

Т.С.ЗАКАТОВ

КУРС  
ВЫСШЕЙ  
ГЕОДЕЗИИ

УГЕОД  
3-185

П. С. ЗАКАТОВ

# КУРС ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов  
геодезических специальностей вузов*



МОСКВА «НЕДРА» 1976



Закатов П. С. Курс высшей геодезии. Изд. 4, перераб. и доп. М., «Недра», 1976. 511 с.

Книга содержит 4 раздела: сфероидическая геодезия, физическая геодезия, астрономические методы определения координат на земной поверхности, основы космической геодезии.

В разделе «Сфероидическая геодезия» изложены основные вопросы геометрии земного эллипсоида и методы решения геодезических задач на его поверхности; освещены теория и практика применения координат Гаусса — Крюгера.

В разделе «Физическая геодезия» приведены сведения о методах определения внешнего потенциала силы тяжести Земли, даны выводы уклонов отвесных линий и вычисления высот точек поверхности Земли в различных системах; даны основные понятия о способах изучения фигуры Земли и уравнивания астрономо-геодезической сети.

В разделе «Астрономические методы определения географических координат на земной поверхности» изложены основы сферической и практической астрономии без приведения подробностей и деталей порядка и исполнения полевых измерений и вычислений.

В разделе «Основы космической геодезии» дается описание элементов теории движения ИСЗ и возмущений этого движения; описаны синхронный и орбитальный методы решения геодезических задач, приведены формулы определения параметров гравитационного поля и фигуры Земли и способы связи различных геодезических систем.

Книга предназначена для студентов геодезических специальностей геодезических вузов, а также для географических специальностей государственных университетов, геодезических специальностей политехнических, землеустроительных и сельскохозяйственных институтов.

Табл. 23, ил. 189, список лит. — 58 назв.



761054  
27

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана соответственно программам курса высшей геодезии, принятым для геодезических специальностей, за исключением астрономо-геодезической.

В процессе работы над рукописью и подготовки ее к изданию к автору поступили просьбы от кафедры геодезии и картографии Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Московского института инженеров землеустройства об учете их пожеланий по содержанию подготавливаемой к изданию книги, так как настоящий «Курс высшей геодезии» принят в качестве основного учебника по высшей геодезии на географических факультетах государственных университетов и геодезическом факультете Института инженеров землеустройства.

Эти пожелания были учтены, и в учебник дополнительно включены разделы об основах космической геодезии, сферической и практической астрономии.

Таким образом, в настоящей книге содержатся следующие разделы:

- а) сфероидическая геодезия,
- б) физическая геодезия,
- в) астрономические методы определения координат на земной поверхности.
- г) основы космической геодезии.

Переработка, раздела «Сфероидическая геодезия», по сравнению с прошлым изданием 1964 г., заключалась в основном в следующем: большинство формул приведено к виду, пригодному для вычислений на счетных машинах; большинство примеров на решение практических задач, в особенности требующих многозначных вычислений и, следовательно, трудоемких, даны с применением натуральных значений чисел и тригонометрических функций, с использованием счетных машин различного типа. Некоторые примеры вычислены с применением логарифмов.

В основном метод вывода формул сфероидической геодезии остался прежним — «классическим» — путем разложения исходных дифференциальных уравнений в ряд по биному Ньютона или строке Тейлора и почленного интегрирования; однако отдельные геодезические задачи решены с применением иных методических подходов, разработанных и опубликованных в своем большинстве в последние годы. Таковы, например, формулы (7.18) и (7.19) для вычисления дуги меридиана, полученные на основе применения формул Симпсона; формулы (31.1) — (31.4) решения главной геодезической задачи по методу Рунге — Кутты — Мерсона с примером, решенным на ЭВМ, с использованием способа численного интегрирования дифференциальных уравнений; изложен метод численного интегрирования для вычисления уклонов отвесных линий с использованием графического способа получения исходных и «дифференциальных» данных и некоторые другие. Освещение различных методических подходов и методов решения задач высшей геодезии, а также научных основ этих методов



весьма полезно для изучающих данную дисциплину; это будет способствовать расширению знаний учащихся, которые могут быть использованы ими в своей будущей инженерной деятельности.

Отметим, что знание вопросов этого раздела необходимо не только для расширения кругозора специалистов, но и для будущей практической деятельности. Сведения о фигуре Земли, основания использования эллипсоида как поверхности относимости, методы решения геодезических задач на этой поверхности на разные расстояния, в том числе и большие — тысячи километров, и, наконец, основы теории и практического применения координат Гаусса — Крюгера — всеми этими вопросами должен владеть специалист, для которого геодезия является одним из основных предметов. Соответственно этому в разделе приведены различные способы решения основных геодезических задач — для разных расстояний и требований в отношении точности, а также способы, основанные на применении различных научно-методических приемов их решения. Думается, что не все содержание рассматриваемого раздела должно полностью изучаться учащимися; но при надлежащем сочетании лекций с самостоятельной работой студента, о чем говорилось выше, весь материал раздела, полагаю, окажется полезным и необходимым.

Эти методические соображения учитывались при работе, как над данным разделом, так и над всем учебником в целом.

Раздел «Физическая геодезия» по содержанию можно подразделить на две части:

1) вопросы изучения гравитационного поля Земли при помощи измерений силы тяжести;

2) вопросы решения основных задач высшей геодезии на основе использования результатов всех видов наземных геодезических, астрономических и гравиметрических измерений.

Учитывая назначение учебника, содержание этого раздела в известной мере носит ознакомительный характер, хотя некоторые вопросы его имеют важное практическое значение, например, системы высот, редукционная проблема и некоторые другие. Эти вопросы изложены с большей подробностью.

В разделе «Астрономические методы определения географических координат на земной поверхности» содержатся изложение элементов сферической астрономии и главнейшие теоретические основы методов астрономических определений широт, долгот и азимутов, без приведения многочисленных подробностей, не имеющих принципиального значения.

В разделе «Основы космической геодезии» отражен опыт преподавания этой новой части геодезии на географическом факультете Московского государственного университета по принятой для названного факультета программе. О методах наблюдений даны самые общие сведения; описание определения координат ИСЗ во второй экваториальной системе ( $\alpha$  и  $\delta$ ) по фотографическим наблюдениям дано в изложении, позволяющем получить представление о существе дела.

Главное внимание уделено теоретическим вопросам использования ИСЗ для решения геодезических задач: основы теории движения ИСЗ, главнейшие сведения о синхронном и орбитальном методах, понятия об определении параметров гравитационного поля и фигуры Земли, о связи разрозненных геодезических сетей, расположенных на различных материках в целях создания единой мировой системы координат.

В учебной литературе этот новый и важный раздел современной геодезической науки освещается впервые, крайне желательно, в связи с этим, получить

замечания и предложения как по общему плану освещения основ космической геодезии в учебнике по высшей геодезии, так и пожелания частного характера, касающиеся путей и методов изложения отдельных вопросов раздела.

По сравнению с прежним изданием книги (1964 г.) вместо термина «теоретическая геодезия» введен термин «физическая геодезия», как по существу более конкретно и точно отражающий содержание.

При изложении вопросов курса автор стремился избежать сложных математических выкладок, добиваясь лучшего освещения существа задач и методов их решения. С этой целью применялись возможно более простые методы вывода формул; иногда пропускались промежуточные длинные алгебраические преобразования; значительное число формул выводилось геометрическим путем. Изложение вопросов курса в основном дано на базе дифференциального и интегрального исчисления и аналитической геометрии, изучаемых по программе высшей математики для технических вузов. Однако, упрощая изложение вопросов курса и делая их более доступными для изучения, автор стремился не поступаться строгостью подхода к постановке соответствующих задач и их решению.

При изложении теории потенциала силы тяжести даны его выражения с применением сферических функций главным образом для самого начального ознакомления с этим широко применяющимся в настоящее время методом представления потенциала. Методически включение этих функций осуществлено таким образом, что возможно логически последовательное изучение содержания данной главы, минуя формулы со сферическими функциями.

Сферические функции и матрицы применяются в главе «Основы космической геодезии».

Направленность и назначение книги не позволяют изложить методы полевых измерений и теорию инструментов; исключение составляют весьма краткие понятия об основных идеях, принципах и способах измерения силы тяжести, направлений и дальностей до ИСЗ и определений астрономических координат и азимутов.

Ряд примеров на практическое решение отдельных задач заимствован из лабораторного практикума по сфероидической геодезии, составленного членами кафедры высшей геодезии МИИГАиК Н. А. Беспаловым, В. А. Романовским, Б. Ф. Хитровым. Этим учтен опыт проведения практических занятий кафедры высшей геодезии МИИГАиК. Новые примеры с исходными формулами для вычисления дуги меридиана, решения прямой и обратной геодезических задач и некоторые другие были вычислены и предоставлены Б. Ф. Хитровым, за что приношу ему большую благодарность.

Раздел «Основы космической геодезии» написан кандидатом технических наук, доцентом кафедры геодезии и картографии МГУ им. М. В. Ломоносова А. П. Тищенко.



## ВВЕДЕНИЕ

### ЗАДАЧИ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задачи высшей геодезии можно подразделить на научные и научно-технические.

Главной научной задачей высшей геодезии является изучение фигуры (т. е. формы и размеров) и внешнего гравитационного поля Земли.

Решение этой задачи включает:

1. Определение вида и размеров математически правильной поверхности, достаточно хорошо представляющей фигуру Земли в целом. Такой поверхностью признается поверхность эллипсоида вращения с малым сжатием; он называется земным эллипсоидом.

Определение поверхности земного эллипсоида заключается в установлении параметров, характеризующих его размеры, форму и расположение (ориентирование) в теле Земли.

2. Изучение действительной фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля. Под действительной фигурой Земли понимается реальная физическая земная поверхность.

Изучение действительной фигуры Земли заключается в определении геометрических величин, характеризующих отступления ее поверхности от поверхности установленного земного эллипсоида.

Внешнее гравитационное поле Земли изучают по такому же принципу, как и фигуру Земли: сначала определяют гравитационное поле тела, близкого к Земле, за которое также принимается эллипсоид вращения, затем определяют отступления гравитационного поля реальной Земли от гравитационного поля выбранного эллипсоида.

Гравитационное поле Земли и фигура Земли неразрывно связаны между собой и их изучение представляет по существу одну задачу. Практически задача изучения фигуры Земли сводится к определению координат точек ее поверхности в единой, общей для всей Земли системе, а задача изучения внешнего гравитационного поля Земли — к определению потенциала силы тяжести на поверхности Земли и в ее внешнем пространстве в той же координатной системе.

В числе других научных задач высшей геодезии упомянем, например, такие задачи, как изучение горизонтальных и вертикальных движений земной коры, исследования внутреннего строения Земли, определение разностей уровней морей и перемещений береговых линий океанов, изучение движения земных полюсов и т. п.

Запуск искусственных спутников Земли и наблюдение за их движением расширили круг научных задач высшей геодезии; использование результатов наблюдений ИСЗ позволило изучать фигуры и гравитационные поля Луны и планет солнечной системы.

Перечисленные основные научные задачи решаются на основе результатов геодезических, гравиметрических, астрономических измерений, каковыми являются:

- а) угловые и линейные измерения, определяющие взаимное положение точек земной поверхности (триангуляция, полигонометрия, нивелирование);
- б) измерения ускорений силы тяжести;
- в) астрономические определения широт, долгот точек земной поверхности и азимутов направлений;
- г) наблюдения за движением искусственных спутников Земли.

Для того чтобы эти измерения обеспечили достаточную точность вывода величин, определяющих фигуру и гравитационное поле Земли и планет Солнечной системы, к ним предъявляются высокие требования. Ниже приводятся допустимые величины среднеквадратических ошибок измерений.

Линейные измерения	$\pm 1 : 500\,000$
Измерение горизонтальных углов	$\pm 0,7''$
Измерение зенитных расстояний на пунктах земной поверхности	Несколько секунд
Нивелирование I класса:	
случайная погрешность	$\eta = \pm 1,0 \text{ мм/км}$
систематическая погрешность	$\sigma = \pm 0,05 \text{ мм/км}$
Абсолютные определения силы тяжести	Доли миллигала или в относительной мере — величины порядка $10^{-6}$ — $10^{-7}$
Относительные определения силы тяжести	$0,05$ — $0,5$ мгл или в относительной мере — величины порядка $10^{-7}$
Определение астрономических широт и долгот I класса	$\pm 0,3$ — $0,5''$
Определение астрономических азимутов I класса	$\pm 0,7''$
Определение направлений на ИСЗ	Около $1''$
Определение дальностей расстояний до ИСЗ	До $1 \text{ м}$

Порядок приведенных погрешностей измерений учитывается как при теоретических исследованиях, так и при обработке материалов измерений.

Научно-технические задачи высшей геодезии заключаются в первую очередь в разработке наиболее совершенных методов и приборов для выполнения высокоточных измерений и наблюдений упомянутых видов и определения координат точек на территории государства в единой системе и, в конечном счете, на поверхности всего земного шара. Укажем, что методами высшей геодезии определяют координаты отдельных, дискретных точек земной поверхности. Форму физической поверхности Земли между этими точками детально изучают методами топографии. Для топографического изучения формы поверхности Земли ее точки, определенные методами высшей геодезии, служат исходными и в совокупности образуют опорную геодезическую сеть; при наличии последней для детального изучения земной поверхности методами топографии уже не требуется применения теории высшей геодезии.

Одновременно отметим, что методы и приборы, разрабатываемые в высшей геодезии, находят все возрастающее применение в практике строительства



разнообразных инженерных сооружений — научных, промышленных, гидро- и теплоэнергетических, транспортных и т. п.

Существенной научно-технической задачей высшей геодезии является разработка и установление целесообразных методов математической обработки результатов измерений, имеющих целью устранение геометрических и иных несогласий, обусловленных погрешностями измерений, и вывод наиболее достоверных значений искомых результативных данных измерений.

Картографирование значительных территорий, т. е. отображение земной поверхности на карте — плоскости, ставит задачу отображения и опорных геодезических пунктов на плоскости; иначе говоря, задача сводится к изображению по математическим законам сфероидической поверхности на плоскости и определению на ней положения геодезических пунктов в системе плоских координат, как более удобных для практических целей.

Освещенные в общих чертах научные и научно-технические задачи высшей геодезии взаимосвязаны, и поэтому упомянутое подразделение в известном смысле условно; не вдаваясь в детали, отметим, что выполнение основных научно-технических задач требует учета требований, вытекающих из научных задач, без чего последние не могут разрешаться с необходимой глубиной и достоверностью; с другой стороны, для решения научно-технических задач необходимо знание основных выводов и результативных данных, являющихся итогом решения научных задач высшей геодезии. Изложенное выше позволяет дать следующее общее определение высшей геодезии.

В ы с ш а я г е о д е з и я — наука:

1) изучающая фигуру и гравитационное поле Земли и планет Солнечной системы;

2) определяющая количественные характеристики различных движений земной коры;

3) занимающаяся точными измерениями в натуре, необходимыми а) для исследований по перечисленным научным проблемам, б) для определения координат пунктов государственной геодезической сети в единой системе как основы картографирования его территории, в) для точного решения разнообразных задач при народнохозяйственном строительстве и г) для удовлетворения нужд обороны страны.

Теперь остановимся на некоторых основных понятиях и приведем сведения для общей ориентировки в вопросах курса при последующем более детальном изучении предмета.

Ранее под фигурой Земли понималась поверхность геоида. Геоид — уровенная поверхность, совпадающая в океане с невозмущенной поверхностью воды, мысленно продолженной под материками таким образом, чтобы направления отвесных линий пересекали эту поверхность во всех ее точках под прямым углом. Эта поверхность является непрерывной, замкнутой, всюду выпуклой. Поскольку фигура геоида зависит от неизвестного нам распределения масс внутри Земли, то она, строго говоря, неопределима. Это было показано советским ученым М. С. Молоденским, предложившим основной задачей геодезии считать изучение фигуры реальной Земли и ее гравитационного поля и разработавшим теорию, которая дает возможность точного изучения фигуры Земли на основании выполненных на земной поверхности измерений, без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем ее строении.

