Вычисления составляющих уклонений отвеса методом численного**

**интегрирования**

Вычисление составляющих уклонений отвесных линий по формулам Венинг-Мейнеса представляет собой большие математические трудности, которые обуславливаются видом функции Венинг-Мейнеса:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-552.png)

Данная функция (рис.2.8) при увеличении расстояния быстро убывает, а при *r* → 0 подынтегральные выражения в формулах (2.28), (2.29) обращаются в неопределенность.

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-553.png)

В настоящее время при вычислениях составляющих уклонений отвеса используются ЭВМ, при этом учитывается влияние масс Земли на больших рас-стояниях.

Влияние масс Земли на близких расстояниях может быть определено вручную с помощью палеток, например с помощью палетки В.Ф.Еремеева.

Эта палетка характеризуется следующими свойствами. Пространство вокруг пункта, в котором необходимо определить составляющие уклонений отвеса, разбивается концентрическими окружностями на ряд областей. Каждая область разбивается радиальными направлениями на участки (сферические

трапеции), имеющие равные площади и влияющие на ξ и ηпропорционально косинусу или синусу азимута направления. На площади каждой трапеции должно быть известно среднее значение аномалий силы тяжести.

Учитывая, что функция *Q* значительно изменяется при изменении.ψ от 0 до 10° и при ψ>10° близка к нулю, то при вычислениях гравиметрических уклонений по формулам Венинг-Мейнеса учитывают влияние области, ограниченной ψ≈9° (≈1000 км). При этом данная область разбивается, в свою очередь на 4 области:

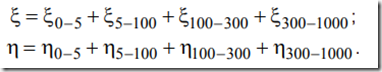
3) 0-5 км (центральная зона), которая выделяется для раскрытия неопределенности в подынтегральных выражениях;

4) 5-100 км;

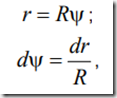
5) 100-300 км;

6) 300-10000 км.

Вычисления в каждой зоне производят отдельно и окончательные значения уклонений вычисляют по формулам:

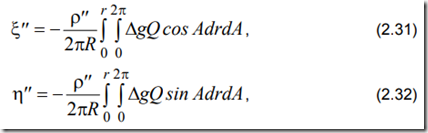
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-554.png)

Практически для вычисления уклонений от сферических расстояний ψ удобнее перейти к дугам большого круга:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-555.png)

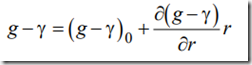
где *R* – радиус Земли.

Тогда формулы (2.28) и (2.29) примут вид

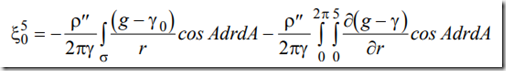
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-556.png)

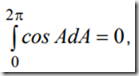
**Определение влияния аномалий в центральной зоне.**

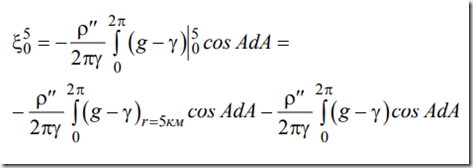
Окружность радиуса 5 км разбивается на 8 участков (рис.2.9). Аномалия в произвольной точке равна

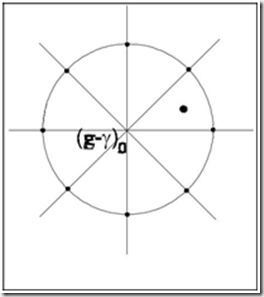
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-557.png)

Просуммируем

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-558.png)

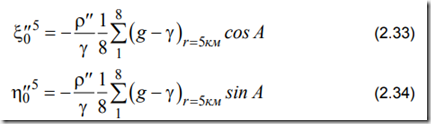
Так как [](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-559.png)поэтому

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-560.png)

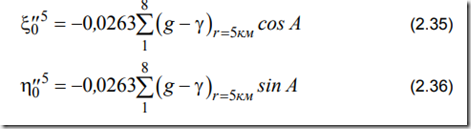
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-561.png)

Первый член в последнем уравнении соответствует точкам на границе 5-км зоны, а второй равен 0.

Принимая [image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-562.png) получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-563.png)

При ρ″=206265, γ=0.98⋅106 мГал, можем записать окончательные формулы

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-564.png)

**2.4. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвесных линий с учетом гравиметрических данных ( астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвеса)**

Наиболее точные значения относительных уклонений отвеса получают астрономо-геодезическим способом на пунктах Лапласа. Иметь высокую плотность (через 5-10 км) пунктов Лапласа невыгодно. Вместе с тем гравиметрические измерения проще чем астрономо-геодезические. Поэтому советскими геодезистами Красовским и Молоденским предложен способ, основанный на сочетании первых двух способов, называемый астрономо-гравиметрическим.

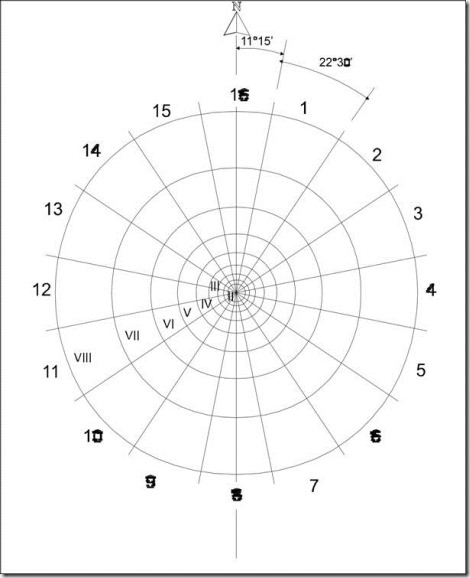
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/clip_image002-51.jpg)

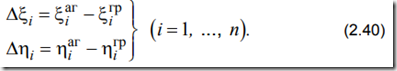
Рисунок 2.10

В этом способе достаточно иметь редкую сеть астрономо-геодезических пунктов, на которых уклонения отвесных линий выводятся астрономо-геодезическим способом. Расстояние между пунктами 150-200км. Это пункты Лапласса. На остальных пунктах астрономо-геодезической сети (1 и 2 классов) относительные уклонения отвеса получают путем интерполирования.

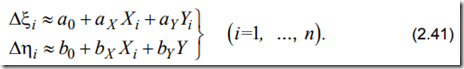
Основное применение нашел способ М.С. Молоденкого. В основе способа лежат исследования, показавшие, что разности астрономических и гравиметрических уклонений отвеса изменяются на поверхности Земли по линейному закону. Иными словами, указанные разности будут линейными функциями координат пунктов.

Получим формулы интерполирования астрономо-геодезических уклонений отвеса между пунктами Лапласа.

Предположим, что для *n* пунктов Лапласа определены астрономо-геодезические отвеса уклонения ξаг и ηаг, а также гравиметрические ξгр и ηгр. Тогда можно образовать разности

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-570.png)

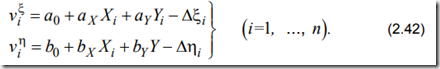
По Молоденскому эти разности будут линейными функциями плановых координат

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-571.png)

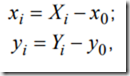
Неизвестными в уравнениях (2.41) являются интерполяционные коэффициенты *a* 0 *, a* *X* *, aY* *, b*0 *, b* *X* *, bY* *.*

Для решения задачи необходимо не менее трех равномерно расположенных пунктов. Для обеспечения контроля и повышения точности число пунктов Лапласа в сети должно быть больше трех. В этом случае коэффициенты находят по способу наименьших квадратов.

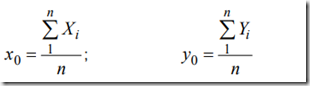
Параметрические уравнения согласно (2.41) запишутся

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-572.png)

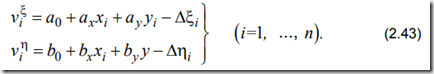
Для упрощения вычислений начало координат перенесем в центр тяжести системы пунктов Лапласа. Координаты пунктов в новой системе будут равны

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-573.png)

где *x* 0 *, y*0 — координаты центра тяжести, которые определяются по формулам

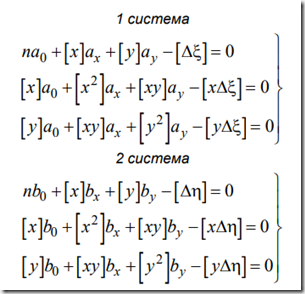
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-574.png)

Тогда уравнения поправок примут вид

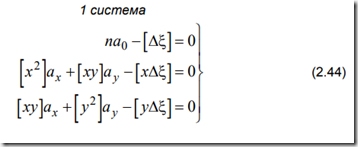
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-575.png)

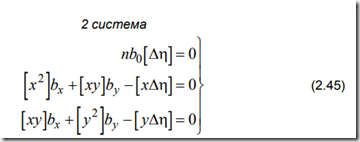
Безусловно, неизвестные *a* *x* *, a* *y* *,b* *x* *,by*, в уравнениях (2.43) не равны неизвестным *a* *X* *, a* *Y* *,b* *X* *,bY*  в уравнениях (2.42).