В теории Молоденского вводится как вспомогательная поверхность квазигеоида, совпадающая с геоидом на океанах и морях и весьма мало отступающая от поверхности геоида на суше (менее 2 м).

Следует заметить, что вывод параметров земного эллипсоида производится под условием возможной его близости к квазигеоиду. Поверхность квазигеоида играет роль «уровня моря», и от нее ведется счет топографических высот. Таким образом, вместо изучения поверхности геоида теория Молоденского требует определения фигуры квазигеоида. Но если ранее изучение фигуры геоида ставилось как основная задача геодезии, не получавшая точного и строгого решения, то поверхность квазигеоида вводится лишь как вспомогательная и точно определяется. По теории Молоденского, все геодезические задачи получают строгое решение и необходимости в изучении фигуры геоида не возникает.

Изучение фигуры Земли представляет одну из важнейших проблем естествознания; знание формы и размеров Земли представляет большой научный и практический интерес не только для геодезии, но и для многих смежных наук — астрономии, геофизики, географии и др.

Для решения многочисленных практических задач геодезии в конечном счете необходимы координаты отдельных точек земной поверхности в выбранной системе. Эти координаты непосредственно из измерений не определяются, а получаются из вычислений по результатам измерений. Но для вычислений координат точек земной поверхности и других ее элементов — площадей отдельных фигур, расстояний, направлений, разностей высот между заданными пунктами и решения других геодезических задач по результатам непосредственных измерений необходимо знание этой поверхности, т. е. ее формы и размеров. Однако физическая поверхность Земли крайне сложна и использовать эту поверхность при математическом решении геодезических задач невозможно. Поэтому при решении математических задач геодезии используют поверхность эллипсоида (выражаемую простым уравнением), решение задач на которой уже не представляет трудностей. Весьма желательно, чтобы эллипсоид имел наибольшую близость к фигуре Земли в целом. Такой эллипсоид называется общим земным эллипсоидом и определяется следующими условиями:

- 1) совпадением центра эллипсоида с центром тяжести Земли и плоскости его экватора с плоскостью земного экватора,
- 2) минимумом суммы квадратов уклонов по высоте квазигеоида во всех его точках от поверхности эллипсоида.

Из простых геометрических соображений следует, что указанные два условия выражают требования как к размерам и форме земного эллипсоида, так и к его расположению (ориентированию) в теле Земли. Но нетрудно также сделать заключение, что для определения параметров общего земного эллипсоида необходимо выполнить геодезические измерения на всей поверхности Земли. Пока эти измерения еще полностью не выполнены, не представляется возможным определить параметры общего земного эллипсоида геометрическим путем; это дело будущего. Однако использование наблюдений искусственных спутников Земли принципиально упрощает и ускоряет решение этой задачи (см. гл. XVII).

В отдельных странах (или группе стран) принимаются при обработке геодезических измерений эллипсоиды, выведенные по результатам геодезических работ, охватывающих территорию данной страны (или ее части) или



нескольких стран. Такие «рабочие» эллипсоиды называются референц-эллипсоидами. Референц-эллипсоиды отличаются от общего земного эллипсоида. Это различие заключается в несовпадении размеров и центров референц-эллипсоидов с размерами и центром общего земного эллипсоида, а условие минимума суммы квадратов отклонений выполняется для референц-эллипсоида не для всей поверхности Земли, а только для той части, на которой были выполнены геодезические работы, результаты которых использованы для вывода его параметров. Поэтому референц-эллипсоид можно рассматривать как эллипсоид, подходящий только для части поверхности Земли. Вследствие несовпадения центров референц-эллипсоида и реальной Земли малая ось референц-эллипсоида не совпадает с осью вращения Земли, но параллельна последней; также не совпадают, а параллельны плоскости их экваторов.

С какой бы степенью точности ни были определены параметры референц-эллипсоида, его поверхность никогда не совпадает с поверхностью Земли или геоида (квазигеоида). Расстояния между поверхностями земного эллипсоида и геоида (квазигеоида) достигают в отдельных местах 150 м, а высоты точек земной поверхности относительно эллипсоида — сотен и тысяч метров. Поэтому при математической обработке геодезических измерений просто «заменить» земную поверхность эллипсоидом нельзя. Необходимо результаты измерений, выполненных на земной поверхности, предварительно спроектировать на поверхность эллипсоида путем введения соответствующих поправок за переход от одной поверхности к другой. «Отнесенные» таким образом величины — результаты непосредственных геодезических измерений — на поверхность эллипсоида уже можно подвергать строгой математической обработке, используя зависимость, существующие между отдельными элементами поверхности эллипсоида. Поэтому такие эллипсоиды и называют референц-эллипсоидами и эллипсоидами относимости. Такие эллипсоиды служат координатной поверхностью, на которой решаются геодезические задачи и относительно которой определяются геодезические координаты пунктов. Геодезические координаты определяют направление нормалей к поверхности эллипсоида.

Раздел высшей геодезии, в котором рассматриваются математические методы решения геодезических задач на поверхности эллипсоида, называется сферической геодезией.

Раздел высшей геодезии, в котором рассматривается физическая теория изучения фигуры Земли и ее гравитационного поля по результатам непосредственных измерений, назовем физической геодезией. В ней содержатся изложение методов и результатов определения параметров земного эллипсоида, изучение отступлений от его поверхности — поверхности квазигеоида и вычисления потенциала силы тяжести Земли.

Высшая геодезия — обширная область знаний, и при ее изучении она обычно подразделяется на части, рассматриваемые при подробном изложении как самостоятельные дисциплины. По методическим соображениям, учитывая характер и существо исследований по высшей геодезии, ее можно подразделить:

- 1) на разделы, содержащие изложение программ и методов полевых измерений, а также теорию использования для этой цели приборов и инструментов;

- 2) на разделы, рассматривающие теорию и методы научной обработки результатов измерений и получение результативных искомых данных исследований по изучению геометрии и физики Земли.

1-я группа дисциплин, входящих в высшую геодезию, — измерительная часть, подразделяется обычно на разделы:

1. Основные геодезические работы. В этом разделе рассматриваются методы точного определения относительного положения точек земной поверхности путем выполнения высокоточных угловых и линейных измерений (триангуляция, полигонометрия, нивелирование); основная координатная линия, относительно которой производятся указанные измерения, — отвесная линия.

2. Методы геодезической гравиметрии, в которых рассматривают измерения ускорения силы тяжести в точках земной поверхности, необходимые для решения геодезических задач.

3. Геодезическая астрономия. Рассматривает методы определения широт, долгот и азимутов из наблюдений небесных тел. Астрономические широты и долготы определяют направление отвесной линии, т. е. направление силы тяжести, а астрономические азимуты — направления между точками земной поверхности относительно направления на полюс Земли.

Запуск искусственных спутников Земли (ИСЗ) определил возможность новых методов решения основных задач высшей геодезии; соответственно этому, появился новый раздел геодезии как науки, получившей наименование космической или спутниковой геодезии\*. В этом разделе есть вопросы измерений, которые по существу должны быть отнесены к первой группе разделов высшей геодезии. Другой круг вопросов относится к теории и решению задач высшей геодезии по данным спутниковых измерений, поэтому эти вопросы должны быть отнесены ко второй части. Измерительную и теоретическую части космической геодезии как нового раздела геодезии нередко излагают совместно.

2-я группа дисциплин, входящих в геодезию, — это сферическая геодезия и физическая геодезия. Общее понятие о содержании этих разделов было дано выше.

Обычно предполагается, что фигура Земли и ее гравитационное поле постоянны. Однако отмеченные выше колебания земных полюсов, вертикальные и горизонтальные смещения земной коры, непрерывно происходящие перемещения масс внутри Земли, приливно-отливные движения суши и океанов под действием изменяющихся сил притяжения Луны и Солнца, перераспределение атмосферных масс и другие причины вызывают изменение фигуры Земли и ее гравитационного поля.

Изучение изменений фигуры Земли и ее гравитационного поля основано на выполнении повторных измерений через определенные периоды времени и сравнение результатов этих измерений.

При дальнейшем изложении методов решения задач высшей геодезии будем полагать Землю и ее гравитационное поле неизменными.

Изложенные сведения о задачах высшей геодезии определяют ее связь с другими науками.

---

\* По существу, в настоящее время более правильным был бы термин спутниковая геодезия, поскольку именно в результате наблюдений ИСЗ получают исходные данные для решения задач геодезии. Но более распространен термин космическая геодезия; имея это в виду, а также то, что всякое наименование в известной мере условно, мы впредь будем использовать термин космическая геодезия.

Математика, механика, ряд физических наук и дисциплин, точное приборостроение лежат в основе методов и средств решения задач геодезии; в этом состоит ее связь с перечисленными областями знаний; успехи и достижения последних определяют научный и технический уровень решений задач геодезии. В то же время, как указывает проф. Ф. Н. Красовский, в определенные эпохи «успехи геодезии были необходимым обоснованием больших движений мысли в области физики, механики и астрономии» [31, стр. 423].

Наблюдения ИСЗ расширили задачи геодезии; если ранее основной задачей высшей геодезии являлось изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли, то теперь эту задачу можно формулировать как определение взаимного положения планетных объектов в единой системе координат и изучение фигуры уровенных поверхностей внешнего гравитационного поля планет. Этим самым получило дальнейшее развитие и расширение связи геодезии с астрономией.

Одновременно возрастает связь геодезии с исследованиями космическими средствами природных ресурсов Земли, метеорологических факторов и т. п.

Очевидна и не требует пояснений связь геодезии с географией и геоморфологией.

Изучение движений земной коры и результаты упомянутых выше измерений содержат в то же время ценные данные для решения проблем геологии и геофизики; этим, в основном, определяется связь геодезии с названными науками.

Наконец, геодезия связана со многими областями науки и техники, требующими измерений элементов геометрических форм различных объектов, взаимного их расположения в пространстве и их изменений во времени. Здесь геодезия выступает как важный раздел метрологии.

# I.

## СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

### Глава I

#### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СООТНОШЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИпсоИДА

##### § 1. Задачи и определение сфероидической геодезии

Сфероидическая геодезия — один из основных разделов высшей геодезии, предметом которого является изучение геометрии поверхности земного эллипсоида, методов решения геодезических задач на этой поверхности и изображения ее на шаре и на плоскости.

В сфероидической геодезии результаты геодезических измерений, как исходные данные для решения геодезических задач, относятся к поверхности эллипсоида. Так как практически геодезические измерения производятся на физической земной поверхности, то все непосредственные результаты этих измерений предварительно должны быть редуцированы на поверхность эллипсоида. Методы редуцирования измерений на поверхность эллипсоида рассматриваются в физической геодезии (глава XII. Редукционная проблема). Поэтому в дальнейшем мы будем принимать, что геодезические измерения как бы произведены непосредственно на поверхности эллипсоида.

Для числового решения геодезических задач на поверхности эллипсоида необходимо знать его размеры. Под размерами эллипсоида в дальнейшем будем подразумевать экваториальную или большую полуось и полярное сжатие.

Размеры земного эллипсоида выводились неоднократно различными учеными на основании результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ.

В табл. 1 приведены результаты некоторых выводов.

В разных странах для вычисления своих триангуляций используют различные эллипсоиды. Так, например, в США до недавнего времени применялись размеры эллипсоида Кларка 1886 г., во Франции — эллипсоида Кларка 1880 г., в Финляндии — эллипсоида Хейфорда.

В дореволюционной России в работах Корпуса военных топографов использовались значения размеров эллипсоида, выведенные Вальбеком, Кларком и Бесселем. Результаты геодезических измерений в СССР до 1942 г. обрабатывались с использованием размеров эллипсоида Бесселя.

В тридцатых годах в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэросъемки и картографии (ЦНИИГАиК) была начата систематическая обработка материалов советских и зарубежных триангуляций с целью получить новые размеры земного эллипсоида. Эта работа проводилась в ЦНИИГАиК сначала под непосредственным руководством проф.



Таблица 1

Автор	Год	Большая полуось в м	Сжатие
Вальбек . . . . .	1819	6 376 896	1 : 302,8
Бессель . . . . .	1841	6 377 397	1 : 299,15
Кларк . . . . .	1866	6 378 206	1 : 295,0
Кларк . . . . .	1880	6 378 249	1 : 293,5
Слудский . . . . .	1892	6 377 494	1 : 297,1
Жданов . . . . .	1893	6 377 717	1 : 299,0
Хейфорд . . . . .	1910	6 378 388	1 : 297,0
Красовский . . . . .	1936	6 378 210	1 : 298,6
Красовский . . . . .	1940	6 378 245	1 : 298,3

Ф. Н. Красовского, а несколько позднее — под руководством проф. А. А. Изотова при общем руководстве Ф. Н. Красовского.

Новые значения размеров земного эллипсоида получены в ЦНИИГАиК в 1940 г. При этом выводе эллипсоида были использованы результаты больших астрономо-геодезических измерений, произведенных в СССР, совместно с данными определений силы тяжести, а также результаты астрономо-геодезических работ, выполненных в США и Западной Европе.

Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. эти размеры эллипсоида утверждены для геодезических работ, а эллипсоиду дано наименование эллипсоида Красовского.

Размеры эллипсоида Красовского следующие: экваториальная полуось  $a = 6\,378\,245$  м, полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298,3$ .

Данные показывают, что размеры эллипсоида Бесселя, применявшиеся в СССР до 1942 г., были ошибочными в большой полуоси почти на 850 м.

Ориентирование эллипсоида Красовского, т. е. определение координат начального пункта триангуляции СССР, произведено в 1942—1943 гг.; тем самым эллипсоид Красовского был определен как референц-эллипсоид для геодезических работ СССР.

Заметим, что принятие референц-эллипсоида, т. е. его размеров и ориентировки в теле Земли, характеризует определенную систему геодезических координат.

Астрономо-геодезические и гравиметрические работы, выполненные после установления размеров эллипсоида Красовского, позволили получить ряд новых выводов земного эллипсоида. Результаты этих выводов оказались близкими к размерам эллипсоида Красовского. Независимый вывод сжатия Земли, полученный из обработок наблюдений орбиты искусственного спутника,  $\alpha = 1 : 298,26$  фактически совпал со сжатием эллипсоида Красовского —  $1 : 298,3$ . Это говорит о том, что размеры эллипсоида Красовского, принятые в геодезических работах СССР и социалистических стран, установлены удачно.

## § 2. Основные параметры земного эллипсоида и соотношения между ними

На рис. 1 изображен эллипсоид вращения с центром в точке  $O$ , осью вращения  $PP_1$  и плоскостью экваторов  $OEAE_1$ . Введем обозначения:

$a$  — экваториальная или большая полуось эллипсоида

$$a = OE = OE_1 = OA,$$

$b$  — полярная или малая полуось эллипсоида

$$b = OP = OP_1,$$

$\alpha$  — полярное сжатие эллипсоида

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \quad (2.1)$$

$e$  — первый эксцентриситет меридианного эллипса

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (2.2)$$

$e'$  — второй эксцентриситет меридианного эллипса

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (2.3)$$

Параметры  $a$ ,  $b$  или  $a$ ,  $\alpha$  являются основными, определяющими эллипсоид вращения; остальные — вспомогательные величины, применяемые в вычислениях и теоретических выводах.

Между перечисленными элементами земного эллипсоида, кроме соотношений (2.1), (2.2) и (2.3), существуют еще зависимости:

а) между  $e$  и  $e'$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (2.4)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1; \quad \frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2,$$

откуда

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{1 + e'^2},$$

следовательно,

$$e^2 = 1 - \frac{1}{1 + e'^2}$$

и

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}; \quad (2.5)$$

аналогичные преобразования дадут

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad (2.6)$$

б) между  $e$  и  $\alpha$ .

Из (2.4)

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad \text{или} \quad b = a \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.7)$$

но согласно (2.1)

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a},$$

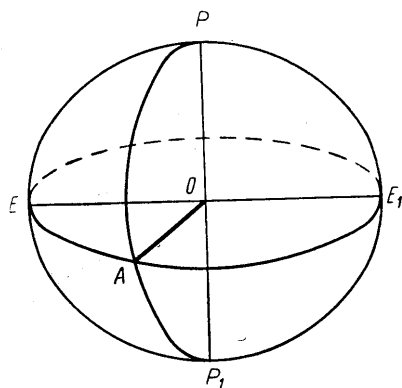


Рис. 1

или

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) имеем

$$\sqrt{1 - e^2} = 1 - \alpha,$$

откуда

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad (2.9)$$

или приближенно

$$e^2 = 2\alpha. \quad (2.10)$$

Для эллипсоида Красовского:

$a = 6\,378\,245,00000$ м	$\lg a = 6.804\,70119\,73$
$b = 6\,356\,863,01877$ м	$\lg b = 6.803\,24285\,31$
$c = 6\,399\,698,90178$ м*	$\lg c = 6.806\,15954\,14$
$\alpha = 0,003\,35232\,9869$	$\lg \alpha = 7.525\,3467466_{-10}$
$e^2 = 0,006\,69342\,1623$	$\lg e^2 = 7.825\,6481824_{-10}$
$e'^2 = 0,006\,73852\,5415$	$\lg e'^2 = 7.828\,5648707_{-10}$

### § 3. Системы координат, употребляемые в высшей геодезии

1. Система прямоугольных пространственных координат  $X, Y, Z$ . За начало координат принимается центр эллипсоида

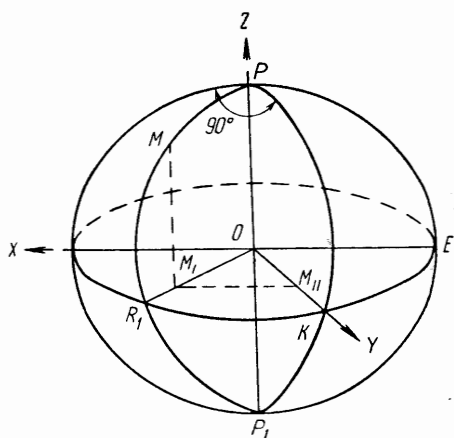


Рис. 2

$O$  (рис. 2). Ось  $OZ$  располагается по полярной оси эллипсоида  $POP_1$ ; ось  $OX$  — в плоскости экватора в меридиане  $PEP_1$ , который принимается за начальный; ось  $OY$  — в плоскости экватора, но в меридиане  $PKP_1$ , плоскость которого составляет с плоскостью начального меридиана угол в  $90^\circ$ .

Таким образом, положение точки  $M$  поверхности эллипсоида определяется координатами:

$$X = OM_{II}, \quad Y = OM_{II}, \quad Z = MM_I.$$

Пространственные координаты  $X, Y, Z$  до последнего времени имели небольшое применение как в теоретических выводах, так и в практических вычислениях.

Это объясняется тем, что как сами измерения, так и вычисления производились на поверхности Земли и заключались в вычислении координат ее точек, расстояний между этими точками и т. п.

\*  $c$  — Полярный радиус кривизны, равный  $\frac{a^2}{b}$ .

В этом случае наиболее удобной была система координат, непосредственно связанная с поверхностью Земли. Однако в связи с космическими исследованиями возникли геодезические задачи по определению координат точек во внешнем пространстве Земли. При этом система поверхностных координат становится неудобной. Наоборот, система прямоугольных пространственных координат, позволяющая выражать положение точек независимо от поверхности земного эллипсоида, оказывается наиболее целесообразной для решения возникающих задач. Поэтому эта система координат  $X, Y, Z$  в настоящее время приобретает большое теоретическое и практическое значение. Метод решения геодезических задач при помощи этой системы координат получил наименование «трехмерной геодезии».

2. Система прямоугольных прямолинейных координат  $x, y$ , отнесенных к плоскости меридиана данной точки. В этой системе координат первоначально определяется меридиан, на котором находится данная точка.

Пусть на рис. 3:  $PR_1P_1R$  — меридианный эллипс, проходящий через точку  $M$ . Примем центр эллипса  $O$  за начало координат, ось  $Ox$  направим по большой, ось  $Oy$  — по малой оси эллипса. Положение точки  $M$  будет при этом определяться координатами:  $x = OM_1$ ;  $y = MM_1$ .

Эта система координат применяется в ряде теоретических выводов. Для практических вычислений координаты в этой системе не используются.

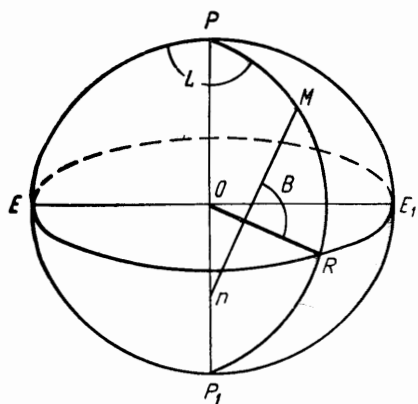


Рис. 4

3. Система геодезических координат. Пусть на рис. 4  $PE_1P_1E$  — меридианный эллипс, проходящий через точку начала счета долгот;  $PMP_1$  — меридиан, проходящий через данную точку  $M$ . Геодезической широтой точки  $M$  называется острый угол  $B$ , образованный нормалью  $Mn$  к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора  $ERE_1$ ; геодезической долготой  $L$  точки  $M$  будем называть двугранный угол  $PMP_1E$ , образованный плоскостью начального меридиана  $PEP_1$  и плоскостью меридиана данной точки.

Широты точек, расположенных в северном полушарии, называются северными, широты точек южного полушария — южными. Точки, расположенные восточнее начального меридиана, имеют долготы, называемые восточными; точки, расположенные западнее начального меридиана, имеют долготы, называемые западными.

Для территории СССР приходится иметь дело только с северными широтами и восточными долготами, поэтому слова «северная» и «восточная» обычно опускают.

В качестве начального меридиана для счета долгот в настоящее время повсеместно принят меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию; однако при использовании материалов старых геодезических работ могут встретиться пункты, долготы которых определены и от другого начального меридиана, например, в России долготы ранее вычислялись от меридиана Пулковской обсерватории.

Широта  $B$  и долгота  $L$ , очевидно, вполне определяют положение точки  $M$  на поверхности эллипсоида.

Система геодезических координат находит широкое применение в теоретических выводах и вычислениях как научного, так и практического характера. Эта система имеет ряд важных достоинств:

а) едина для всей поверхности эллипсоида и, таким образом, объединяет в общей для всей земной поверхности координатной системе геодезические, съемочные и картографические материалы;

б) не требует каких-либо дополнительных и вспомогательных построений; координатные линии в этой системе — меридианы и параллели — непосредственно относятся к поверхности эллипсоида, и их использование для составления карт и объединения всех картографических и съемочных материалов в единое целое удобно даже в том случае, если территории этих съемок не представляют собой сплошного массива;

в) определяет положение нормалей к поверхности принятого референц-эллипсоида, что весьма важно и удобно при исследовании фигуры Земли, определении уклонов отвесных линий и проведении других исследований научного и практического характера.

Геодезические координаты относятся к математически правильной поверхности эллипсоида вращения, принимаемого при геодезических вычислениях, в отличие от астрономических широт и долгот, которые относятся к уровенной поверхности. Если геодезическую широту мы определили как угол между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора, то астрономическую широту мы определяем как угол между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора; соответственно астрономической долготой называется двугранный угол, образованный между плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной точки (плоскость астрономического меридиана — плоскость, проходящая через отвесную линию в этой точке и параллельная оси мира).

В геодезических работах различиями между астрономическими и геодезическими координатами никогда не пренебрегают; более того, эти различия, вызываемые отклонениями отвесных линий, выбором размеров референц-эллипсоида и ориентировки, являются предметом особого изучения.

В мелкомасштабных картографических работах различиями между астрономическими и геодезическими координатами при известных условиях можно пренебречь и употреблять широты и долготы как координаты общей системы географических координат.

В дальнейшем при изложении вопросов сфероидической геодезии будут подразумеваться именно геодезические широты и геодезические долготы.

Заметим также, что, как было указано в § 1, для решения задач сфероидической геодезии непосредственно измеренные величины должны быть предварительно редуцированы на поверхность референц-эллипсоида. Таким образом,



геодезические широты и долготы определяют положение проекций точек земной поверхности на эллипсоид по нормали к последнему. Для определения координат точек земной поверхности в геодезической системе координат необходимо знать еще геодезическую высоту  $H$  — отрезок нормали к референц-эллипсоиду от данной точки Земли  $M$  (см. рис. 4) до референц-эллипсоида. Иначе говоря, предварительно редуцируя результаты измерений на поверхность референц-эллипсоида, мы приводим их к нулевой высоте ( $H = 0$ ). Этим существенно упрощается решение геодезических задач: от вычисления трех координат  $(B, L, H)$ , определяющих положение точки в пространстве, переходят к вычислению двух  $(B, L)$ . Это целесообразно для точек земной поверхности, для которых  $H$  всегда мало, а следовательно малы и редукции. При значительных высотах  $H$  указанное редуцирование измеренных величин становится нецелесообразным, чем и вызывается необходимость перехода в этом случае к системе пространственных прямоугольных координат.

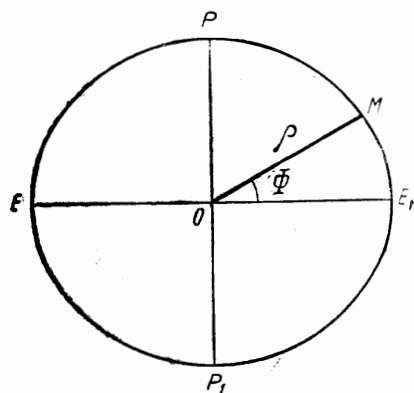


Рис. 5

4. Система геоцентрических координат. Одной из координат в этой системе является геодезическая долгота  $L$ , которая определяет меридианный эллипс, проходящий через точку  $M$  (рис. 5). Положение точки  $M$  на этом эллипсе в рассматриваемой системе координат определяется геоцентрической широтой  $\Phi$ . Геоцентрическая широта определяется как угол между радиусом-вектором  $\rho$  точки  $M$  и плоскостью экватора или, что все равно, большой полуосью меридианного эллипса. На чертеже  $OM$  — радиус-вектор  $\rho$  меридианного эллипса, проведенного через точку  $M$ ; угол  $MOE_1$  — геоцентрическая широта  $\Phi$  точки  $M$ .

Эта система координат в высшей геодезии применяется редко; она употребляется в астрономии, теории фигуры Земли и математической картографии.

5. Система координат с приведенной широтой и геодезической долготой. Одной из координат в этой системе является геодезическая долгота  $L$ . Положение точки  $M$  на меридианном эллипсе, имеющем долготу  $L$ , определяется приведенной широтой  $u$ , которая получается из следующего вспомогательного построения.

Опишем в плоскости меридианного эллипса  $EPE_1P_1$  из  $O$  (рис. 6), как из центра, окружность радиусом  $OE$ , равным большой полуоси  $a$ ; продолжим ординату  $MM_1$  до пересечения с построенной вспомогательной окружностью. Пусть они пересекутся в точке  $m$ . Соединим точку  $m$  с центром эллипса  $O$ ; угол  $mOE_1$  и будет приведенной широтой  $u$  точки  $M$ .

Приведенная широта  $u$  применяется в ряде теоретических выводов, особенно при решении геодезических задач на большие расстояния.

6. Система прямоугольных сферонических координат  $p$  и  $q$ . Оси сферонических прямоугольных координат располагаются на поверхности эллипсоида. В зависимости от положения координатных

осей будем иметь различные системы координат, которые, оставаясь сфероидическими, будут иметь свои особенности. Система сфероидических координат, являясь системой криволинейных координат на поверхности эллипсоида, родственна системам, указанным в п. 3 и 4.

Дадим описание наиболее простой системы прямоугольных сфероидических координат.

Примем некоторую точку  $A$  (рис. 7), геодезические координаты которой известны, за начало координат. Меридиан, проходящий через точку  $A$ , примем за первую координатную ось — ось абсцисс. Абсциссы будем считать положительными для точек, лежащих севернее точки  $A$ , и отрицательными для точек, лежащих к югу от точки  $A$ . Для определения положения точки  $M$  проведем

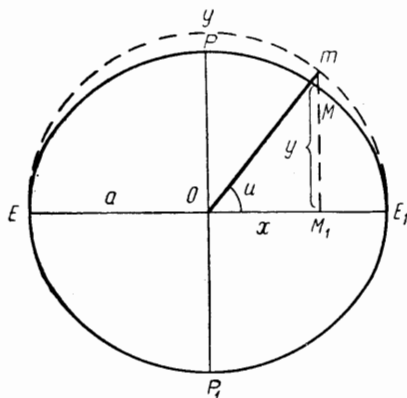


Рис. 6

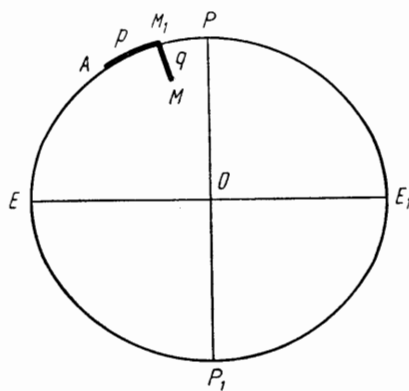


Рис. 7

через  $M$  нормальное сечение таким образом, чтобы оно пересекло меридиан начальной точки  $A$  под углом  $90^\circ$ . Пусть кривая этого нормального сечения (точнее, геодезическая линия — кривая кратчайшего расстояния на поверхности эллипсоида) изобразится на рис. 7 линией  $MM_1$ . Тогда положение точки  $M$  в рассматриваемой системе координат определяют длины следующих двух кривых на поверхности эллипсоида, которые и будут сфероидическими прямоугольными координатами точки  $M$ :

$$AM_1 = p,$$

$$MM_1 = q.$$

Эти криволинейные координаты  $p$  и  $q$  полностью определяют положение точки  $M$  на поверхности эллипсоида, если известны геодезические координаты  $B$  и  $L$  (или другие, им эквивалентные) начала сфероидических координат  $A$ . Система координат  $(p, q)$  имеет много общего с прямоугольной системой координат на плоскости.

Возможны и другие системы сфероидических криволинейных координат в зависимости от выбора координатных осей и порядка счета координат  $p$  и  $q$ .

7. Плоские прямоугольные координаты. Практически необходимо иметь координаты пунктов геодезической сети в прямоугольной плоской системе прямолинейных координат для того, чтобы можно было легко использовать геодезические данные при выполнении различного рода проектных работ, при землеустройстве и т. д. Это вызывает необходимость

введения проекции поверхности эллипсоида на плоскость, т. е. изображения частей земной поверхности на плоскости по определенному закону.

В настоящее время в СССР принята проекция Гаусса — Крюгера или система прямоугольных плоских прямолинейных координат в конформной проекции Гаусса, в которой производят вычисления всех пунктов опорной геодезической сети.