Из уравнений (2.43) получаем 2 независимые системы нормальных уравнений

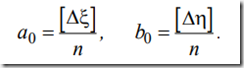
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-576.png)

Учитывая, что используем центральные координаты пунктов , то [ *x* ] = 0 *,* [ *y*] = 0 . Тогда имеем

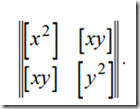
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-577.png)

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-578.png)

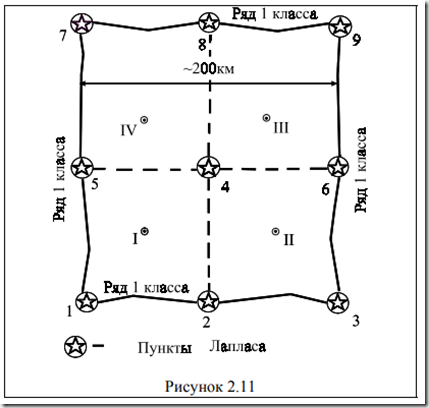
Решая первые уравнения систем (2.44) и (2.45) находим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-579.png)

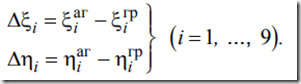
Остальные неизвестные получаем из систем оставшихся двух уравнений. Важно заметить, что матрица коэффициентов уравнений (2.44) и (2.45) одна и та же

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-580.png)

На практике интерполирование уклонений отвесных линий производят в пределах одного полигона 1 класса астрономо-геодезической сети (рис.2.11).

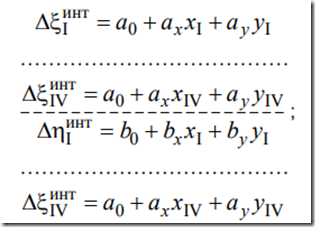
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-581.png)

Обычно это 9 пунктов Лапласа. Они имеют астрономические и геодезические координаты. На пунктах 1-9 произведены и гравиметрические наблюдения. На пунктах I — IV выполнены только гравиметрические измерения. В этих пунктах необходимо определить астрономо-геодезические уклонения отвеса. На пунктах Лапласа (1-9) вычисляют разности

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-582.png)

По данным разностям и координатам составляют нормальные уравнения (11) и (12) и находят интерполяционные коэффициенты *a* 0 *, a* *x* *, a* *y* *, b*0 *,b* *x* *,by* .

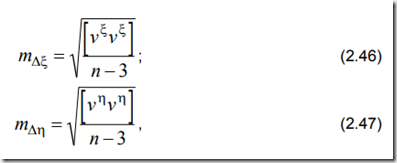
Поправки на пунктах I,II,III,IV находят по формулам

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-583.png)

Находят астрономо-геодезические уклонения отвесов в точках I,II,III,IV

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-584.png)

Оценку точности интерполирования уклонений отвеса выполняют по формулам

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-585.png)

где *v* ξ , *v*η — поправки получаемые после подстановки найденных коэффициентов в уравнения (2.43)

*n*-число астропунктов.

Данный способ позволяет определять уклонения с точностью 0,3″ на территории покрытой сплошной астрономо-геодезической и гравиметрической сетью ( в равнинных, неаномальных районах). На окраинных районах страны и на аномальных горных массивах точность несколько ниже -0,5″.

**3. СИСТЕМЫ ВЫСОТ**

**3.1. Геодезические высоты**

Высота точки земной поверхности *H* одна из координат, определяющая фигуру Земли и отдельные ее точки относительно исходной отсчетной поверхности. Если геодезические координаты *BM*, *LM* определяют положение точки *М* на референц-эллипсоиде, то высота *HM* определяет расстояние точки М от эллипсоида по нормали к  нему.

Знание высот точек необходимо для изучения рельефа, при проектировании и строительстве всех инженерных объектов, для редуцирования всех из-меренных величин на поверхность земного эллипсоида. Кроме того, высоты необходимы для определения работы, совершающейся в гравитационном поле Земли.

**Геодезическая высота***H*состоит из2-х частей(рис.3.1):

— гипсометрической;

— геоидальной.

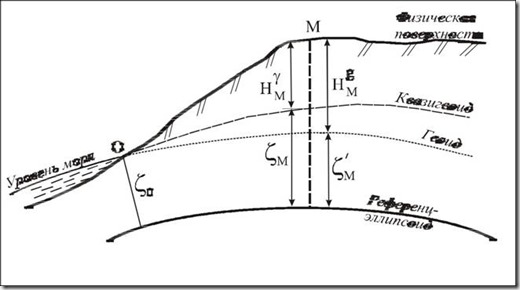
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/clip_image002-52.jpg)

Рисунок 3.1

**Гипсометрическая высота**—высота физической поверхности Земли надквазигеоидом (геоидом).

Обычно эти высоты обозначают:

*H*γ-нормальная высота,т.е.высота точки над поверхностью квазигеоида;

*H g*-ортометрическая высота,т.е.высота точки над поверхностью геоида.Гипсометрическая высота в основном определяет рельеф физической поверхности Земли. Она используется в повседневной инженерной практике, отображается на картах и приводится в каталогах.

**Геоидальная составляющая**ζгеодезической высоты представляет собой высоту квазигеоида (геоида) над земным эллипсоидам. Она определяет рельеф квазигеоида (геоида).

На основании принятых обозначений на рис. 3.1 запишем

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-586.png)

Геоидальную составляющую ζ называют **аномалией высоты**. Аномалии высоты меняются плавно и имеют максимальную амплитуду порядка 200 м, в отличии от гипсометрической, которая быстро меняется и имеет максимальную амплитуду порядка 18 км.

Для решения научных и практических задач необходимо знать геодезическую высоту Н, как сумму двух слагаемых *H* γ и ζ с выделением обеих составляющих для каждой точки физической поверхности Земли.

Гипсометрическую высоту определяют методом геометрического нивелирования. Влияние непараллельности уровенных поверхностей учитывается по гравиметрическим данным.

Аномалии ζ определяют методами астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования.

**3.2. Определение геоидальных составляющих высоты**

Астрономическое нивелирование позволяет определить высоты квазигеоида (геоида) ζ относительно принятого референц-эллипсоида и поэтому является методом изучения действительной фигуры Земли. Рассмотрим принцип метода на простейшем примере (рис.3.2).

Пусть по некоторому профилю взяты 2 бесконечно близкие точки *A* и *A*1. Для получения приближенной формулы допустим, что они лежат на одной уровенной поверхности. В точке *A* геоид и эллипсоид совпадают, т.е. ζА=0. В точке *A*1 проведем нормаль к поверхности эллипсоида *A*1*n*1 и отвесную линию *A*1*n*2.Тогда уголυ—есть уклонение отвесной линии в плоскости сечения*AA*1.

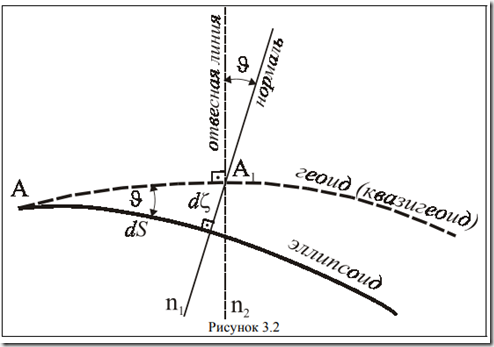
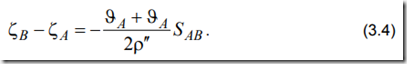
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-587.png)

Рисунок 3.2

Угол при точке *A* также будет равен υ. Если принять, что расстояние между точками *A* и *A*1 равно *dS*, то

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-588.png)

Это и есть превышение точки *A*1 геоида над поверхностью эллипсоида. Зная астрономо-геодезические уклонения отвеса лишь в астропунктах, которые расположены редко, мы вынуждены применять линейное интерполирование между пунктами. Поэтому формула для определения разности высот квазигеоида в точках *A* и *B* будет иметь вид

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-589.png)

Приведем данную формулу к виду удобному для практического пользования, учитывая что для астропунктов известны геодезические координаты и составляющие уклонений отвеса в меридиане и в первом вертикале.