#### § 4. Связь между некоторыми системами координат

1. Связь между геодезической широтой  $B$  и координатами  $x$  и  $y$ , отнесенными к плоскости меридиана определяемой точки. Возьмем меридианный эллипс, проходящий через точку  $M$  (рис. 8). Напишем уравнение этого эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.1)$$

Известно, что тангенс угла, образуемого касательной к кривой в данной точке с положительным направлением оси абсцисс, есть первая производная  $\frac{dy}{dx}$ ; следовательно,

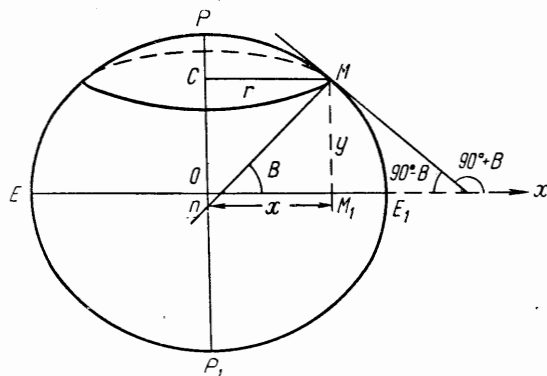


Рис. 8

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg} B. \quad (4.2)$$

Выразим первую производную  $\frac{dy}{dx}$  в функции прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ . Дифференцируя (4.1), находим

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \quad (4.3)$$

Сопоставляя выражения (4.2) и (4.3), находим

$$\operatorname{tg} B = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) дает выражение для геодезической широты как функции прямоугольных координат  $x$ ,  $y$ .

Чтобы найти обратную зависимость, т. е. выразить  $x$  и  $y$  как функции геодезической широты  $B$ , вспомним (2.7).

На основании (4.4) напомним

$$\operatorname{tg} B = \frac{a^2}{a^2(1-e)^2} \frac{y}{x} = \frac{1}{1-e^2} \frac{y}{x} \quad (4.5)$$

и

$$y = x(1 - e^2) \operatorname{tg} B. \quad (4.6)$$

Перепишем (4.1), заменив  $y$ , согласно уравнению (4.6), получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 B}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Решая это уравнение относительно  $x$ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B\} &= 1, \\ x^2 \left\{ (1 + \operatorname{tg}^2 B) - e^2 \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} \right\} &= a^2, \end{aligned}$$

откуда окончательно

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (4.7)$$

Для нахождения  $y$  подставляем в уравнение (4.6) найденное значение  $x$  согласно (4.7). Получим окончательно

$$y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (4.8)$$

Из рис. 8 следует, что абсцисса точки  $M$

$$x = OM_1 = MC$$

в то же время является радиусом  $r$  параллели, проходящей через точку  $M$  и имеющей широту  $B$ . Следовательно,

$$r = x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (4.9)$$

2. Связь между геодезической широтой  $B$  и геоцентрической широтой  $\Phi$ . Из рис. 9 легко находим выражение для геоцентрической широты в функции прямоугольных координат  $x$  и  $y$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x}. \quad (4.10)$$

На основании формулы (4.5) имеем

$$\operatorname{tg} B = \frac{y}{x(1 - e^2)},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} B(1 - e^2). \quad (4.11)$$

Найдем выражение для разности геодезической и геоцентрической широт  $B - \Phi$ . Из формулы (4.11) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \Phi &= e^2 \operatorname{tg} B, \\ \frac{\sin(B - \Phi)}{\cos B \cos \Phi} &= e^2 \operatorname{tg} B, \\ \sin(B - \Phi) &= e^2 \sin B \cos \Phi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полученная формула еще непригодна для практического употребления, так как  $\sin(B - \Phi)$  выражается в функции  $B$  и  $\Phi$ . Однако вследствие незначительности разности  $(B - \Phi)$ , не превышающей, как увидим далее,  $11,8'$ , можно в правой части уравнения (4.12)  $\cos \Phi$  заменить через  $\cos B$ . Рассмотрим, какая погрешность будет допущена при такой замене. Для этого (4.12) перепишем так:

$$\sin(B - \Phi) = e^2 \sin B \cos[B - (B - \Phi)].$$

Раскладывая  $\cos[B - (B - \Phi)]$  по строке Тейлора, получаем:

$$\sin(B - \Phi) = e^2 \sin B [\cos B + (B - \Phi) \sin B],$$

$$\sin(B - \Phi) = e^2 \sin B \cos B + e^2 (B - \Phi) \sin^2 B.$$

Второй член в правой части полученного выражения представляет собой малую величину порядка  $e^4$  (величина  $(B - \Phi)$ , согласно формуле (4.12), является малой величиной порядка  $e^2$ ).

Поэтому, если в правой части уравнения (4.12), заменим  $\cos \Phi$  через  $\cos B$ , то пренебрежем членами порядка  $e^4$ . С этой точностью

$$\sin(B - \Phi) = \frac{1}{2} e^2 \sin 2B.$$

Раскладывая  $\sin(B - \Phi)$  в ряд и ограничиваясь первым членом, получаем приближенную формулу

$$(B - \Phi) = \frac{1}{2} \rho'' e^2 \sin 2B, \quad (4.13)$$

допустив снова при этом погрешность порядка  $e^4$ . Нетрудно видеть, что максимальное значение  $(B - \Phi)''$  будет при  $B = 45^\circ$ . В этом случае  $(B - \Phi)' = 11,8'$ .

Более точная формула для  $(B - \Phi)$  имеет вид [27, стр. 24].

$$(B - \Phi)'' = \rho'' \left[ \frac{e^2}{2 - e^2} \sin 2B - \frac{e^4}{2(2 - e^2)^2} \sin 4B + \frac{e^6}{3(2 - e^2)^3} \sin 6B - \dots \right]. \quad (4.14)$$

3. Связь между геоцентрической широтой и координатами  $x$  и  $y$ , отнесенными к центру и осям эллипса. Выражение радиуса-вектора. Обозначая радиус-вектор  $OM$  через  $\rho$ , на основании рис. 9 напомним:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = \rho \cos \Phi; \quad y = \rho \sin \Phi. \quad (4.15)$$

Подставляя эти выражения в уравнение меридианного эллипса (4.1), получаем

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \Phi}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \Phi}{a^2 (1 - e^2)} = 1.$$

Решаем это уравнение относительно  $\rho$ :

$$\frac{\rho^2}{a^2 (1 - e^2)} [\cos^2 \Phi (1 - e^2) + \sin^2 \Phi] = 1,$$

$$\frac{\rho^2}{a^2 (1 - e^2)} (1 - e^2 \cos^2 \Phi) = 1,$$

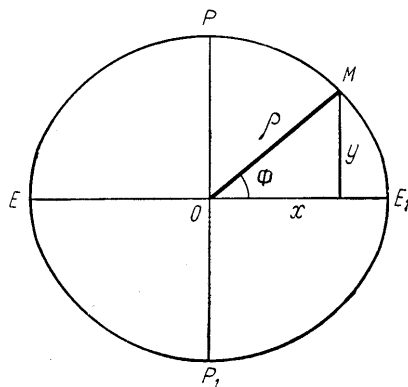


Рис. 9



откуда

$$\rho = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \phi}}. \quad (4.16)$$

На основании (4.15) имеем

$$x = \frac{a \sqrt{1-e^2} \cos \phi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \phi}}; \quad y = \frac{a \sqrt{1-e^2} \sin \phi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \phi}}. \quad (4.17)$$

Выражение для радиуса-вектора в функции геодезической широты определяется из (4.7), (4.8), (4.15), т. е.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 \cos^2 B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{a^2 (1-e^2)^2 \sin^2 B}{1-e^2 \sin^2 B}.$$

Решая это уравнение относительно  $\rho$  и удерживая члены с  $e^4$ , после преобразований получаем в окончательном виде

$$\rho = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B + \frac{e^4}{2} \sin^2 B - \frac{5}{8} e^4 \sin^4 B - \dots \right). \quad (4.18)$$

4. Связь между приведенной широтой  $u$  и геодезической широтой  $B$ . На рис. 10 изображены меридианный эллипс  $PE_1P_1E$  и полуокружность  $EQE_1$ , необходимая для построения угла, являющегося приведенной широтой  $u$ .

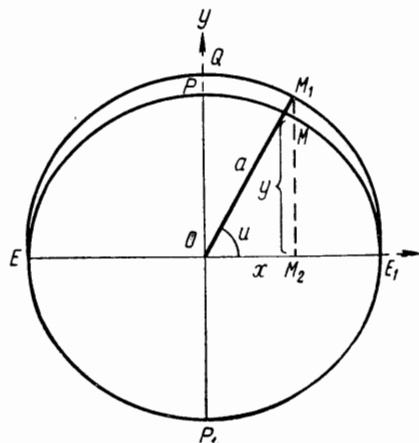


Рис. 10

Предварительно установим связь между ординатами точек эллипса и окружности, имеющими одну и ту же абсциссу. Например, для точки  $M$  установим связь между отрезками  $M_2M$  и  $M_2M_1$ .

Из треугольника  $OM_1M_2$  следует, что

$$(OM_2)^2 + (M_2M_1)^2 = a^2, \quad (4.19)$$

Поскольку точка  $M$  принадлежит меридианному эллипсу, ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса (4.1), т. е.

$$\frac{(OM_2)^2}{a^2} + \frac{(M_2M)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$(OM_2)^2 + (M_2M)^2 \frac{a^2}{b^2} = a^2. \quad (4.20)$$

Сопоставление выражений (4.19) и (4.20) дает

$$M_1M_2 = M_2M \frac{a}{b},$$

или

$$MM_2 = y = M_1M_2 \frac{b}{a}. \quad (4.21)$$

Для получения связи между приведенной широтой  $u$  и геодезической  $B$  имеем из рис. 10

$$x = a \cos u \quad (4.22)$$

и на основании (4.21)

$$y = M_1 M_2 \frac{b}{a},$$

но

$$M_1 M_2 = a \sin u,$$

поэтому

$$y = a \sin u \frac{b}{a} = b \sin u. \quad (4.23)$$

Заметим, что выражения (4.22) и (4.23) являются уравнениями эллипса в параметрической форме.

Из (4.22) и (4.23) легко получаем выражение для приведенной широты  $u$  через прямоугольные координаты  $x$  и  $y$ .

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} u, \quad (4.24)$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{y}{x}. \quad (4.25)$$

Но на основании (4.5)

$$\frac{y}{x} = (1-e^2) \operatorname{tg} B, \quad (4.26)$$

следовательно, из (4.24) и (4.26) имеем

$$\operatorname{tg} B (1-e^2) = \operatorname{tg} u \sqrt{1-e^2},$$

откуда окончательно получаем искомую зависимость

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B. \quad (4.27)$$

Получим еще дополнительные зависимости, которые будут необходимы в дальнейшем.

Из (4.23), принимая во внимание (2.7) и (4.8), получаем

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}. \quad (4.28)$$

Из (4.27) пишем

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{\operatorname{tg}^2 u}{(1-e^2)},$$

$$\frac{1}{\cos^2 B} = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 u}{(1-e^2)},$$

откуда

$$\cos B = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}. \quad (4.29)$$

На основании (4.9) и (4.22) можем также написать для радиуса параллели

$$r = a \cos u.$$

Выведем приближенную формулу разности  $(B-u)$ , удобную для подсчетов

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} B - \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B,$$

$$\frac{\sin(B-u)}{\cos B \cos u} = \operatorname{tg} B [1 - (1-e^2)^{1/2}].$$

Раскладывая  $(1 - e^2)^{1/2}$  в ряд и заменяя  $\cos u$  на  $\cos B$  (допуская тем самым ошибку на малую величину порядка  $e^4$ ), получаем окончательное выражение для  $(B - u)$

$$(B - u)'' = \frac{1}{4} \rho'' e^2 \sin 2B. \quad (4.30)$$

Более точная формула для  $(B - u)$  имеет вид

$$(B - u)'' = \rho'' \left[ n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \frac{n^4}{4} \sin 8B + \dots \right], \quad (4.31)$$

где

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u}.$$

5. Связь между системой прямоугольных пространственных координат  $X, Y, Z$  и другими системами. На рис. 11  $PR_1P_1R$  — меридианный эллипс, в плоскости которого находится точка  $G$  начала счета долгот и, следовательно, в этой плоскости располагается координатная ось  $OX$ ;  $PE_1P_1E$  — меридианный эллипс, на котором расположена данная точка  $M$  и координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ . Угол между плоскостями этих меридианных эллипсов равен геодезической долготе  $L$ . На рис. 11 имеем:

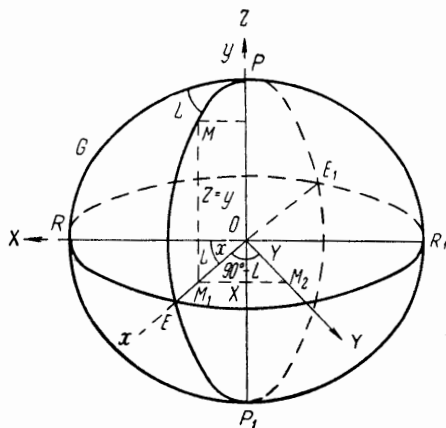


Рис. 11

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos L \\ Y &= x \sin L \\ Z &= y \\ x &= \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \right\}. \quad (4.32)$$

Далее, на основании (4.32), (4.22) и (4.23) получим:

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cos u \cos L \\ Y &= a \cos u \sin L \\ Z &= b \sin u = a \sqrt{1 - e^2} \sin u \end{aligned} \right\}. \quad (4.33)$$

На основании (4.32), (4.7) и (4.8) напомним

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cos L \\ Y &= \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \sin L \\ Z &= \frac{a (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\}. \quad (4.34)$$

Если заменить в (4.34)

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a^2 \cos B \cos L}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \\ Y &= \frac{a^2 \cos B \sin L}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \\ Z &= \frac{b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

обозначая

$$\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} = p. \quad (4.36)$$

Формулы (4.35) перепишутся:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a^2 \cos B \cos L}{p} \\ Y &= \frac{a^2 \cos B \sin L}{p} \\ Z &= \frac{b^2 \sin B}{p} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

### § 5. Главные радиусы кривизны в данной точке эллипсоида

Через нормаль к поверхности эллипсоида можно провести бесчисленное множество плоскостей. Эти плоскости, перпендикулярные к касательной плоскости к поверхности эллипсоида в данной точке, называются **нормальными**. Кривые, образуемые от пересечения нормальных плоскостей, проведенных в данной точке, с поверхностью эллипсоида, называются **нормальными сечениями**. В каждой точке существует два взаимно перпендикулярных нормальных сечения, кривизна которых имеет максимальное и минимальное значения; эти нормальные сечения называются **главными нормальными сечениями**.

В некоторой точке  $M$  поверхности эллипсоида вращения главными нормальными сечениями, как известно из дифференциальной геометрии, являются:

1) меридиональное сечение, проходящее через данную точку  $M$  и оба полюса эллипсоида  $P$  и  $P_1$  (на рис. 12 меридиональное сечение в точке  $M$  представляется эллипсом  $PME_1P_1E$ );

2) сечение первого вертикала, проходящее через точку  $M$  и перпендикулярное к меридиональному сечению точки  $M$ . Сечение первого вертикала изображено на рис. 12 кривой  $WME$ , представляющей собой также эллипс.

Обозначим через  $M$  и  $N$  радиусы кривизны меридиана и первого вертикала соответственно. Найдем выражения для радиусов кривизны главных нормальных сечений в функции геодезической широты  $B$ . Радиус кривизны плоской кривой, выражаемой уравнением вида  $y = f(x)$ , определяется формулой

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

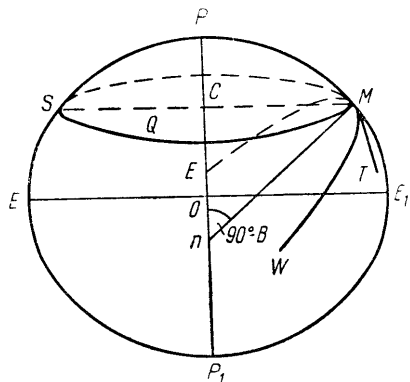


Рис. 12

Применив эту формулу к меридианному эллипсу, напомним

$$M = - \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (5.1)$$

(знак минус взят потому, что  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ). Из (4.2) имеем

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{ctg} B.$$

Рассматривая  $B$  как функцию  $x$ , дифференцируем формулу еще раз по  $x$  и получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B} \frac{dB}{dx}. \quad (5.2)$$

Для вычисления  $\frac{dB}{dx}$  воспользуемся формулой (4.7)

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = a \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}.$$

Дифференцируя последнюю формулу, находим:

$$dx = a \{ -\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} + e^2 \sin B \cos^2 B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} \} dB,$$

$$\frac{dx}{dB} = a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} \{ -(1 - e^2 \sin^2 B) + e^2 \cos^2 B \},$$

$$\frac{dx}{dB} = -a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} (1 - e^2).$$

Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}{a \sin^3 B (1 - e^2)}.$$

Подставляя полученные выражения для  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  в (5.1), находим

$$M = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 B)^{3/2} a \sin^3 B (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}.$$

Окончательно

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}. \quad (5.3)$$

Из (5.3) ясно, что  $M$  возрастает при изменении  $B$  от 0 до  $90^\circ$ .

Радиус кривизны меридианного эллипса в полюсах (при  $B = 90^\circ$ ) обозначим через  $c$ , тогда

$$c = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Принимая во внимание (2.7) и (2.5), находим

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b} = a \sqrt{1 + e'^2}. \quad (5.4)$$

Обозначив

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (5.5)$$

напишем

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}. \quad (5.6)$$

Введем еще функцию

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}. \quad (5.7)$$

Так как, согласно (2.5) и (2.6),

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2},$$

то

$$1 - e^2 \sin^2 B = 1 - \frac{e'^2}{1 + e'^2} \sin^2 B = \frac{1 + e'^2 \cos^2 B}{1 + e'^2}$$

и

$$M = \frac{a(1 + e'^2)^{1/2}}{V^3}, \quad (5.8)$$

или, согласно (5.4),

$$M = \frac{C}{V^3}. \quad (5.9)$$

$W$  и  $V$  — соответственно называются первой и второй основными функциями геодезической широты; они имеют большое значение в теории сфероидической геодезии.

Заменяя в (5.3) первый эксцентриситет его выражением через полуоси и используя обозначение (4.36), формула (5.3) для  $M$  переписывается

$$M = \frac{a^2 b^2}{p}. \quad (5.9')$$

Для определения радиуса  $N$  первого вертикала заметим, что если сечение первого вертикала  $WME$  (рис. 12) — нормальное сечение, то параллель  $MQS$  — наклонное сечение, поскольку нормаль не лежит в плоскости этого сечения. Указанные два сечения в точке  $M$  имеют общую касательную. Для доказательства этого положения проведем в точке  $M$  касательную к параллели  $MT$ ; эта касательная, лежащая в плоскости  $MQSC$ , перпендикулярна к меридианной плоскости  $ME_1P_1EP$ , перпендикулярна к прямой  $MC$ , образованной пересечением этих плоскостей. Таким образом, касательная  $MT$  перпендикулярна к плоскости меридиана  $PME_1P_1$ , поэтому плоскость первого вертикала будет содержать прямую  $MT$ ; если  $Mn$  — нормаль к поверхности эллипсоида в точке  $M$ , то угол  $T Mn$  равен  $90^\circ$ , следовательно,  $MT$  будет касательной и к кривой  $EMW$ .

Имея это в виду, воспользуемся теоремой: если через точку поверхности проведены два сечения — нормальное и наклонное, причем в рассматриваемой точке эти два сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих двух сечений.



Из рис. 12 следует, что угол между плоскостями параллели и первого вертикала измеряется углом  $CMn = B$ . Поэтому радиус  $r$  параллели определится через радиус кривизны первого вертикала  $N$  по формуле

$$r = N \cos B = MC.$$

Учитывая выражение для радиуса параллели из (4.9), получаем

$$\frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = N \cos B,$$

откуда

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad (5.10)$$

или

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V},$$

или, принимая во внимание обозначение (4.36), получим

$$N = \frac{a^2}{p}. \quad (5.10')$$

Из рис. 12 следует, что

$$Mn = \frac{MC}{\cos B} = N, \quad (5.11)$$

т. е. длина отрезка нормали  $Mn$  равна радиусу кривизны первого вертикала. Из (5.3) и (5.10) имеем

$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 + e^2 \cos^2 B}{1 - e^2} = 1 + \frac{e^2 \cos^2 B}{1 - e^2}. \quad (5.12)$$

Отсюда видно, что

$$N \geq M.$$

Для вычислений используются в соответствующих случаях величины  $\frac{\rho''}{M}$  и  $\frac{\rho''}{N}$ , обозначаемые символами (1) и (2), т. е.

$$\frac{\rho''}{M} = (1) \quad \text{и} \quad \frac{\rho''}{N} = (2). \quad (5.13)$$

Значения этих величин выбирают из специальных геодезических таблиц по аргументу широты.

Радиус кривизны меридиана  $M$ , как увидим далее, служит для вычисления длин дуг меридианов и разностей широт; радиус кривизны первого вертикала  $N$  — для вычисления длин дуг параллелей и разностей долгот и азимутов.

Для вычислений на счетных машинах полученные выражения (5.3) и (5.10) для  $M$  и  $N$  неудобны в связи с необходимостью вычислять дробные степени  $W$  и  $V$ ; в этом случае целесообразно представить  $M$  и  $N$  в виде сходящихся рядов.

Разложив в выражениях (5.3) и (5.10) знаменатели  $(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}$  и  $(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}$  в биномиальный ряд, после несложных преобразований

и подстановки числовых значений элементов референц-эллипсоида Красовского в метрах, получим:

$$\left. \begin{aligned} M &= 6\,367\,558,4969 - 32\,072,9605 \cos 2B + 67,3123 \cos 4B - \\ &- 0,1319 \cos 6B + 0,0002 \cos 8B - \dots = 6\,335\,552,7170 + \\ &+ 63\,609,7883 \sin^2 B + 532,2089 \sin^4 B + 4,1558 \sin^6 B + \\ &\quad + ,0317 \sin^8 B \\ N &= 6\,388\,958,4431 - 10\,726,9320 \cos 2B + 13,5077 \cos 4B - \\ &- 0,0189 \cos 6B + \dots = 6\,378\,245,0000 + 21\,346,1416 \sin^2 B + \\ &\quad + 107,1586 \sin^4 B + 0,5982 \sin^6 B + 0,0033 \sin^8 B \end{aligned} \right\}. \quad (5.14)$$

Выше были получены формулы для главных радиусов кривизны, вывод которых основывался на классическом подходе к решению задач сфероидической геодезии. Учитывая важность полученных формул, а также методические соображения, дадим вывод формул для  $M$  и  $N$  в другой форме, пользуясь иным приемом их получения.

Воспользуемся известным разложением Эйлера степенной функции в цепную дробь

$$(1+y)^v = 1 + \frac{vy}{1} + \frac{(1-v)y}{2} + \frac{(1+v)y}{3} + \frac{(2-v)y}{2} + \dots + \\ + \frac{(n-v)y}{2} + \frac{(n+v)y}{2n+1} + \dots \quad (5.15)$$

Разложение (5.15) сходится, как известно, на всей комплексной плоскости переменного  $y$ , разрезанной по вещественной оси от  $y = -1$  до  $y = -\infty$ . В случае  $y$  вещественного положительного разложение (5.15) применимо для любого значения аргумента  $y$ . Для этого достаточно взять нужное количество звеньев цепной дроби (5.15). Ограничиваясь двумя из них, запишем:

$$(1+y)^v \approx 1 + \frac{vy}{1} + \frac{(1-v)y}{2}. \quad (5.16)$$

Далее, пользуясь известным методом подсчета подходящих дробей, опуская подробности дальнейших математических выкладок, для выражения (5.16) можно записать, что

$$(1+y)^v \approx \frac{2+(1+v)y}{2+(1-v)y}. \quad (5.17)$$

Применим формулу (5.17) для вычисления величин  $M$ ,  $N$ , записав их в виде:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}, \quad (5.18)$$

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}, \quad (5.19)$$

где по-прежнему:

$$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B} = (1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}, \quad (5.20)$$

$$V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B} = (1+e'^2 \cos^2 B)^{1/2}. \quad (5.21)$$

В формулах (5.20) и (5.21) значения переменного  $y$ , входящего в (5.17), соответственно равны

$$y = -e^2 \sin^2 B \quad \text{и} \quad y = e'^2 \cos^2 B,$$

а величина  $v = 1/2$ .

Следовательно,

$$W = \frac{1 - 0,75e^2 \sin^2 B}{1 - 0,25e^2 \sin^2 B}, \quad (5.22)$$

$$V = \frac{1 + 0,75e'^2 \cos^2 B}{1 + 0,25e'^2 \cos^2 B}. \quad (5.23)$$

$$W^3 = \frac{1 - 1,25e^2 \sin^2 B}{1 + 0,25e^2 \sin^2 B}, \quad (5.24)$$

$$V^3 = \frac{1 + 1,25e'^2 \cos^2 B}{1 - 0,25e'^2 \cos^2 B}. \quad (5.25)$$

Тогда формулы (5.18) и (5.19) примут вид

$$M = a(1 - e^2) \frac{1 + 0,25e^2 \sin^2 B}{1 - 1,25e^2 \sin^2 B} = c \frac{1 - 0,25e'^2 \cos^2 B}{1 + 1,25e'^2 \cos^2 B}, \quad (5.26)$$

$$N = a \frac{1 - 0,25e^2 \sin^2 B}{1 - 0,75e^2 \sin^2 B} = c \frac{1 + 0,25e'^2 \cos^2 B}{1 + 0,75e'^2 \cos^2 B}. \quad (5.27)$$

Можно доказать, что абсолютная погрешность приближения (5.16) равна модулю разности между соседними подходящими дробями того же типа и может быть вычислена по формуле

$$\Delta_2(y) < \frac{1}{4} \left| \frac{y^3}{(2+y)(4+y)} \right|, \quad (5.28)$$

где символ  $\Delta_2$  указывает, что погрешность соответствует двум звеньям цепной дроби, т. е. формуле (5.16).

Приняв в выражениях (5.20) и (5.21) величину квадрата эксцентриситета  $e^2$  (или  $e'^2$ ) равной 0,0067, для любого значения широты  $B$  получим:

$$\Delta_2(y) < \frac{1}{4} \cdot \frac{0,007^3}{2,007 \cdot 4,007} < 0,9 \cdot 10^{-8}.$$

Таким образом, формулы (5.22)–(5.27) обеспечивают вычисление величин  $W$ ,  $V$ ,  $M$  и  $N$  с достаточной точностью, т. е. до  $1 \cdot 10^{-8}$ .

Заметим, что полученные формулы (5.26) и (5.27) для  $M$  и  $N$  более удобны и просты для вычислений на счетных машинах, нежели формулы (5.14).

## § 6. Средний радиус кривизны

Средним радиусом кривизны в данной точке поверхности называется предел, к которому стремится среднее арифметическое из радиусов кривизны нормальных сечений, когда число их стремится к бесконечности.

Пусть на рис. 13 меридиональное сечение в данной точке  $M$  изображено линией  $PMP_1$ , а сечение первого вертикала —  $WMO$ . Эти два сечения являются главными нормальными сечениями, имеющими соответственно максимальную и минимальную кривизну.

Пусть кривая  $MA$  изображает произвольное нормальное сечение в точке  $M$  поверхности эллипсоида, заданное азимутом  $A$ , т. е. сечение расположено под углом  $A$  к меридиональному сечению.

На основании формулы Эйлера, устанавливающей зависимость между радиусом кривизны  $\rho_A$  произвольного нормального сечения и радиусами кривизны главных нормальных сечений, имеем

$$\frac{1}{\rho_A} = -\frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N},$$

откуда

$$\rho_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}. \quad (6.1)$$

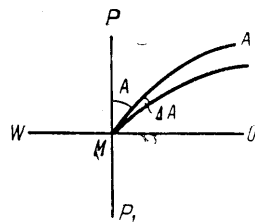


Рис. 13

Вообразим, что  $A$  принимает последовательно значения:  $0, \Delta A, 2\Delta A, 3\Delta A, \dots, 2\pi - 2\Delta A, 2\pi - \Delta A$ , причем  $\Delta A$  — малая величина. Число таких значений  $A$  будет равно  $\frac{2\pi}{\Delta A}$ . Вычислим среднее арифметическое из радиусов кривизны всех этих нормальных сечений, проведенных из точки  $M$  через интервалы величиной  $\Delta A$ , и обозначим его через  $R_1$ .

Будем иметь

$$R_1 = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}} = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN \Delta A}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{2\pi}.$$

Таким образом, согласно определению среднего радиуса кривизны  $R$ , получим

$$R = \lim R_1 \text{ при } \Delta A \rightarrow 0.$$

Очевидно, в этом случае знак  $\Sigma$  в выражении для  $R_1$  должен быть заменен знаком интеграла, а  $\Delta A$  — через  $dA$ .

Будем иметь

$$R = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA.$$

Разделим в подынтегральной функции числитель и знаменатель на  $N \cos^2 A$ , тогда

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1 + \frac{M}{N} \tan^2 A} dA.$$

Вынесем за знак интеграла  $\sqrt{MN}$

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \left( \sqrt{\frac{M}{N}} \tan A \right)^2}.$$

Обозначив  $\sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A$  через  $t$ , получим

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left[ \operatorname{arctg} t \right]_0^{\infty}.$$

Подставляя пределы, получаем

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \frac{\pi}{2}$$

и окончательно

$$R = \sqrt{MN}, \quad (6.2)$$

или

$$R = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B}. \quad (6.3)$$

Таким образом, из (6.2) следует, что средний радиус кривизны для точек эллипсоида вращения равен среднему геометрическому из радиусов кривизны главных нормальных сечений — меридиана и первого вертикала, проведенных из той же точки.

Выражение для  $R$  может быть написано в функции величин  $W$  и  $V$  так:

$$R = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2} \quad (6.4)$$

и

$$R^2 = MN = \frac{c^2}{V^4} = \frac{N^2}{V^2}. \quad (6.5)$$

Средний радиус кривизны применяется при изображении частей поверхности эллипсоида на шаре, при вычислении сферических избытков треугольников и в других случаях.

В таблицах, составленных ЦНИИГАиК и Центральной вычислительной частью для эллипсоида Красовского, даются через интервалы по широте в  $1'$  логарифмы величины (1), (2),  $R$ , а также значение функции  $V$ .

Для вычисления радиуса кривизны нормального сечения, имеющего азимут  $A$ , можно воспользоваться, конечно, формулой (6.1). Для практических вычислений, путем несложных преобразований, ее удобнее представить в другом виде, т. е.

$$\rho_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}, \quad (6.6)$$

где  $\eta = e' \cos B$ .

Для менее точных вычислений, с ошибкой на члены  $e^4$ , формула (6.1) может быть преобразована

$$\rho_A = R \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 B \cos 2A \right). \quad (6.7)$$

Формула (6.7) используется, например, при вычислении поправки за приведение измеренной длины базиса к поверхности референц-эллипсоида.