Считая, что азимут линии *A-B* равен *A*, выразим проекцию расстояния на меридиан

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-590.png)

Проекцию расстояния на параллель будет равна

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-591.png)

формулах (3.5) и (3.6)

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-592.png)

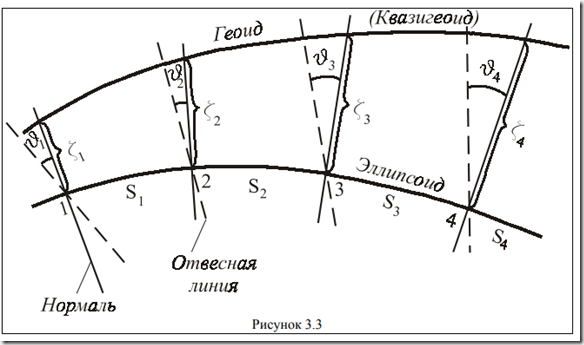
Подставим в формулу (3.4) выражение уклонений отвесных линий через составляющие из формулы (2.9)

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-593.png)

Принимая во внимание формулы (3.5) и (3.6) и выражая ∆*B* и ∆*L* в минутах дуги на основании (3.7) получим окончательную формулу для вычисления превышения при астрономическом нивелировании

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-594.png)

В общем случае для определения ζ по некоторому профилю надо в точках профиля 1, 2, 3 … и т.д. определить уклонения отвесных линий , , … ϑ1 ϑ2 ϑ3 и расстояния S , S , S … 1 2 3 между пунктами (рис.3.3). Величины ζ находят во всех точках профиля, где определены ϑi .

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-595.png)

В начальном пункте 1 значение 1 ζ известно. Значение i ζ в любой точке профиля вычисляется по формуле

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-596.png)

Поскольку предполагается, что ϑ*i* изменяется линейно между двумя пунктами, то точность получения ζ*i* будет тем выше, чем чаще располагаются по профилю пункты с известными значениями уклонений ϑ*i* .

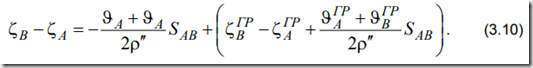
Для геодезических целей ζ*i* нужно знать с ошибками порядка 3 м. Исследования показывают, что для достижения такой точности расстояния между соседними пунктами в равнинных районах должно быть порядка 15 км, а в горных – порядка 5 км. В этих пунктах должны быть известны уклонения отвесных линий.

Если уклонения отвесных линий определены астрономо-геодезическим способом (см.2.2), то нивелирование называют **астрономическим**.

Если уклонения отвесов определены интерполированием астрономо-геодезических уклонений с использованием гравиметрических данных (астрономо-гравиметрический способ, см.2.4), то нивелирование называют **астрономо-гравиметрическим**.

Поскольку астрономо-геодезическое определение уклонений производить через 5-15 км трудоемко, то в нашей стране основное применение нашел именно метод астрономо-гравиметрическое нивелирование.

В этом случае формула для определения превышения имеет вид

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-597.png)

Выражение в скобках можно получить только по гравиметрическим данным. Его называют **гравиметрической поправкой** в астрономическое нивелирование.

**3.3. Определение гипсометрических составляющих высоты**

**3.3.1. Измеренные высоты**

При геометрическом нивелировании на каждой станции визирный луч устанавливается в строго горизонтальное положение, т.е. перпендикулярно к отвесной линии и касательно к уровенной поверхности. При этом определяют расстояние между уровенными поверхностями, проходящими через нули зад-ней и передней реек.

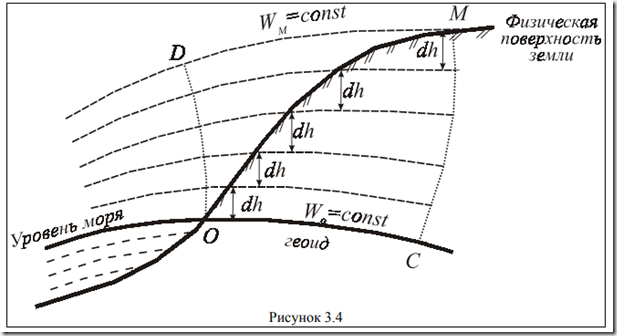
Если бы уровенные поверхности были параллельны между собой, то высоту *HM* точки *М*, относительно исходной точки *О* (нуль-пункта нивелировок) можно было бы определить путем суммирования элементарных превышений:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-598.png)

Такое допущение возможно только в работах малой точности (техническое нивелирование, нивелирование III и IV класса) или в точных нивелировках при очень малой протяженности нивелирного хода. В высокоточных работах и когда высоты передаются на большие расстояния необходимо учитывать непараллельность уровенных поверхностей.

Непараллельность уровенных поверхностей приводит к тому, что измеренное значение высоты зависит от пути, по которому производится нивелирование. Покажем это.

Представим мысленно нивелирование по двум трассам (рис.3.4):

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-599.png)

1) от точки *О* до *D* и от точки *D* по уровенной поверхности к точке *М*;

2) от точки *О* вдоль поверхности геоида к точке *С* и от точки *С* к точке *М*.

В первом случае мы получили бы *ОD*, во втором *CM*, а реальное нивелирование по физической поверхности дало бы еще одно значение *HM* .

Таким образом, **нельзя пользоваться измеренными высотами из-за их** **неопределенности.**

**3.3.2. Требования к системам высот**

Сформулируем основные требования к системе высот в порядке их значимости:

1) высоты пунктов должны быть однозначно определены независимо от трассы нивелирования;

2) высоты должны определяться лишь по данным измерений на физической поверхности Земли без привлечения каких либо гипотез о ее внутреннем строении;

3) поправки в измеренные превышения должны быть достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь при обработке нивелировок низших классов;

4) принятой системе высот должен соответствовать достаточно строгий и удобный способ определения геоидальной части геодезической высоты;

5) высоты должны быть по возможности постоянными для точек на одной уровенной поверхности.

**3.3.3. Геопотенциальные величины**

Как следует из теории потенциала (Лемма Брунса), разность потенциалов силы тяжести между точками стояния передней и задней реек при получении каждого элементарного превышения dh будет равна

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-600.png)

где *g* – сила тяжести.

Отсюда получаем следующую формулу для разности потенциалов силы  тяжести в текущей точке нивелирования *М* и в нуль-пункте *О*

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-601.png)

Изменив знак получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-602.png)

Разность потенциалов в исходном пункте *О* и в точке *М* называют **геопо-тенциальной величиной (геопотенциальным числом).**

Геопотенциальную величину получают из совместных измерений превышений *dh* и силы тяжести *g* по линии нивелирования.

**Геопотенциальное число не зависит от трассы нивелирования**.По-этому именно геопотенциальное число является главной характеристикой ре-пера как непосредственно измеренная величина, а не какие-либо расстояния от данной точки до некоторых воображаемых поверхностей.

Если силу тяжести выразить в Кгал (10⋅м⋅с-2), а превышение в метрах, геопотенциальное число по величине будет близко к высоте в метрах. Например, для горы Монблан (Альпы) геопотенциальное число равно 4710 Кгал⋅м или 4710 гал⋅км, а высота над уровнем моря 4807 м. Для меньших высот над уровнем моря отличие геопотенциального числа от высоты будет еще меньше.

При перемещении по уровенной поверхности, когда *W*0 −*WM* = *const* , работа не совершается; нам легче идти от точки с меньшим потенциалом к большему, т.е. от точки с большим геопотенциальным числом к меньшему. Вода в реках всегда течет в направлении уменьшения потенциального числа, а уровень воды в водоемах совпадает с поверхностью равных геопотенциальных чисел.

Расстояние между уровенными поверхностями прямо пропорционально разности потенциалов и обратно пропорционально величине силы тяжести в некоторой точке силовой линии.

Поэтому запишем общую формулу для вычисления высоты (расстояния между уровенными поверхностями) в гравитационном поле

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-603.png)

где *g* — некоторое значение силы тяжести.

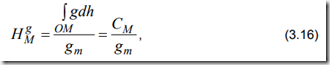
Если в формулу (3.15) подставлять различные значения, то получим различные высоты: [ортометрические,](http://univerhelper.ru/vish_geod/ortometricheskie-vysoty-normalnye-vysoty/)

[нормальные,](http://univerhelper.ru/vish_geod/ortometricheskie-vysoty-normalnye-vysoty/)

[динамические.](http://univerhelper.ru/vish_geod/teoreticheskaja-nevjazka-zamknutogo-poligona-dinamicheskie-vysoty/)

**3.3.4. Ортометрические высоты**

**Ортометрическая высота**—высота точки физической поверхности надповерхностью геоида, отложенная по силовым линиям поля силы тяжести. Она вычисляется по формуле

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-604.png)

где *gm* — среднее интегральное значение силы тяжести вдоль силовой линии *СМ* (см.рис.3.4).

Так как непосредственных измерений вдоль линии *СМ* внутри земной коры мы не имеем, то *H* *g* можно вычислить задаваясь той или иной гипотезой распределения масс внутри Земли, и точность вычисления *H* *g* будет зависеть от степени достоверности гипотезы.

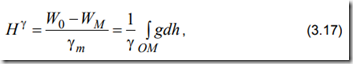
Поэтому геометрически ясное понятие ортометрической высоты строго не реализуется (не выполняется условие 2). Неопределенность в ортометрических высотах вызывает неопределенность в высотах геоида над референц-эллипсоидом.

**3.3.4. Нормальные высоты**

Молоденский М.С. предложил использовать в формуле (3.15) нормальное значение силы тяжести, которое можно вычислить по строгим формулам, на-пример по формуле Гельмерта.

Высоты, вычисленные по нормальным значениям силы тяжести, называют нормальными и обозначают *H* γ

Нормальная высота определяется через геопотенциальное число следующим образом

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-605.png)

где γm -среднее значение на отрезке γ H значение нормальной силы тяжести или значения нормальной силы тяжести для средней величины точки М.

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-606.png)

где γ0 -нормальная сила тяжести на отсчетном эллипсоиде на широте точки *М*.

∆γ -поправка на изменение нормальной силы тяжести с высотой.

По определению нормальная высота *H* γ вычисляется строго без знания строения земной коры.

Если от точек на физической поверхности откладывать по нормали к референц-эллипсоиду нормальные высоты, то можно строго определить отсчетную поверхность, которую М.С.Молоденский предложил назвать **квазигеоидом**.

На морях и океанах квазигеоид и геоид совпадают, а на суше их расхождения равны

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-607.png)

где ∆*gБ* – аномалия Буге.

Поскольку аномалии Буге преимущественно имеют знак минус, то поверхность квазигеоида обычно располагается выше поверхности геоида.

При *H*γ<500м (равнинные и всхолмленные районы) и ∆*gБ ≈ 50мгал, δζ <2,5см. На высокогорных плато при H γ =5000 м, ∆gБ ≈ -400мгал, δζ ≈ 2 м.*

В нашей стране при обработке высокоточного нивелирования принято вы-числять разности нормальных высот *Hi*γ+1 − *Hi*γ , затем эти разности уравнивают и получают нормальные высоты реперов.

Для вычислений используется формула

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-608.png)

Первый член представляет сумму элементарных превышений, полученную из нивелирования; второй – поправку за аномалии силы тяжести на станциях нивелирования, третий – поправку за непараллельность уровенных поверхностей нормального поля.

В формуле (3.19) приняты следующие обозначения:

∆ *h* – измеренное превышение;

( *g* − γ)*m* – средняя по секции аномалия в свободном воздухе;

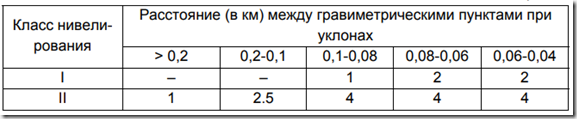
γ*i*0 − γ*i*0+1 – разность значений нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте реперов;

*Hm*γ–средняя высота секции;

γ *m* – значение нормальной силы тяжести для средней высоты и широты секции (на всей территории Украины для вычисления нормальных высот принято γ*m* =980000 мГал).

Для вычисления поправок за переход к нормальным высотам по линиям нивелирования I и II классов производятся гравиметрические измерения. Расстояние между гравиметрическими пунктами в зависимости от уклонов местности устанавливаются «Инструкцией по нивелированию…» (табл.3.1).

Таблица 3.1

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-609.png)

Разности ( *g* − γ) в формуле 3.19 могут быть найдены тремя способами:

1. по непосредственным измерениям силы тяжести по линии нивелирования;

2. с использованием гравиметрических карт в редукции Буге;

3. с использованием гравиметрических карт в неполной топографической редукции.

**3.3.6. Теоретическая невязка замкнутого полигона**

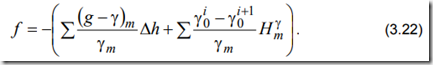
Если нивелирный ход проложен вдоль замкнутого полигона, то в этом случае разность потенциалов между конечными точками хода будет равна нулю

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-610.png)

а следовательно будет равна нулю и разность нормальных высот. Напишем формулу для замкнутого полигона

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-611.png)

Отсюда можно найти ∑ ∆*h* – теоретическую сумму измеренных превышений в замкнутом полигоне, или теоретическую невязку нивелирного хода.

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-612.png)

Теоретическая невязка определяется одновременно с вычислением поправок в превышения.

Приближенную оценку теоретической невязки замкнутого полигона можно получить следующим образом. Преобразуем выражение

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-613.png)

тогда

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-614.png)

или

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-615.png)

Невязка будет равна *f* = ∫ *dh* или

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-616.png)

Переходя к конечным разностям получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-617.png)

где *gm* – среднее значение силы тяжести по секции;

*g*0–любое постоянное число;

∆*h* – превышение по секции.

**3.3.7. Динамические высоты**

Нормальная сила тяжести на уровенной поверхности непостоянна, так как зависит от широты. Поэтому нормальные высоты в разных точках одной и той же уровенной поверхности неодинаковы.

Наглядность непостоянства нормальной высоты проявляется, если рас-смотреть большие водоемы, особенно вытянутые по широте (рис.3.5).

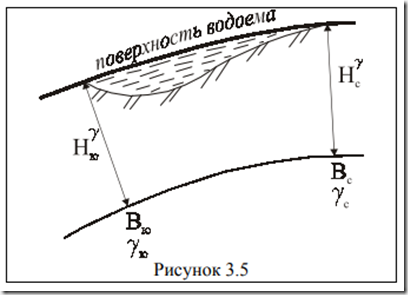
Для большего водоема высота его северного *HC*γ и южных *HЮ*γ берегов будут разные, хотя и располагаются на одной уровенной поверхности.

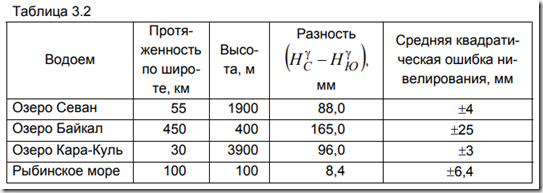
В качестве примеров можно привести разности нормальных высот для не-которых водоемов (табл.3.2)

Разности (*HC*γ − *H* *Ю*γ ) возрастают с увеличением высоты и протяженности по широте.

В связи с этим использование нормальных высот для гидротехнических изысканий и расчетов приводит к неудобствам в работе.

В таких случаях от нормальных высот переходят к **динамическим** высотам, которые одинаковы для всех точек одной и той же уровенной поверхности (условие 5).

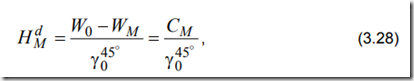
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-618.png)

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-619.png)

**Эти высоты получают если разделить геопотенциальное число на любое постоянное число.**

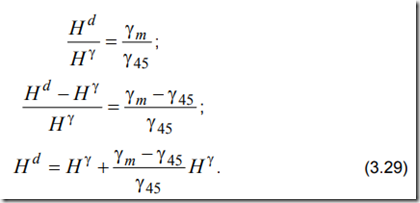
В качестве этой постоянной можно выбрать 1кГал, тогда динамические высоты численно совпадут с геопотенциальным числом. Такой способ счета динамических высот преложен К.Ф.Гауссом.

В качестве системы динамических высот пригодных для Земли в целом, используют выражение

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-620.png)

где γ045o – значение нормальной силы тяжести на эллипсоиде на широте 45°.

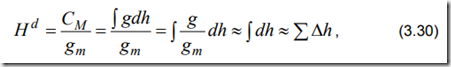
Для получения формулы для перехода от нормальных высот к динамическим запишем пропорцию, учитывая что *Н* обратно пропорционально γ

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-621.png)

Из данной формулы следует, что если широта репера сильно отличается от 45° и высота значительна, то и динамические высоты будут сильно отличаться от нормальных.

Например, при *H* γ =1000 м, В=70°, получим *H* *d* − *H* γ =2 м.

При пользовании системой динамических высот на небольшом участке поверхности Земли в качестве постоянной величины целесообразно использовать среднее значение силы тяжести *gm* на данном участке. Тогда

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-622.png)

т.е. динамическая высота будет близка к сумме измеренных превышений ∆*h*.

Динамические высоты используют при обработке результатов гидростатичесого нивелирования при проектировании гидротехнических сооружений.

Системой (3.30) местных динамических высот пользуются в инженерно-геодезических работах не очень высокой точности.

При обработке материалов государственных сетей динамические высоты не применяются.

**4. РЕДУЦИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА**

**4.1. Методы редуцирования**

В классической геодезии задачи по определению координат *B*, *L* и геодезических высот *Н* рассматриваются раздельно. Для решения первой задачи переходят от пунктов астрономо-геодезических сетей, фактически созданных на земной поверхности, к их проекциям на поверхность принятого референц-эллипсоида, являющегося отсчетным для геодезических высот *Н*.