## § 7. Вычисление длины дуги меридиана

Пусть точка  $A$  (рис. 14) на меридианном эллипсе имеет широту  $B$ . Возьмем на бесконечно малом расстоянии  $ds$  от точки  $A$  точку  $A_1$ , имеющую широту  $B + dB$ ; таким образом, разность широт точек  $A$  и  $A_1$ , соответствующая дуге меридиана  $ds$  будет  $dB$ . Рассматривая элементарную дугу  $ds$  как дугу окружности с радиусом  $M$ , получаем

$$ds = M dB,$$

или

$$ds = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB = \frac{a(1-e^2)}{W^3} dB.$$

Длина дуги меридиана между точками, имеющими широты  $B_1$  и  $B_2$ , получится

$$s = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB = a(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{W^3}. \quad (7.1)$$

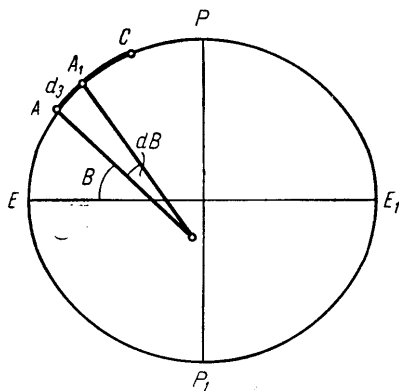


Рис. 14

Таким образом, вычисление длины дуги меридиана сводится к нахождению эллиптического интеграла вида

$$\int \frac{dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} = \int \frac{dB}{W^3},$$

который, как известно, в элементарных функциях не берется. Для вычисления указанного интеграла разложим подынтегральную функцию  $\frac{1}{W^3}$  в ряд по биному Ньютона. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^3} &= (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B + \\ &+ \frac{35}{16} e^6 \sin^6 B + \frac{315}{128} e^8 \sin^8 B + \frac{693}{256} e^{10} \sin^{10} B + \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для простоты дальнейших выкладок ограничимся членами с  $e^4$ . Четные степени синусов, входящих в разложение функции  $\frac{1}{W^3}$  в ряд, заменим косинусами кратных дуг согласно равенствам:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B,$$

$$\sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B.$$

Теперь формула (7.2) примет вид

$$\frac{1}{W^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B \right) + \frac{15}{8} e^4 \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B \right) + \dots,$$

$$\frac{1}{W^3} = 1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2B + \frac{45}{64} e^4 - \frac{15}{16} e^4 \cos 2B + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B + \dots$$



или

$$\frac{1}{W^3} = + \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \dots \right) - \left( \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \dots \right) \cos 2B + \\ + \left( \frac{15}{64} e^4 + \dots \right) \cos 4B \dots \quad (7.3)$$

Обозначая:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \dots \\ B &= \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \dots \\ C &= \frac{15}{64} e^4 + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (7.4)$$

получаем

$$\frac{1}{W^3} = A - B \cos 2B + C \cos 4B - \dots \quad (7.5)$$

Подставляя найденное значение  $\frac{1}{W^3}$  в (7.1), получаем

$$s = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} (A - B \cos 2B + C \cos 4B - \dots) dB. \quad (7.6)$$

Интегрируя почленно, находим

$$s = a(1 - e^2) \left\{ A(B_2 - B_1) - \frac{B}{2} (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \frac{C}{4} (\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \dots \right\}. \quad (7.7)$$

Полученная формула является общей для дуги меридиана. Рассмотрим основные преобразования формулы (7.7) в зависимости от цели ее применения.

1. При вычислении геодезических таблиц, например для вычисления таблиц координат Гаусса — Крюгера, возникает необходимость вычислять длины дуг меридианов от экватора до точек дуги, расположенных через определенные интервалы широты. В этом случае начальная широта  $B_1 = 0$ . Переменной величиной при вычислении будет широта  $B_2 = B$ , поэтому формула (7.7) может быть оставлена без перегруппировки членов. Таким образом, получим

$$s_0^B = a(1 - e^2) \left\{ A \frac{B''}{\rho''} - \frac{B}{2} \sin 2B + \frac{C}{4} \sin 4B - \dots \right\}. \quad (7.8)$$

Особенность этого случая в том, что широта  $B$  может изменяться от 0 до  $90^\circ$ ; длина дуги при этом может быть значительной, и вычисления следует вести, как правило, с большим числом членов.

После подстановки числовых значений элементов эллипсоида Красовского выражение (7.8) напишется

$$S_0^B = 6\,367\,558,4969B - 16\,036,4803 \sin 2B + 16,8281 \sin 4B - \\ - 0,0220 \sin 6B + \dots \quad (7.8')$$

2. При обработке градусных измерений с целью вывода размеров земного эллипсоида формула (7.7) становится неудобной. В этом случае широты концов

измеренных меридианных дуг, участвующих в обработке градусных измерений, могут считаться постоянными; в отличие от предыдущего случая размеры эллипсоида (или поправки к некоторым приближенным их значениям) подлежат определению. Поэтому нужно расположить члены ряда, выражающего дугу меридиана, так, чтобы около определяемых величин  $a$ ,  $e^2$ ,  $e^4$  и т. д. сгруппировать постоянные члены.

Преобразуем формулу (7.7), учитывая изложенные соображения и заменяя разности синусов через произведения синусов и косинусов соответствующих углов.

Для уменьшения алгебраических преобразований ограничимся только членами с  $e^2$ .

Из (7.7) и (7.4) будем иметь с оговоренной точностью

$$s = a(1 - e^2) \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 \right) (B_2 - B_1) - \frac{3}{4} e^2 \sin(B_2 - B_1) \cos(B_2 + B_1) \right\}.$$

Примем

$$\sin(B_2 - B_1) = (B_2 - B_1) - \frac{(B_2 - B_1)^3}{6}$$

и введем среднюю широту  $B_m$  по формуле

$$\frac{B_2 + B_1}{2} = B_m.$$

Получим

$$s = a(1 - e^2) \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 \right) (B_2 - B_1) - \frac{3}{4} e^2 \left[ (B_2 - B_1) - \frac{(B_2 - B_1)^3}{6} \right] \cos 2B_m \right\}$$

и

$$s = a(1 - e^2)(B_2 - B_1) \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2B_m + \frac{1}{8} e^2 (B_2 - B_1)^2 \cos 2B_m \right\}, \quad (7.9)$$

или

$$s = \frac{a(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 + \frac{1}{8} e^2 \frac{(B_2 - B_1)^{n2}}{\rho^{n2}} \cos 2B_m \right\}. \quad (7.10)$$

Пренебрегая членом порядка  $e^2(B_2 - B_1)$ , получаем с принятой точностью

$$s = \frac{a(B_2 - B_1)}{\rho^n} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 \right\}. \quad (7.11)$$

3. Для вычислений в триангуляции, когда стороны незначительны и редко превосходят 40—50 км, дадим более простую и удобную формулу. Для этого обозначим

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} \quad \text{и} \quad M_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_m)^{3/2}}.$$

Введем вспомогательную величину

$$s_1 = M_m \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} \frac{1}{W_m^3},$$

которая, очевидно, представляет собой длину дуги окружности с радиусом, равным радиусу кривизны меридиана в точке со средней широтой. На основании (7.5) напишем

$$s_1 = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} (A - B \cos 2B_m + C \cos 4B_m).$$

Подставим значения коэффициентов  $A, B, C$

$$s_1 = a(1 - e^2) \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} \left\{ \left( 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 \right) - \left( \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) \cos 2B_m + \frac{15}{64} e^4 \cos 4B_m \right\}. \quad (7.12)$$

Сравнивая (7.12) с (7.10), получаем

$$s = s_1 + \frac{a(1 - e^2)}{8} e^2 \cos 2B_m (B_2 - B_1)^3.$$

Полагая в поправочном члене последней формулы  $a(1 - e^2) = M_m$ , т. е. пренебрегая членами порядка  $\frac{3}{16} e^4 (B_2 - B_1)^2 s$ , получаем

$$s = M_m \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} + \frac{M_m}{8} e^2 \cos 2B_m \frac{(B_2 - B_1)^{n+3}}{\rho^{n+3}}.$$

Окончательная формула для вычислений в триангуляции имеет вид

$$s = M_m \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} \left[ 1 + \frac{1}{8} e^2 \frac{(B_2 - B_1)^{n+2}}{\rho^{n+2}} \cos 2B_m \right]. \quad (7.13)$$

Формула (7.13) пригодна для расстояний порядка 400 км (при  $s = 400$  км допущенная выше погрешность порядка  $\frac{3}{16} e^4 (B_2 - B_1)^2 s$  даст ошибку в значении  $s$ , равную приблизительно 1 мм).

При  $s \leq 45$  км значение поправочного члена будет меньше 1 мм, поэтому поправочный член в (7.13) можно отбросить и вычисления вести по формуле

$$s = M_m \frac{(B_2 - B_1)^n}{\rho^n} = \frac{(B_2 - B_1)^n}{(1)_m}. \quad (7.14)$$

Следовательно, при длине дуги, меньшей 45 км, можно рассматривать ее как сферическую с центральным углом, равным разности широт конечных точек, и описанную радиусом меридионального сечения, соответствующим средней широте дуги.

Коэффициенты  $A, B, C$ , введенные ранее при выводе формул для дуги меридиана, для эллипсоида Красовского имеют следующие значения:

$$A = 1,005\,051\,7739,$$

$$B = 0,005\,062\,37764,$$

$$C = 0,000\,010\,62451,$$

$$D = 0,000\,000\,02081.$$

В табл. 2 приведены для справок длины дуг меридиана на эллипсоиде Красовского для некоторых широт с точностью до 0,1 м.

После элементарных преобразований формула (7.13) приводится к логарифмическому виду. Удержанное число членов обеспечивает вычисление дуг до 400 км длиной

$$\lg s = \lg \frac{(B_2 - B_1)^n}{(1)_m} + k(B_2 - B_1)^{n+2} \cos 2B_m. \quad (7.15)$$

где

$$\lg k = \lg \frac{1}{8} \frac{\mu 10^8}{\rho''^2} e^2 = 3,9315_{-10}.$$

Т а б л и ц а 2

$B^\circ$	Длина дуги меридиана в м		
	в один градус	в одну минуту	в одну секунду
0	110 576,3	1842,9	30,7
30	110 854,4	1847,6	30,8
60	111 414,1	1856,9	30,9
90	111 695,8	1861,6	31,0

На основании формулы (7.14) можно решить обратную задачу: определить разность широт конечных точек дуги по длине дуги и средней широте ее

$$(B_2 - B_1)'' = \frac{s}{M_m} \rho'' = s (1)_m. \quad (7.16)$$

Практически нередко приходится решать следующую задачу.

Даны широта первой точки  $B_1$ , расстояние по дуге меридиана до второй точки  $s$ ; требуется определить широту второй точки  $B_2$ . Имеем

$$B_2 = B_1 + (B_2 - B_1).$$

Для определения  $(B_2 - B_1)$  воспользуемся формулой (7.16); однако сразу по этой формуле искомая разность  $(B_2 - B_1)$  не может быть вычислена, так как неизвестна средняя широта  $B_m$ , по которой должен быть рассчитан радиус  $M_m$  или взята из таблиц величина  $(1)_m$ . Рассмотрим решение задачи с применением метода последовательных приближений.

В первом приближении вычисляют  $(B_2 - B_1)$ , используя для определения (1) широту первой точки, получают приближенное значение  $(B_2 - B_1)_1$ , т. е.

$$(B_2 - B_1)_1 = s (1)_1;$$

далее

$$(B_2)_1 = B_1 + (B_2 - B_1)_1.$$

С этим значением широты второй точки вычисляют приближенно среднюю широту  $(B_m)_1 = \frac{B_1 + (B_2)_1}{2}$ ; используя найденную приближенную среднюю широту  $(B_m)_1$ , находят разность широт  $(B_2 - B_1)_2$  и среднюю широту  $(B_m)_2$  во втором приближении. Аналогично производят вычисления в третьем приближении, четвертом и т. д. до тех пор, пока два смежных приближения не дадут одинаковые результаты в пределах заданной точности, которые и будут окончательными.

Выше было дано общепринятое решение по выводу формулы длины дуги меридиана, основанное на разложении подынтегральной функции (7.1) в ряд по биному Ньютона и последующем почленном интегрировании.

Дадим несколько иное и также, конечно, приближенное решение исходного интеграла

$$s = \int_{B_1}^{B_2} M dB. \quad (7.17)$$

Применим к выражению (7.17) наиболее простую и достаточно точную формулу Симпсона (формулу парабол), разделив при этом интервал интегрирования на две части; тогда можно записать:

$$s = \frac{\Delta B}{6} (M_1 + 4M_m + M_2). \quad (7.18)$$

В формуле (7.18) радиус кривизны  $M$  определяется в трех точках искомой дуги меридиана — в начальной, конечной и средней, соответственно по широтам  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_m = 1/2 (B_1 + B_2)$ .

В окончательном виде формула (7.18) переписывается

$$s = k \sum \Delta B'', \quad (7.19)$$

где

$$k = \frac{1}{6\rho''} = 8\,080\,228 \cdot 10^{-13},$$

$$\sum = M_1 + 4M_m + M_2,$$

$$\Delta B'' = (B_2 - B_1)'.$$

Формула (7.19) при расстояниях  $s$  до 1000 км обеспечивает вычисление длины дуги меридиана с ошибкой порядка 1—2 см.

Для контроля вычислений дугу меридиана  $s$  следует получить как разность длин дуг  $X_2$  и  $X_1$  меридиана от экватора до точек с широтами  $B_2$  и  $B_1$ , т. е.

$$s = X_2 - X_1.$$

Значения величин  $X_2$  и  $X_1$  выбирают из «Таблиц для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30° до 80°».

Пример. Вычисление длины дуги меридиана по формуле (7.19) между точками, широты которых  $B_2 = 49^\circ 29' 58,938''$  и  $B_1 = 45^\circ 30' 17,221''$ ,

$B_2$	49° 29' 58,938"
$B_1$	45 30 17,221
$B_m$	47 30 08,080
$\Delta B$	3 59 41,717
$M_1$	6 368 056,324
$M_2$	6 372 511,409
$M_m$	6 370 290,021
$k$	8 080 228 · 10 <sup>-13</sup>
$\sum$	38 221 727,817
$k \cdot \sum$	30,884 0275
$\Delta B''$	14 381,717
$s$	444 165,343 м.

Контроль по таблицам:

по широте  $B_2$  . . . . .  $X_2 = 5\,485\,298,588$  м.  
 по широте  $B_1$  . . . . .  $X_1 = 5\,041\,133,243$  м.

---


$$s = 444\,165,345 \text{ м.}$$

## § 8. Вычисление длины дуги параллели

Параллель на эллипсоиде вращения является окружностью, поэтому вычисление дуги параллели сводится к определению дуги окружности с центральным углом, равным разности долгот конечных точек дуги. Радиус параллели  $r$  определяется по формуле (4.9), которая имеет вид

$$r = N \cos B = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a \cos B}{W}. \quad (8.1)$$

Длина дуги параллели  $s'$ , имеющей широту  $B$  и разность долгот конечных точек дуги  $l$ , очевидно, дается формулой

$$s' = N \cos B \frac{l''}{\rho''} = \frac{l'' \cos B}{(2)}. \quad (8.2)$$

Отсюда легко получаем разность долгот двух точек параллели под широтой  $B$ , расположенных на расстоянии  $s'$ ,

$$l'' = (2) s' \sec B. \quad (8.3)$$

В табл. 3 приведены для справок длины дуг параллелей для широт от  $30^\circ$  до  $70^\circ$  на эллипсоиде Красовского.

Таблица 3

$B^\circ$	Длина дуги параллели в м		
	в один градус	в одну минуту	в одну секунду
30	96 489,9	1608,1	26,8
40	85 395,3	1423,3	23,7
50	71 696,9	1194,9	19,9
60	55 800,9	930,0	15,5
70	38 187,2	636,5	10,6

**Пример.** Вычислить длину дуги параллели между точками, лежащими на этой параллели, если даны разность долгот этих точек и широта параллели \*:  $l = 0^\circ 45' 46,882''$ ,  $B = 54^\circ 32' 19,354''$ .

Решение проверить по контрольной формуле  $s_p = b_1 l''$ , используя «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от  $30^\circ$  до  $80^\circ$ ».

Схема решения:

$l$	$0^\circ 45' 46,882''$
$B$	$54^\circ 32' 19,354''$
$N$	$66^\circ 392' 453,854''$
$\cos B$	0.5801 5280
$l''$	2746,882
$1/\rho''$	$484,8137 \cdot 10^{-12}$
$N \cos B$	3 708 600,002
$l''/\rho''$	0.0133 1726
$s_p$	49 388,390 м.

\* Пример взят из [10, стр. 18—19].

Контроль по таблицам:

Для  $B = 54^\circ 32' 19,354''$

$b' = 179\,798,002$

$s_p = b_1 \cdot l'' = 17,979\,8002 \cdot 2\,746,882$

$s_p^{\text{контр}} = 49\,388,389 \text{ м.}$

Расхождение  $s_p^{\text{выч}} - s_p^{\text{контр}} = +1 \text{ мм.}$

## § 9. Вычисление площадей съемочных трапеций

Вычисление площади съемочной трапеции или листа карты сводится к определению части поверхности эллипсоида, ограниченной линиями меридианов и параллелей.