*При этом редуцируют измеренные элементы геодезической сети, т.е. переходят от длин сторон между пунктами, измеренных на физической поверхности, к длинам дуг геодезических линий, расположенных между проекциями этих пунктов на референц-эллипсоиде, а от наблюденных горизонтальных направлений и азимутов — к направлениям и азимутам указанных дуг.*

Задачи, возникающие при переносе результатов геодезических измерений с физической поверхности Земли на поверхность референц-эллипсоида, а иногда наоборот — с поверхности эллипсоида на поверхность Земли принято называть редукционной проблемой.

Cуществуют два метода редуцирования непосредственных измерений на поверхность референц-эллисоида — метод проектирования и метод развертывания.

В бывшем СССР и в настоящее время в Украине применяется метод проектирования, предложенный Ф.Н. Красовским. В этом методе проектирование, измеренных величин на поверхность эллипсоида осуществляется по норм-лям к нему.

**При решении редукционной задачи методом проектирования возникают следующие операции:**

1) вычисление поправок за уклонение отвеса, т.е. переход от отвесной линии, по которой ориентируется вертикальная ось прибора, к нормали к поверхности референц-эллипсоида;

2) вычисление поправок за высоту над поверхностью эллипсоида;

3) переход от редуцированных элементов поверхности эллипсоида к геодезическим линиям на поверхности эллипсоида;

Последняя операция рассмотрена в курсе сфероидической геодезии.

Метод развертывания предусматривает редуцирование измеренных величин на поверхность геоида отвесными линиями. После этого элементы спроектированные на поверхность геоида отождествляются с этими элементами на поверхности референц-эллипсоида. Поверхность геоида как бы развертывается на поверхности референц-эллипсоида. В этом методе не учитывается несовпадение поверхностей геоида и референй-эллипсоида, за счет чего вносятся искажения в редуцированные значения измеренных величин.

При точных работах такие искажения ощутимы. Так например, высоты геоида относительно референц-эллипсоида могут достигать 150 м, что при редукции расстояния дает ошибку порядка 1:40000 ее длины.

Способ развертывания является нестрогим и применяется в тех случаях, когда нет данных о фигуре геоида в районе геодезических работ.

Способ проектирования является строгим и поэтому методика решения редукционных задач рассматривается ниже только применительно к способу проектирования.

**4.2. Редукция угловых величин**

**4.2.1. Редукция астрономических азимутов и горизонтальных направлений**

Для вывода формулы выражающей разность геодезического и астрономического азимутов вернемся к [рис.2.3](http://univerhelper.ru/vish_geod/astronomo-geodezicheskij-metod-opredelenija-uklonenij-otvesa/) вывода уклонений отвесных линий. Согласно этому рисунку для некоторого направления *DM* можно записать

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-623.png)

Отсюда

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-624.png)

где *A* и *a* — соответственно геодезический и астрономический азимуты.

Разность Θ − Θ1 найдем из ∆*PZZ*1, применяя формулу косинусов углов сферического треугольника

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-625.png)

т.е.

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-626.png)

откуда

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-627.png)

Учитывая, что λ − *L* величина малая (несколько секунд), можем принять с достаточной точностью

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-628.png)

Поэтому формула (4.2) преобразуется в следующую

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-629.png)

Левую часть запишем следующим образом

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-630.png)

С достаточной степенью точности можем принять

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-631.png)

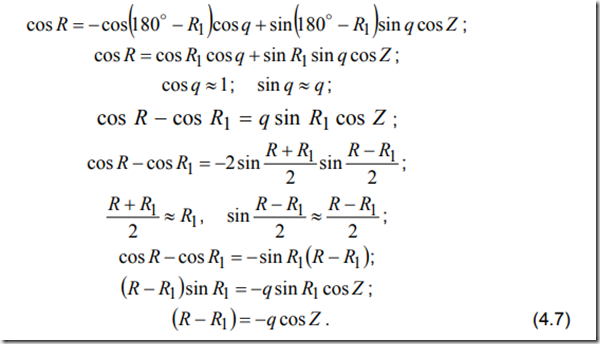
Тогда формула (4.4) примет вид

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-632.png)

Подставляя выражение (4.5) вместо левой части формулы (4.3) и производя преобразования получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-633.png)

Аналогично, применив теорему косинусов углов для треугольника *mZZ*1, получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-634.png)

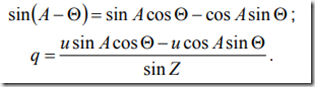
Значение *q* определим из треугольника *mZZ*1 по теореме синусов

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-635.png)

Так как величины *q* и *u* малы и *R* = *A* − Θ , то

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-636.png)

Преобразуем выражение sin( *A* − Θ)и подставим в формулу (4.8)

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-637.png)

Учитывая формулы (2.3) и (2.4), т.е. ξ = *u* cos Θ ; η = *u* sin Θ , запишем

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-638.png)

Подставляя полученное выражение (4.9) в формулу (4.7) получим

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-639.png)

Данная формула выражает поправку в измеренное направление при редуцировании его на поверхность референц-эллипсоида.

Подставляя в исходную формулу (4.1) выражения (4.6) и (4.10) имеем Данная формула выражает поправку в измеренное направление при редуцировании его на поверхность референц-эллипсоида.

Подставляя в исходную формулу (4.1) выражения (4.6) и (4.10) имеем

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-640.png)

Первое слагаемое постоянно для данного пункта и представляет собой поправку азимута за несовпадение плоскостей астрономического и геодезического меридианов.

Второе слагаемое

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-641.png)

представляет собой поправку в направление *DM*, обусловленную уклонением отвесной линии в точке *D*.

При введении в измеренное направление поправки *v*1 переходят от двухгранного угла, у которого ребром является отвесная линия, к соответствующему двугранному углу, у которого ребром являются нормаль к поверхности референц-эллипсоида.

Зенитные расстояния сторон, на которых выполняются астрономические определения азимута в большинстве случаев весьма близки к 90°. Значение *tgZ*при таких углах достаточно велико(не менее150-200)по сравнению с числителем, равным нескольким секундам, а величины *v*1 обычно не превосходит 0,02-0,03″. Поэтому в большинстве случаев данную поправку не учитывают и пользуются формулой

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-642.png)

Принимая во внимание, что ϕ ≈ *B* и η = (λ − *L*)cos ϕ , запишем

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-643.png)

Последнее уравнение называется уравнением Лапласа, а азимут вычисленный по данной формуле называется азимутом Лапласа. Пункты триангуляции, на которых определены астрономические координаты и азимут называются пунктами Лапласа.

Ошибка азимута Лапласа вычисляется по формуле

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-644.png)

На пунктах Лапласа АГС бывшего СССР астрономические определения регламентировались следующими ошибками: *ma* =0,5″; *m*λ =0,03s=0,45″. При B=50° значение *mA* , вычисленное по формуле (4.15) составляет 0,61″.

**4.2.2. Поправка в измеренные горизонтальные направления за высоту наблюдаемого пункта**

Эта поправка обусловлена тем, что нормали к эллипсоиду в общем случае являются скрещивающимися прямыми, и поэтому проекция наблюдаемого пункта на эллипсоид по нормали к нему не лежит в плоскости прямого нормального сечения с пункта, на котором выполнялись измерения на наблюдаемый пункт.

Пусть с пункта *D* наблюдается пункт *Q* имеющий высоту *H*2 над поверхностью эллипсоида (рис.4.1).

Спроектируем данные точки на поверхность эллипсоида по нормалям и получим проекции на эллипсоиде *d* и *q* . Нормали пересекут ось вращения в точках *d*′′ и *q*′′ .

Проведем меридианы *dP* и *qP* . Отметим на оси вращения центр эллипсоида – точку *O* . Пунктиром отметим прямое нормальное сечение *dq*′ , являющееся следом нормальной плоскости, которая включает точку *D* , нормаль *Dd*′*d*′′ и точку *Q* .

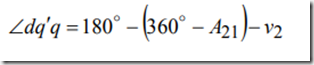
Направление *dq*′ получается после введения в него поправки за уклонение отвеса.

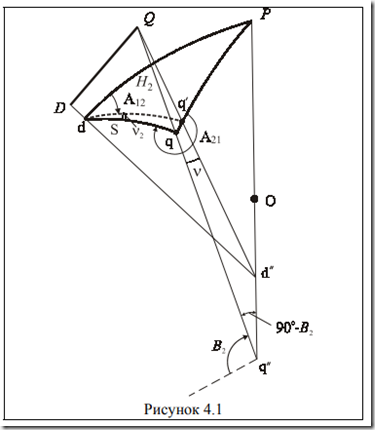
Чтобы перейти к действительной проекции направления на эллипсоид *dq* необходимо ввести поправку.