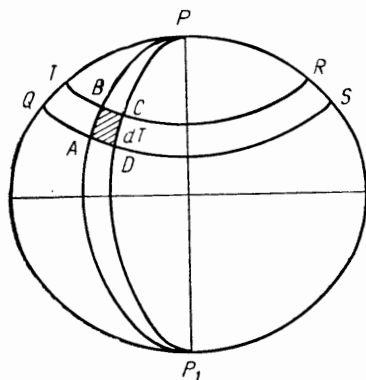


Рис. 15

Возьмем на эллипсоиде (рис. 15) бесконечно малую трапецию  $ABCD$ . Стороны этой трапеции, как элементы дуг меридианов и параллелей, будут равны:

$$AB = CD = M dB,$$

$$AD = BC = N \cos B dl.$$

Площадь элементарной трапеции  $ABCD$ , обозначенной через  $dT$ , выразится формулой

$$dT = MN \cos B dB dl. \quad (9.1)$$

Площадь  $dz$  всего пояса, ограниченного параллелями, получится, если в формуле для  $dT$  величину  $dl$  заменить через  $2\pi$ , т. е.

$$dz = 2\pi MN \cos B dB = 2\pi R^2 \cos B dB,$$

или

$$dz = 2\pi b^2 \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}. \quad (9.2)$$

Площадь поверхности пояса эллипсоида, расположенного между параллелями с широтами  $B_1$  и  $B_2$ , будет

$$z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}. \quad (9.3)$$

Для вычисления интеграла (9.3) разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд\*.

$$\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = \cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + \dots \quad (9.4)$$

\* Интеграл (9.3) берется в конечном виде. Положив  $e \sin B = \sin \Theta$ , будем иметь  $e \cos B dB = \cos \Theta d\Theta$ . После подстановки (9.3) примет вид  $z = 2\pi b^2 \int \frac{d\Theta}{\cos \Theta}$ . Как известно, это табличный интеграл и берется в элементарных функциях. Однако получаемое при этом выражение для площади мало пригодно для вычислений.

Следовательно,

$$z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} (\cos B + 2e^2 \sin^2 B \cos B + 3e^4 \sin^4 B \cos B + \dots) dB,$$

$$z = 2\pi b^2 \int_{B_1}^{B_2} \left( \sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \dots \right). \quad (9.5)$$

Для приведения этой формулы к виду, удобному для практического применения, воспользуемся формулами, дающими выражения синусов нечетных степеней в функции синусов нечетных дуг\*.

$$\left. \begin{aligned} \sin^3 B &= \frac{3}{4} \sin B - \frac{1}{4} \sin 3B \\ \sin^5 B &= \frac{5}{8} \sin B - \frac{5}{16} \sin 3B + \frac{1}{16} \sin 5B \end{aligned} \right\}. \quad (9.6)$$

Заменяя в формуле (9.5) синусы нечетных степеней согласно выражениям (9.6) и подставляя пределы интегрирования, получаем

$$z = 2\pi b^2 \left\{ (\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{2}{3} e^2 \left[ \frac{3}{4} (\sin B_2 - \sin B_1) - \frac{1}{4} (\sin 3B_2 - \sin 3B_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{5} e^4 \left[ \frac{5}{8} (\sin B_2 - \sin B_1) - \frac{5}{16} (\sin 3B_2 - \sin 3B_1) + \frac{1}{16} (\sin 5B_2 - \sin 5B_1) \right] + \dots \right\},$$

$$z = 2\pi b^2 \left\{ (\sin B_2 - \sin B_1) \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right) - (\sin 3B_2 - \sin 3B_1) \left( \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 \right) + \right.$$

$$\left. + (\sin 5B_2 - \sin 5B_1) \frac{3}{80} e^4 - \dots \right\}. \quad (9.7)$$

Заменяя разности синусов по известным формулам тригонометрии, получаем

$$z = 4\pi b^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right) \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m - \left( \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 \right) \sin \frac{3}{2} \times \right.$$

$$\left. \times (B_2 - B_1) \cos 3B_m + \frac{3}{80} e^4 \sin \frac{5}{2} (B_2 - B_1) \cos 5B_m \right\} + \dots,$$

где

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

При разложении выражения (9.4) в ряд члены с  $e^6$ ,  $e^8$  и т. д. не были приняты во внимание. Более точная формула для площади пояса с учетом членов с  $e^6$  и  $e^8$  будет иметь вид

$$z = 4\pi b^2 \left\{ A^* \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m - B^* \sin \frac{3}{2} (B_2 - B_1) \cos 3B_m + C^* \sin \frac{5}{2} \times \right.$$

$$\left. \times (B_2 - B_1) \cos 5B_m - D^* \sin \frac{7}{2} (B_2 - B_1) \cos 7B_m + E^* \sin \frac{9}{2} (B_2 - B_1) \cos 9B_m \right\}. \quad (9.8)$$

\* Эти формулы получаются на основе общей формулы

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \frac{(2n+1) 2n \dots (n+2)}{1.2.3 \dots n} \sin x - \frac{(2n+1) 2n \dots (n+3)}{1.2.3 (n-1)} \sin 3x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1) 2n \dots (n+4)}{1.2.3 \dots (n-2)} \sin 5x - \frac{(2n+1) 2n \dots (n+5)}{1.2.3 \dots (n-3)} \sin 7x + \dots \right\}.$$



где

$$\left. \begin{aligned} A' &= 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 \\ B' &= \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 \\ C' &= \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 \\ D' &= + \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 \\ E' &= + \frac{5}{2304} e^8 \end{aligned} \right\}. \quad (9.9)$$

Формула (9.8) выражает площадь пояса эллипсоида, ограниченного параллелями с широтами  $B_1$  и  $B_2$ . Чтобы получить формулы для вычисления площадей трапеций данного масштаба и номенклатуры, берут разность широт северной и южной рамок трапеций  $B_2 - B_1$  и разность долгот западной и восточной рамок  $\Delta l$ .

Например, для государственной карты масштаба  $1 : 1\,000\,000$   $B_2 - B_1 = 4^\circ$ , разность долгот восточной и западной рамок карты  $\Delta l = 6^\circ$ , т. е. равна  $1 : 60$  полной окружности пояса. Поэтому рабочая формула для вычисления площадей трапеций масштаба  $1 : 1\,000\,000$  будет

$$P = \frac{\pi b^2}{15} \{A' \sin 2^\circ \cos B_m - B' \sin 6^\circ \cos 3B_m + C' \sin 10^\circ \cos 5B_m - D' \sin 14^\circ \cos 7B_m + E' \sin 18^\circ \cos 9B_m\}. \quad (9.10)$$

Положив в формуле (9.7)  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 90^\circ$  и удвоив полученное выражение, получим формулу для вычисления площади  $\Sigma$  — всей поверхности эллипсоида

$$\Sigma = 4\pi b^2 \left\{1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \frac{6}{11} e^{10} + \dots\right\}. \quad (9.11)$$

Площадь поверхности эллипсоида Красовского, вычисленная по формуле (9.11), будет равна  $510\,083\,035 \text{ км}^2$ .

Радиус шара  $R_3^{\text{пл}}$ , площадь которого равна площади эллипсоида Красовского, равен  $6\,371\,116 \text{ м}$ , а радиус шара, равновеликого по объему эллипсоиду Красовского, равен  $6\,371\,110 \text{ м}$ .

Следовательно, при приближенных вычислениях, когда Землю возможно принимать за шар, его радиус следует брать равным  $6371 \text{ км}$ .

## § 10. Расчет рамок съемочных трапеций

Полученные в предыдущих параграфах формулы позволяют легко вывести выражения для размеров рамок съемочных трапеций.

Пусть рис. 16 изображает съемочную трапецию масштаба  $\frac{1}{n}$ ; широта южной параллели  $B_1$ , северной —  $B_2$ ; разность долгот западного и восточного граничных меридианов трапеции  $\Delta l$ . Очевидно, западные и восточные рамки трапеции равны и представляют собой дуги меридианов между параллелями с широтами  $B_1$  и  $B_2$ . Поэтому

$$AB = CD = c = \frac{\Delta B''}{(1)_m}, \quad (10.1)$$

где

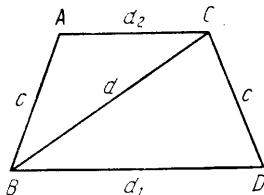
$$\Delta B = B_2 - B_1.$$

Северная и южная рамки являются дугами параллелей, имеющих соответственно широты  $B_2$  и  $B_1$ , поэтому

$$\left. \begin{aligned} BD = a_1 &= \frac{\Delta l'' \cos B_1}{(2)_1} \\ AC = a_2 &= \frac{\Delta l'' \cos B_2}{(2)_2} \end{aligned} \right\}. \quad (10.2)$$

Для получения размеров рамок в заданном масштабе необходимо найденные величины разделить на знаменатель масштаба, а для получения размеров

Рис. 16



сторон трапеции в сантиметрах умножить на 100. Поэтому окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} AB = CD &= \frac{100 \Delta B''}{n (1)_m} \\ BD &= \frac{100 \Delta l'' \cos B_1}{n (2)_1} \\ AC &= \frac{100 \Delta l'' \cos B_2}{n (2)_2} \end{aligned} \right\}. \quad (10.3)$$

Вычисление длин рамок по полученным формулам не представляет затруднений и ведется применительно к схемам примеров 1 и 3 § 7 и § 8.

# КРИВЫЕ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

## § 11. Взаимные нормальные сечения

Возьмем на поверхности эллипсоида вращения две точки  $A$  и  $B$  (рис. 17) с широтами  $B_1$  и  $B_2$ ; пусть  $B_2 > B_1$ . Проведем нормали к поверхности эллипсоида в точках  $A$  и  $B$ . Обе эти нормали лежат в плоскостях меридианных эллипсов, проходящих через точку  $A$  и точку  $B$  соответственно и пересекаются с малой осью  $PP_1$  в точках  $n_a$  и  $n_b$ . Докажем, что нормали к поверхности эллипсоида, проведенные из двух точек с разными широтами, пересекаются с его малой осью в разных точках. Опустим из  $A$  перпендикуляр  $AA_1$  на малую полуось  $OP$ . Тогда, согласно (4.8), будем иметь

$$\overline{OA_1} = y_a = \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}.$$

Согласно (5.11),  $An_a$  — радиус кривизны  $N_1$  первого вертикала в точке  $A$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}},$$

поэтому

$$A_1n_a = N_1 \sin B_1 = \frac{a \sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}. \quad (11.1)$$

Расстояние от центра эллипсоида до пересечения нормали с малой полуосью выразится так:

$$On_a = A_1n_a - A_1O = \frac{a \sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} - \frac{a(1-e^2)\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}},$$

или

$$On_a = \frac{ae^2 \sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}. \quad (11.2)$$

Аналогично для точки  $B$  будем иметь

$$On_b = \frac{ae^2 \sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}. \quad (11.3)$$

Так как по условию  $B_2 > B_1$ , то, сопоставляя (11.2) и (11.3), заключаем, что

$$On_b > On_a,$$

т. е. нормаль к поверхности эллипсоида, проведенная в точке  $A$ , имеющей меньшую широту, чем точка  $B$ , пересекает малую ось ближе к центру эллипсоида, чем нормаль, проведенная в точке  $B$ .

Таким образом, эти нормали представляют собой две перекрещивающиеся в пространстве, но не пересекающиеся прямые (если  $A$  и  $B$  не лежат на одном меридиане).

Проведем плоскость через точки  $A$ ,  $n_a$  и  $B$ ; очевидно, эта плоскость, в которой лежит нормаль  $An_a$ , будет нормальной плоскостью в  $A$ , проходящей через точку  $B$ . В пересечении с поверхностью эллипсоида она даст кривую  $AaB$ , которая называется прямым нормальным сечением в точке  $A$  на точку  $B$ . Если проведем плоскость через точки  $B$ ,  $n_b$  и  $A$ , то получим плоскость нормального сечения из точки  $B$  на точку  $A$ ; эта плоскость пересечется

с плоскостью нормального сечения из точки  $A$  на  $B$  по хорде  $AB$ , но на поверхности эллипсоида даст другую кривую  $BbA$ , не совпадающую с кривой  $AaB$ . Таким образом, нормальное сечение  $AaB$  из точки  $A$  на точку  $B$  не совпадает на поверхности эллипсоида с нормальным сечением  $BbA$  из точки  $B$  на точку  $A$ . Эти две кривые  $AaB$  и  $BbA$  называются взаимно обратными нормальными сечениями. Следовательно, между двумя точками на эллипсоиде  $A$  и  $B$  проходят два нормальных сечения:  $AaB$ , которое называется прямым нормальным сечением для точки  $A$  и обратным нормальным сечением для точки  $B$ , и  $BbA$ , которое будет прямым нормальным сечением для точки  $B$  и обратным для точки  $A$ .

Представим себе, что в точке  $A$  установлен выверенный теодолит таким образом, что его вертикальная ось совпадает с нормалью  $An_a$ ; тогда

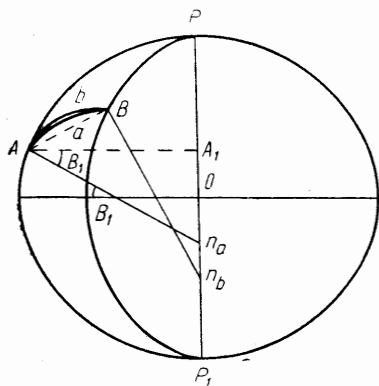


Рис. 17

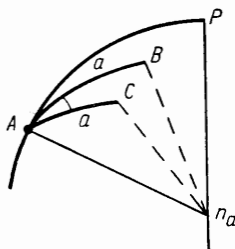


Рис. 18

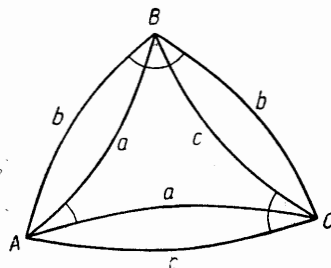


Рис. 19

при наведении на точку  $B$  визирная плоскость совпадет с плоскостью, проходящей через точки  $A$ ,  $n_a$ ,  $B$ , или с плоскостью прямого нормального сечения из  $A$  на  $B$ , и ее пересечение с поверхностью эллипсоида даст кривую  $AaB$ . При наблюдении из точки  $B$  на точку  $A$  визирная плоскость теодолита пересечет поверхность эллипсоида по кривой  $BbA$ , не совпадающей, как было установлено выше, с кривой  $AaB$ .

Пусть из точки  $A$  при помощи теодолита наблюдают, кроме точки  $B$ , еще точку  $C$  (рис. 18); в этом случае визирная плоскость инструмента пересечет поверхность эллипсоида по некоторой кривой  $AaC$ , которая будет прямым нормальным сечением из точки  $A$  на точку  $C$ . Измеренный горизонтальный угол в точке  $A$  между направлениями на  $B$  и  $C$  будет мерой двугранного угла  $BACn_a$  между нормальными плоскостями в  $A$ , проходящими через точки  $B$  и  $C$ . На поверхности эллипсоида этому углу соответствует угол между прямыми нормальными сечениями из точки  $A$  на точки  $B$  и  $C$ . Следовательно, измеряемые в триангуляции углы треугольников на поверхности эллипсоида являются углами между прямыми нормальными сечениями в данной точке.

Пусть на рис. 19 изображены пункты триангуляции  $A$ ,  $B$  и  $C$ , между которыми проведены прямые и обратные нормальные сечения. Измеренные горизонтальные углы на пунктах  $A$ ,  $B$  и  $C$  будут равны углам между касательными в соответствующих вершинах к кривым:

в точке $A$	к кривым $AaC$ и $AaB$ ,
» » $B$ » »	$BbA$ » $BbC$ ,
» » $C$ » »	$CcB$ » $CcA$ .