Из малого сферического треугольника *dqq*′ запишем

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-645.png)

Найдем угол ∠*dq*′*q* . Так как ∠*dqq*′ = 360o − *A*21 , то

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-646.png)

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-647.png)

Учитывая, что поправка *v*2 , как правило не превышает 0,1″, а прямой и обратный азимуты отличаются не более нескольких минут, с достаточной точностью можно записать

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-648.png)

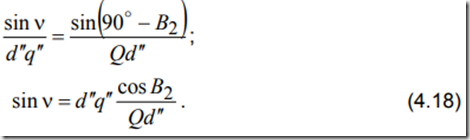
Из формулы (4.16) следует

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-649.png)

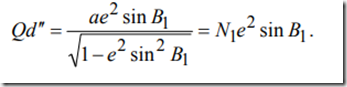
Из прямоугольного треугольника *Qqq*′  (прямой угол в точке *q* так как *Qq  является нормалью) имеем*

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-650.png)

Из треугольника *Qq*′′*d*′′ получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-651.png)

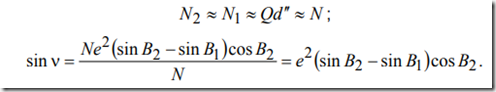
В курсе сферической геодезии была выведена формула для расстояния от центра до пересечения нормали с осью вращения

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-652.png)

Тогда

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-653.png)

С  достаточной для вывода точностью можно записать

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-654.png)

Распишем разность синусов

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-655.png)

Полагая, что *B*2 − *B*1 величина сравнительно небольшая (не более 30′ при S=35-40 км), запишем

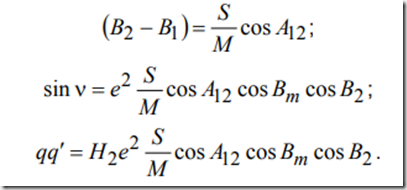
[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-656.png)

где *Bm* — средняя широта точек.

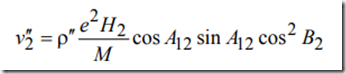
Проекция длины *S* cos *A*12 есть длина дуги меридиана т.е.

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-657.png)

Тогда

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-658.png)

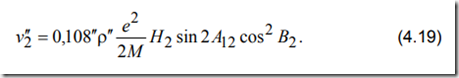
Подставляя полученное выражение в формулу (4.17) и принимая, что cos *Bm* ≈ cos *B*2 получим окончательную формулу

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-659.png)

или

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-660.png)

Для эллипсоида Красовского можно принять [image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-661.png). Поэтому получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-662.png)

При *B*2 =45°, *A*12 =45°, *H*2 =1000 м, величина поправки за высоту наблюдаемого пункта *v*2 ≈ 0,05″.

Поправка за высоту, хотя и невелика, но имеет систематический характер и ею нельзя пренебрегать при вычислениях направлений в триангуляции 1 и 2 классов в горных районах.

Она не зависит от расстояния между пунктами и должна учитываться при точных геодезических построениях независимо от длин сторон этих построений.

**4.2.3. Общая формула приведения направления на поверхность эллипсоида**

Полная редукция горизонтального направления на эллипсоид выражается формулой:

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-663.png)

Поправку *v*1 вычисляют по формуле [(4.12).](http://univerhelper.ru/vish_geod/redukcija-uglovyh-velichin-redukcija-astronomicheskih-azimutov-i-gorizontalnyh-napravlenij/) При ее введении переходят от двугранного угла, у которого ребром является отвесная линия, к соответствующему углу, у которого ребром является нормаль к поверхности референц-эллипсоида.

Поправку *v*2 вычисляют по формуле [(4.18) или (4.19).](http://univerhelper.ru/vish_geod/popravka-v-izmerennye-gorizontalnye-napravlenija-za-vysotu-nabljudaemogo-punkta/) Введение данной поправки предполагает переход от граней проходящих через точки на земной поверхности к граням, проходящим через их проекции на эллипсоиде.

Поправка *v*3 предполагает переход от нормального сечения к геодезической линии. Формула для ее вычисления получена в сфероидической геодезии

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-664.png)

Для эллипсоида Красовского

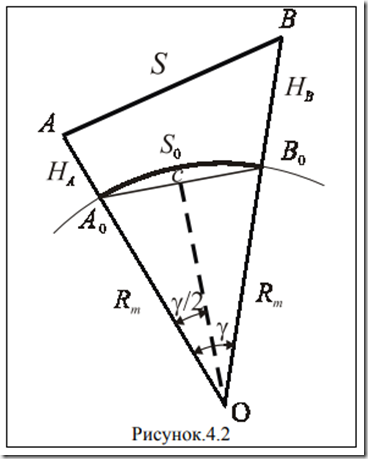
[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-665.png)

**4.3. Редукция линейных измерений. Редукция свето- и радиодальномерных измерений**

Существует два метода высокоточного измерения расстояний: метод свето- и радиодальномерных измерений и измерения подвесными мерными приборами (инварными проволоками). В современных условиях длины сторон в государственных геодезических сетях измеряют, как правило, радио или светодальномерами. Поэтому редуцирование линейных измерений рассмотрим применительно к данному способу.

Свето- и радиодальномерами измеряются расстояния безотносительно к какой-либо поверхности. Иначе говоря наклонные расстояния не связаны с направлениями отвесных линий.

Пусть из измерений получено наклонное расстояние между точками *А* и *В – S (рис.4.2). Геодезические высоты точек соответственно H A и HB . Необходимо найти длину дуги S0 , являющейся проекцией расстояния S на поверхность относимости.*

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-666.png)

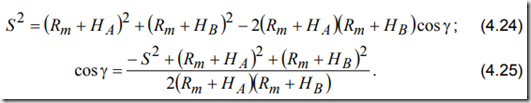
Примем во внимание, что длины линий в государственной геодезической сети не превышают 30 км. Из курса сфероидической геодезии известно, что при расстояниях до 30 км поверхность земного эллипсоида можно заменить поверхностью сферы с радиусом, равным радиусу кривизны в средней точке по направлению стороны *Rm* .

При редуцировании наклонной дальности *S* сначала вычисляют длину хорды *c*, а от нее переходят к длине дуги *S*0 .

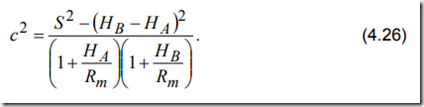
Длину хорды *c* найдем из треугольника *A*0*OB*0 по теореме косинусов

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-667.png)

Для получения угла γ запишем аналогичное соотношение в треугольнике *AOB*

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-668.png)

Подставим полученное выражение в формулу (4.23) и произведя преобразования получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-669.png)

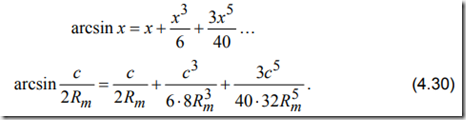
С другой стороны

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-670.png)

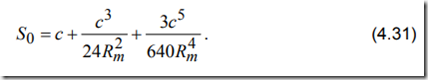
Теперь найдем длину дуги с центральным углом γ

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-671.png)

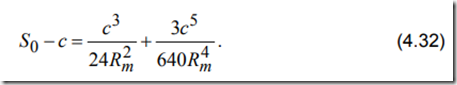
Разложим arcsin в ряд:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-672.png)

Подставим значение arcsin в формулу (4.29) и произведя необходимые преобразования окончательно получим

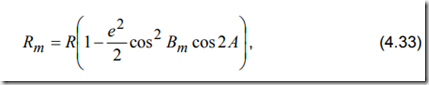
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-673.png)

или

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-674.png)

Последняя формула выражает поправку за переход от длины хорды к длине дуги. Поправка эта всегда мала. Так при *S*=30 км она составляет всего 6 см.

Радиус кривизны при редуцировании измеренных расстояний можно вычислить по формуле

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-675.png)

где *R*-средний радиус кривизны, вычисленный по средней широте точек *Bm*;

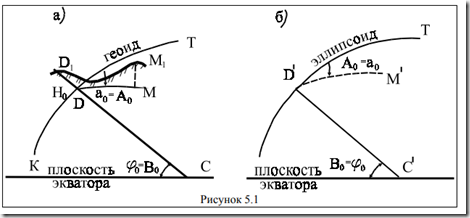
*A*— азимут направления между двумя точками.

При сравнительно малых расстояниях (*S*<15 км) достаточно считать *Rm*=*R*.

**5. УСТАНОВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ДАТ**

**5.1. Ориентирование референц-эллипсоида**

Рассмотрим вначале наиболее простой способ ориентирования референц-эллипсоида с использованием только астрономических данных (рис.5.1).

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-676.png)

Пусть точка *D*1— пункт на земной поверхности, принятый за исходный. На пункте определены:

• астрономические координаты ϕ0, λ0;

• астрономический азимут *a*0 на пункт *M*1;

• высота пункта над поверхностью геоида *H*0

Пункт *D*1 спроектирован отвесной линией на поверхность геоида (рис.5.1,а). Получена точка *D* из которой проведено нормальное сечение под азимутом *a*0.

На поверхности эллипсоида (рис.5.1,б) взята точка *D*′, имеющая геодезические координаты

***B*0= ϕ0*,***

***L*0= λ0*.***

Из точки *D*′ проведено нормальное сечение *D*′*M*′, имеющее в *D*′ геодезический азимут *A*0, равный астрономическому азимуту *a*0, т.е. *A*0= *a*0.

Для ориентирования эллипсоида относительно геоида совместим точку *D*′,с точкой*D*,а нормаль*D*′*C*′с отвесной линией*DC*.Затем повернем эллипсоид вокруг нормали *D*′*C*′ до совмещения плоскости нормального сечения геоида *DM* с плоскостью нормального сечения эллипсоида *D*′*M*′.

В результате этого плоскости астрономического и геодезического меридианов точки *D* совпадут между собой и эллипсоид займет вполне определенное положение относительно геоида, а плоскости экватора референц-эллипсоида и Экватора Земли будут параллельны друг другу т.к. *B*0 = ϕ0 .

Практически ориентирование референц-эллипсоида вышеописанным способом приводит к тому, что астрономические координаты и азимут в начальном пункте приравнивается к геодезическим координатам и азимуту, а высота пункта *D*1 над поверхностью референц-эллипсоида принимается равно нулю, т.е.

***B*0= ϕ0*, L*0= λ0*,* *A*0=*a*0*,* ζ0 = 0                   (5.1)**

*Величины B0 , L0 , A0 и ζ0 принято называть исходными****геодезическими******датами****и поэтому ориентирование референц-эллипсоида называют также****установлением исходных геодезических дат****.*

Если два эллипсоида с одинаковыми размерами ориентированы по астрономическим данным в разных начальных пунктах, то они будут занимать раз-личные положения относительно геоида; каждый их них будет определять свою систему геодезических координат. При этом плоскости экваторов этих эллипсоидов будут параллельны друг другу, поскольку каждая из них параллельна плоскости земного экватора.

Если удачно выбраны размеры референц-эллипсоида (соответствуют размерам геоида), а ориентирование произведено по астрономическим данным, то отступления поверхности референц-эллипсоида от поверхности геоида будут зависеть, главным образом, от величины уклонения отвесной линии в начальном пункте. Эти отступления ζ будут расти по мере удаления от начального пункта и могут достигать 150 м в наиболее удаленных точках.

Если же непрерывно выбраны и размеры эллипсоида, то отступления будут еще больше.

Для малых стран с небольшой территорией, где удаления от исходного пункта небольшие, величины ζ также будут незначительными и не играют существенной роли при обработке геодезических измерений. Поэтому для малых стран вполне допустимо ориентирование эллипсоида по астрономическим данным.

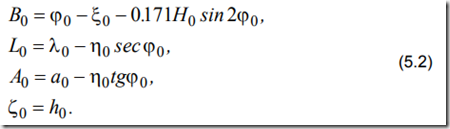
Для огромной территории СССР ориентирование по астрономическим данным приводило к большим отступлениям геоида от эллипсоида и не удовлетворяло запросам геодезической практики.

Для улучшения ориентировки референц-эллипсоида необходимо учесть уклонения отвесной линии в начальном пункте.

Для этого одним из способов определяют составляющие уклонений отвеса в начальном пункте ξ0 и η0, и по ним вычисляют поправки в астрономические координаты.

Высоту ζ0 геоида над поверхностью референц-эллипсоида в начальном пункте не приравнивают нулю, а определяют таким образом, чтобы в пределах территории государства по возможности удовлетворялось условие **∑ ζ*i* = *min* .**

Тогда вместо формул (5.1) получим следующие выражения:

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-677.png)

Плоскости земного экватора и экватора референц-эллипсоида в этом случае будут так же параллельными.

Такой способ ориентирования референц-эллипсоида неразрывно с проблемой изучения фигуры и размеров Земли. Он применим только в случае, если поверхность геоида в какой-то мере уже изучена на территории данного государства.

Этот способ установления исходных геодезических дат был применен в СССР при установлении Единой системы геодезических координат 1942 года, которая на переходный период (до введения референц-системы Украины) применяется для обработки государственной геодезической сети нашего государства.

**5.2. Единая система геодезических координат 1942 года**

Вычисления геодезических, а следовательно и плоских прямоугольных ко-ординат зависят от принятого референц-эллипсоида.

Вопрос о выборе единого эллипсоида в России для геодезических работ был впервые поставлен в 1907 году. Для упорядочения старых и обработки новых триангуляцией в России был принят референц-эллипсоид с размерами, определенными Бесселем в 1841 году.

С 1924 года работы по созданию триангуляции в СССР стали выполняться по единому плану и получили особенно широкий размах. К 1930 году в европейской части СССР было уже создано несколько первоклассных полигонов триангуляции. Возникла необходимость совместного уравнивания этих триангуляций. В связи с этим встал вопрос об установлении новых размеров и ориентировки референц-эллипсоида.

Однако к этому времени было еще мало материалов для определения размеров эллипсоида. Поэтому в 1930-1932 годах обработка государственной астрономо-геодезической сети была произведена на эллипсоиде Бесселя, ориентированного относительно геоида по астрономическим данным в Пулково. Таким образом возникла Пулковская система геодезических координат 1932 года.

Позже она была распространена на всю европейскую часть СССР, Западную Сибирь (до Красноярска), Казахстан и Среднюю Азию.

В системе координат 1932 года эллипсоид Бесселя принят с размерами

***a*=6 377 397*м, b*=6 356 079*м,* α = 1*:*299 *,*15.**

Центрирование эллипсоида произведено по координатам круглого зала Пулковской обсерватории.

В этой точке принято, что эллипсоид и геоид по высоте совпадают. Были определены также астрономические координаты круглого зала и приравнены геодезическим.

**ϕ 0 = *B*0 = 59 o 46 ′ 18 *.*71′′*,* λ0 = *L*0 = 30 o19 ′ 38 *.*55′′*.***

Астрономический азимут с пункта Саблино на пункт Бугры (Саблинская базисная сеть) приравнен геодезическому и принят исходным

***a*0=*A*0=317o02′50*.*63′′*.***

При ориентировке этого эллипсоида не были учтены уклонения отвесных линий.

В 1934 году на обширной территории Восточной Сибири и Дальнего Востока была создана АГС не связанная с сетью западных областей. Обработка этих сетей производилась по мере их создания без связи с западными областями. Для обработки сетей была принята свободная система геодезических координат, в которой также был принят эллипсоид Бесселя 1841 года, а начальным послужил пункт триангуляции Черниговский (близ г.Свободный, Амурской обл.).

Астрономические координаты пункта Черниговский и астрономический азимут стороны п.Черниговский-п.Гатчинский приравнены геодезическим

**ϕ 0 = *B*0 = 51o 25′ 36 *.*55′′*,***

**λ0 = *L*0 = 128 o11′ 34 *.*77′′*,***

***a*0=*A*0=34o21′50*.*56′′*.***

Превышение геоида над эллипсоидом в п.Черниговский равно нулю. Введение даже двух систем координат (Пулковской и Свободненской) не могло удовлетворять запросы бурно развивающихся геодезических работ. Это привело к созданию ряда самостоятельных систем координат в других районах:

1) Магаданская (Дебинская) — в Калымо-Индигирском районе;

2) Ташкентская — в Средней Азии;

3) Петропавловская — на Камчатке;

4) Синцинская — для некоторых районов Дальнего Востока и другие системы.

Для всех этих систем координат был принят эллипсоид Бесселя 1841 года, а ориентирование его производилось по астрономическим данным с использованием одного пункта сети в качестве исходного, где превышение геоида над эллипсоидом приравнивалось нулю.

Пока геодезические сети оставались изолированными друг от друга, существование нескольких систем не вызвало каких-либо затруднений. Когда же отдельные системы начали примыкать друг к другу, то на границах стали возникать недопустимые расхождения в координатах пунктов.

В 1936 г. в районе Красноярска соединились сети Пулковской и Свободненской систем. Координаты одних и тех же пунктов были вычислены в обеих системах и получили разные координаты.

Расхождения оказались равными :

***x п* − *xc* = −270 *м,***

***y п*−*yc*= +790 *м.***

***Такие расхождения не могли быть объяснены ошибками измерений. Исследования показали, что расхождения объясняются следующими причинами:***

1) несоответствием размеров эллипсоида Бесселя действительным размерам Земли;

Большая полуось определена с ошибкой 848 м, а малая 78 м.

Поэтому если даже считать ориентировку эллипсоида в Пулково правильной, то в восточных районах СССР его отступления от геоида достигнут 400 м. Если учесть это отступление, то при обработке геодезических сетей надо внести в базисы поправки порядка 1:15000 их длины, т.е. при больших базисах эта поправка может доходить до 1 м.

2) недостаточно точной ориентировкой эллипсоида в Пулково и на п.Черниговском по астрономическим данным без учета уклонений отвесных линий.

Из сказанного следует, что Пулковская система координат 1932 г. была недостаточно обоснована, а существование нескольких систем оказалось совершенно недопустимым.

Это привело к необходимости установления нового референц-эллипсоида для ведения геодезических работ в СССР.

В 1940 г. наметилось переуравнивание астрономо-геодезической сети СССР. Это явилось удобным случаем для введения новых исходных данных и единой системы координат.

Работы выполнялись специальной комиссией ЦНИИГАиК во главе с Красовским Ф.Н. и Изотовым А.А.

Качество определения размеров эллипсоида зависит от того какая астрономо-геодезическая сеть используется для обработки.

Для вывода размеров эллипсоида Красовским Ф.Н. были использованы обширные материалы астрономо-геодезической сети СССР на площади около 10 млн.км, охватывающей Европейскую часть СССР, Средний и Южный Урал, Казахстан и большую часть Западной Сибири. Кроме астрономо-геодезической сети СССР были использованы градусные измерения Велико-британии, Франции, Германии, Испании, Алжира. Были также использованы градусные измерения США на площади около 7 млн.км.

На основании обработки этих материалов был получен эллипсоид Красовского Ф.Н. с размерами

***a*=6 378 245*“, b*=6 356 863*“,*α =1*:*299*,*3**

На основании этих работ Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. была введена **единая** система геодезических координат в СССР. Она получила название: Система координат 1942 года.

Единой она названа потому, что для всей территории СССР принят один эллипсоид с ориентировкой в одном пункте.

Эллипсоид Красовского ориентирован по геодезическим координатам (не астрономическим) центра круглого зала Пулковской обсерватории и по азимуту с центра круглого зала на пункт Бугры

***B*0=59o46′18*.*55′′*,***

***L*0=30o19′42*.*09′′*,***

***A*0=121o42′38*.*79′′*.***

Поверхности геоида и эллипсоида касаются друг друга в Пулково.

Сравнивая координаты центра круглого зала в Пулково, видим, что они расходятся на величины поправок, введение которых и дало дополнительный поворот референц-эллипсоида в теле геоида, что способствовало устранению значительных по величине относительных уклонений отвесных линий, имевших место в Пулковской системе 1932 г.

Поправка исходного азимута определена из совместного уравнивания астрономо-геодезической сети и носит самостоятельный характер. Ее введение в исходный азимут не вызывает поворота всей астрономо-геодезической сети.

Исходные данные (исходные даты) системы координат 1942 г., установленные для начального пункта Пулково, были надежно проверены путем контрольных определений элементов ориентировки референц-эллипсоида.

Для этого были намечены группы пунктов триангуляции около Москвы, Уфы, Кокчетава. В каждой группе на основании астрономических работ определялись геодезические координаты пунктов и азимут стороны. После этого используя исходные координаты Пулково через существующую астрономо-геодезическую сеть вычислялись координаты этих же пунктов. Расхождения между геодезическими координатами пункта Эликты (около Кокчетава) полученными от Пулково и по астрономическим данным равно:

**∆*B* = 112*.* ′′*,* ∆*L* = 1*.*87 ′′*,* ∆*A* = 1*.*91′′*.***

Таким образом, в координатах определяемых разными способами получено хорошее согласие, что явилось доказательством обоснованности ориентировки референц-эллипсоида в системе координат 1942 г. по исходным данным в Пулково.

**Сущность проекции Гаусса**

Для понимания сущности проекции Гаусса рассмотрим характер свойственных ей искажений на примере изображения шара на плоскости в сравнении с равнопромежуточной проекцией И.Зольднера, как это сделано в [2].

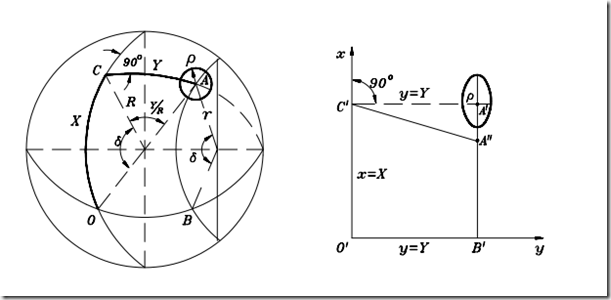
[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-904.png)

Рис. 4.1

Пусть положение точки A на шаре радиуса R задано сферическими координатами *X* и *Y* (рис.4.1). Тогда закон проектирования выражается вторыми зависимостями (4.1)

Предположим, что проектирование производится под условием равенства сферических координат и плоских прямоугольных координат, т.е.

***x*=*X ;* *y*=*Y*** (4.3)

Такой способ изображения поверхности шара на плоскости называется ***проекцией Зольднера*.**

Введем понятие:

***Масштабом проекции****в данной точке по данному направлению называется отношение бесконечно малого отрезка в проекции к этому же отрезку в натуре (на эллипсоиде, на шаре).*

Это значит, что если в данной точке *ds*и*dD*—бесконечно малые отрезки соответственно на эллипсоиде и плоскости, то масштаб изображения равен

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-905.png)

В отличии от масштаба карт и планов масштаб проекции близок к 1.

Для выяснения характера искажений в проекции Зольднера возьмем на шаре бесконечно малый круг с радиусом ρ и центром в точке A и найдем его из-бражение на плоскости проекции.

Для изображения точки A на плоскости проведем взаимноперпендикулярные оси координат x и y. Отложим на этих осях от начала координат отрезки *x=X* и *y=Y*.Получим точкиC’иB’.В точкеB’восстановим перпендикуляр к осиyи отложим отрезок B’A» длина которого равна длине дуги BA. Соединим точки C’ и A». Полученный отрезок C’A» не перпендикулярен оси *x* , т.е. не выполняется условие прямоугольности. Для достижения прямоугольности надо точку A» переместить в точку A’. Теперь условие прямоугольности выполнено и *x=X, y=Y*, но их надо откладывать по координатным осям.

Из рис.4.1 видно, что дугу BA при изображении ее на плоскости надо удлинить на величину A’A». Таким образом, круг в точке A’ на плоскости будет искажен и изображаться эллипсом.

Согласно уравнению (4.3) и выполненным построениям y=Y, т.е. масштаб проекции в направлении оси у будет равен my = 1.

Рассмотрим масштаб по оси *x*. По определению масштаба

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-906.png)

Исходя из выполненных построений на рис.4.1, можем записать

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-907.png)

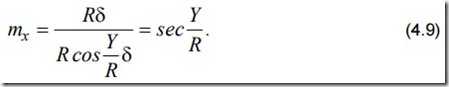
Дуга AB является дугой малого круга и параллелью по отношению к дуге большого круга OC. Поэтому радиус дуги AB, как радиус параллели, можно выразить формулой

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-908.png)

Тогда длина дуги будет

[image](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-909.png)

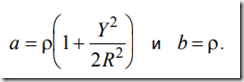
Подставим выражения (4.6) и (4.8) в формулу масштаба проекции в направлении оси *x* (4.5), получим

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-910.png)

Так как Y/R — угол небольшой, разложим sec(Y/R) в ряд

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-911.png)

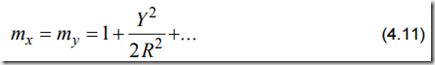
Таким образом, *my* = 1, *mx* > 1. Из-за этого круг на плоскости изображается эллипсом с полуосями

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-912.png)

Раз это так, то рассмотренная проекция (проекция Зольднера) приводит к искажению углов и длин линий. В этой проекции нет подобия фигур на плоскости и на шаре, а масштаб меняется не только при переходе от точки к точке, но и в одной точке по разным направлениям.

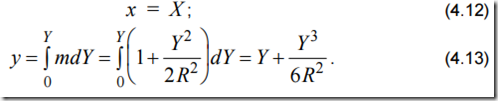
Для достижения равноугольности изображения поверхности шара (эллипсоида) на плоскости необходимо, чтобы масштаб проекции оставался постоянным по всем направлениям, тогда эллипс превратится в окружность.

В связи с этим в проекции Гаусса требуется

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-913.png)

Это приводит к тому, что в проекции Гаусса увеличивается не только абсцисса, но и ордината.

С учетом выражения (4.11) уравнения проекции Гаусса для шара в функции прямоугольных сферических координат будут иметь вид

[](http://univerhelper.ru/wp-content/uploads/2019/01/image-914.png)

При изображении поверхности эллипсоида на плоскости подобные уравнения будут значительно сложнее.

*Система координат Гаусса-Крюгера вполне определяется следующими условиями:*

1) изображение на плоскости равноугольное;

2) осевой меридиан изображается прямой линией, принимаемой за ось абсцисс; началом координат служит изображение точки пересечения начального меридиана с экватором;

3) масштаб вдоль среднего (осевого) меридиана постоянный и принят равным единице.