Нетрудно видеть, что несовпадение прямых и обратных нормальных сечений, или, как говорят, двойственность нормальных сечений, приводит к тому, что измеренные горизонтальные углы на трех пунктах не образуют на поверхности эллипсоида замкнутого треугольника; фигура получается «разорванной». Эту неопределенность в образовании треугольников можно устранить, если их вершины соединить геодезическими линиями.

## § 12. Геодезическая линия

Между двумя точками на любой поверхности можно провести множество кривых.

В геодезии решение задач по определению взаимного положения точек земной поверхности основано на построении на ней определенных фигур (обычно треугольников) и вычислении числовых значений элементов этих фигур. Поэтому следует решить, какими кривыми соединять точки поверхности земного эллипсоида при вычислении элементов геодезических построений.

В сфероидической геодезии точки на поверхности эллипсоида соединяются геодезическими линиями, которые определяются как кратчайшие расстояния на данной поверхности между заданными точками. Следовательно, геодезическая линия на данной поверхности играет роль прямой линии на плоскости или дуги большого круга на сфере. Введением геодезической линии устраняется неопределенность в построении геометрических фигур на поверхности земного эллипсоида и достигается однозначность решения задачи.

Из определения геодезической линии, как кратчайшей кривой между двумя точками на земной поверхности, следует и иное ее определение: геодезическая линия на поверхности — такая кривая, в каждой точке которой соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в той же точке.

Докажем это свойство геодезической линии. Возьмем на поверхности эллипсоида три близкие точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ , через которые проведем плоскость. Как известно из дифференциальной геометрии, предельное положение плоскости при  $M \rightarrow N$  и  $K \rightarrow N$  носит название соприкасающейся плоскости; касательная в точке  $N$  лежит в соприкасающейся плоскости; главная нормаль в точке  $N$  совпадает с нормалью к поверхности.

Проведем через точку  $N$  различные кривые, имеющие общую касательную  $NT$ ; согласно теореме Менье, наибольший радиус в точке  $N$  будет иметь та кривая, в соприкасающейся плоскости которой лежит нормаль к поверхности в точке  $N$ . Возьмем точку  $N_1$ , расположенную на бесконечно малом расстоянии от точки  $N$ , и проведем между ними всевозможные кривые; наикратчайшей кривой из них будет та, которая имеет наибольший радиус (наименьшую кривизну). Следовательно, согласно сказанному ранее, наикратчайшей линией между двумя бесконечно близкими точками будет элемент той кривой, в соприкасающейся плоскости которой лежит нормаль к поверхности. Распространяя этот вывод на кривую конечной длины, получаем, что кривая на поверхности, в каждой точке которой соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль в той же точке, является наикратчайшей, т. е. геодезической линией, иначе геодезическая линия на данной

поверхности — такая кривая, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.

Из определения геодезической линии и понятия соприкасающейся плоскости можно себе представить следующий геометрический метод построения геодезической линии на земном эллипсоиде. Пусть  $AB$  — нормаль к поверх-

Пусть  $PP_1$  (рис. 20) — малая ось эллипсоида,  $An_1$  — нормаль к поверхности эллипсоида в точке  $A$ . Установим в точке  $A$  теодолит так, чтобы его вертикальная ось совпадала с нормалью  $An_1$ ; после этого в заданном направлении отметим на поверхности эллипсоида точку  $a$ , близкую к  $A$ . Перенесем теодолит в точку  $a$ , совместим вертикальную ось инструмента с нормалью  $an_2$ , направим трубу на точку  $A$ , повернем алидаду точно на  $180^\circ$  и

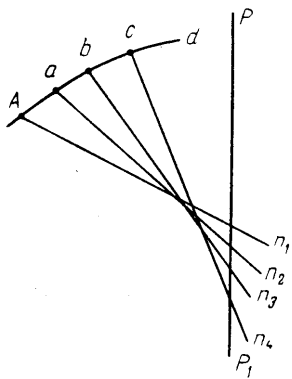


Рис. 20

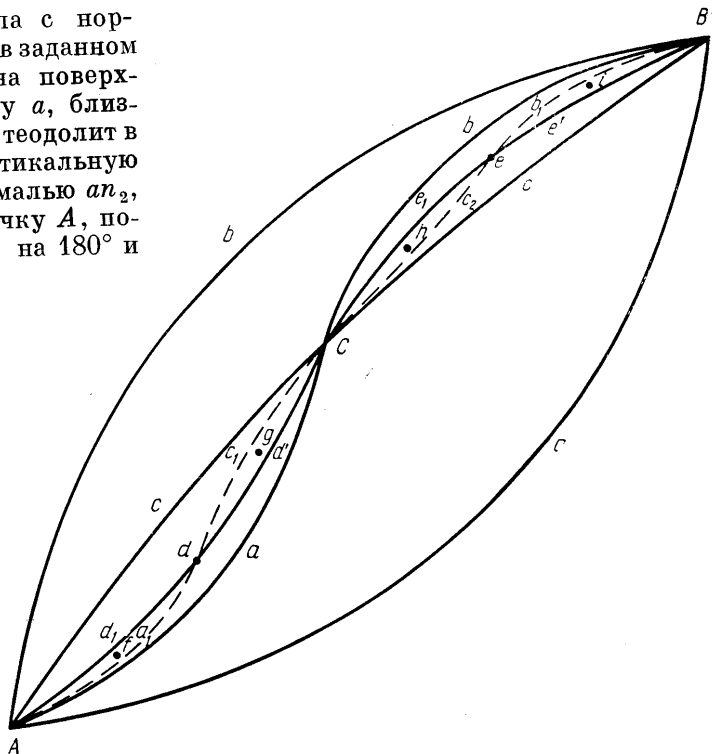


Рис. 21

отметим на поверхности эллипсоида близкую к  $a$  точку  $b$ . Затем перенесем теодолит в точку  $b$ , установим его вертикальную ось по нормали  $bn_z$ , наведем трубу на точку  $a$ , переведем алидадную часть теодолита точно на  $180^\circ$  и наметим в плоскости трубы точку  $c$ , близкую к  $b$ . Поступая таким образом до тех пор, пока расстояние между начальной точкой  $A$  и соответствующей точкой  $i$  не сделается равным заданному, и предполагая, что указанные выше перестановки теодолита производились через бесконечно малые расстояния, получаем на эллипсоиде геодезическую линию.

Действительно, плоскость  $Aabn_2$  будет, во-первых, соприкасающейся плоскостью полученной кривой в точке  $a$ , так как в этой плоскости лежат отрезки  $aA$  и  $ab$ , которые можно рассматривать как касательные к кривой в точке  $a$ ; во-вторых, в этой плоскости лежит и нормаль  $an_2$ ; то же самое будет и в точках  $b, c, d$  и т. д. Следовательно, условия, определяющие геодезическую кривую, соблюдены; нормаль к поверхности лежит в соприкасающейся плоскости

в каждой точке кривой. Согласно § 11, нормали  $An_1, an_2, bn_3, cn_4$  пересекают малую ось эллипсоида в разных точках, поэтому плоскости  $Aabn_2, abcn_3, bcdn_4$  не совпадут между собой и точки  $A, a, b, c, d$  и т. д. дадут на поверхности эллипсоида непрерывную кривую двойкой кривизны.

В изложенном методе построения геодезической линии каждая последующая точка геодезической линии определяется по двум предшествующим при условии бесконечно малых расстояний между каждыми двумя смежными точками.

Очевидно, для построения геодезической линии на поверхности между заданными точками  $A$  и  $B$  необходимо знать направление первого элемента кривой.

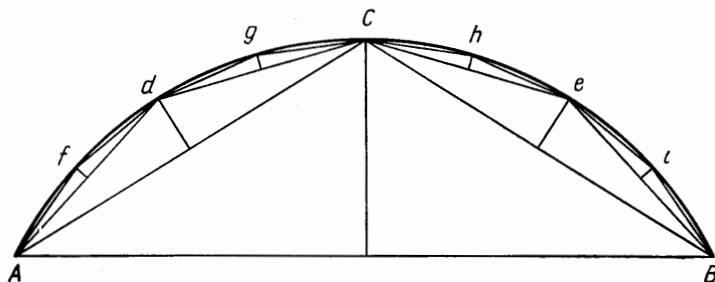


Рис. 22

Покажем другой путь построения геодезической линии между точками  $A$  и  $B$ . Пусть на рис. 21  $AaB$  — прямое нормальное сечение в точке  $A$ , а  $BbA$  — прямое нормальное сечение в точке  $B$ .

Соединим  $A$  и  $B$  хордой и из середины ее проведем нормаль к поверхности эллипсоида; пусть  $C$  — точка пересечения этой нормали с поверхностью эллипсоида. Проведем плоскость через нормаль в точке  $C$  и точку  $A$ ; в этой плоскости будет лежать хорда  $AB$ . Следовательно, эта плоскость пройдет и через точку  $B$ . Сечение этой плоскостью поверхности эллипсоида показано кривой  $AcCb$ . Очевидно, эта плоскость будет плоскостью прямого нормального сечения из точки  $C$  на точку  $A$  и на точку  $B$ .

Проведем прямое нормальное сечение в  $A$  на точку  $C$ ; пусть это сечение изобразится кривой  $AaC$ , которое расположится на поверхности эллипсоида южнее, чем обратное сечение  $CcA$ , поскольку точка  $C$  на чертеже располагается севернее точки  $A$ . Аналогично этому прямое нормальное сечение в точке  $B$  на точку  $C$  изобразится кривой  $BbC$ , которая будет расположена севернее нормального сечения  $CcB$ , так как точка  $C$  находится южнее точки  $B$ .

Соединим хордами точки  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $C$  и из середины этих хорд проведем нормали к поверхности эллипсоида, которые пересекут последнюю в точках  $d$  и  $e$ ; затем исполним те же действия, какие произвели ранее в отношении точки  $C$ : проведем нормальную плоскость в  $d$  через  $A$  так, что она пройдет и через точку  $C$  и изобразится кривой  $Ad_1dd'C$ . Точно так же построим нормальную плоскость в  $e$ , проходящую через  $C$ ; она пройдет и через точку  $B$  и изобразится кривой  $Ce_1e'B$ . Прямое нормальное сечение в  $A$  на точку  $d$  изобразится кривой  $Aa_1d$ ; прямое нормальное сечение с  $C$  на  $d$  — кривой  $Cc_1d$ ; прямое сечение с  $B$  на  $e$  изобразится кривой  $Bb_1e$ , прямое сечение с  $C$  на  $e$  — кривой  $Cc_2e$ .

Далее поступаем так же: соединяем хордами точки  $A$  и  $d$ ,  $d$  и  $C$ ,  $C$  и  $e$ ,  $e$  и  $B$  (рис. 22); из середины этих хорд проводим нормали к поверхности эллип-

соида, которые пересекут ее в точках  $f, g, h, i$ ; проводим нормальные плоскости в этих точках, проходящие соответственно через точки  $A, d, C, e, B$ , затем соединяем хордами точки  $A$  и  $f, f$  и  $d, d$  и  $g$  и т. д., т. е. выполняем во вновь отмеченных точках такие же действия, как и раньше.

Если продолжать такое построение до бесконечности, то плоскости, проводимые через нормаль в середине каждой хорды, обратятся в соприкасающиеся плоскости. Число хорд, а следовательно, и число точек пересечения нормалей, проходящих через середины хорд, будет бесконечно велико. Эти точки образуют непрерывную кривую, которая и будет геодезической линией, так как выполнено условие, определяющее геодезическую кривую; в каждой точке ее нормаль к поверхности будет лежать в соприкасающейся плоскости кривой.

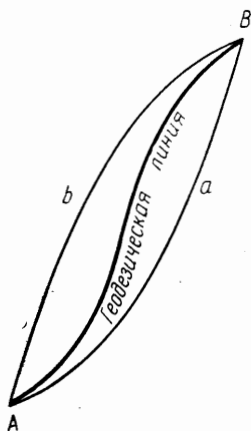


Рис. 23

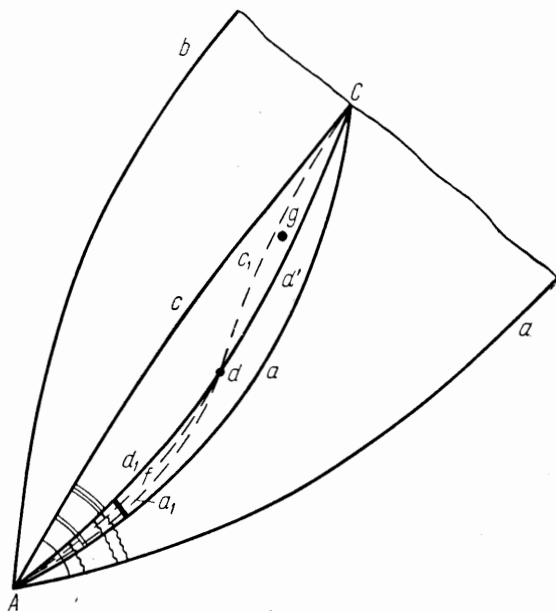


Рис. 24

В результате построения (тем или иным путем) геодезическая линия займет положение относительно взаимных нормальных сечений, показанное на рис. 23.

При азимутах линий, не близких к  $90$  или  $270^\circ$ , положение геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений будет несколько иным.

Определим приближенно угол, который образует геодезическая линия с прямым нормальным сечением.

При азимутах линий, близких к  $90$  или  $270^\circ$ , нормальное сечение, которое проходит через нормаль к поверхности эллипсоида, проведенную из середины хорды, соединяющей конечные точки кривой, делит углы между взаимными нормальными сечениями пополам. Так, на рис. 21 сечение  $AcCcB$  делит пополам углы при  $A$  и  $B$  между кривыми  $AaB$  и  $BbA$ , сечение  $Ad_1dd'C$  делит пополам углы при  $A$  и  $C$  между кривыми  $AaC$  и  $AcC$ . Это положение доказывается в фундаментальных курсах высшей геодезии [27, стр. 56—57]. К этому же выводу можно прийти на основании геометрических соображений.

Воспользуемся этими свойствами кривых на эллипсоиде для приближенного решения поставленной задачи. Обозначим:  $\Delta$  — угол между взаимными нормальными сечениями в точке  $A$ , т. е. между кривыми  $AaB$  и  $BbA$ ,  $\delta$  —



угол начального элемента геодезической линии в  $A$  с прямым нормальным сечением на  $B$ , т. е. с кривой  $AaB$ . Будем иметь (см. рис. 21 и 24) углы между кривыми:

$$AcC \text{ и } AaB, \text{ равный } \frac{\Delta}{2},$$

$$AcC \gg AaC \gg \frac{\Delta}{4},$$

$$Ad_1D \gg AcC \gg \frac{\Delta}{8},$$

$$Ad_1d \gg AaB \gg \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8},$$

$$Ad_1d \gg Aa_1d \gg \frac{\Delta}{16},$$

$$Ad_1d \gg Afd \gg \frac{\Delta}{32},$$

$$Afd \gg AaB \gg \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32}$$

и т. д.

В пределе, при бесконечном продолжении описанного выше построения, угол между кривой  $AaB$  и нормальным сечением, проходящим через нормаль, проведенную из середины ближайшей к точке  $A$  хорды, обратится в  $\delta$ . Тогда по аналогии с написанной выше таблицей будем иметь:

$$\delta = \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32} - \frac{\Delta}{128} - \frac{\Delta}{512} - \dots,$$

$$\delta = \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} - \dots \right),$$

или

$$\delta = \frac{\Delta}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \right) \right\}.$$

Сумма членов геометрической прогрессии, стоящей в круглых скобках, равна  $\frac{1}{3}$ . Следовательно,

$$\delta = \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right),$$

$$\delta = \frac{\Delta}{3}. \quad (12.1)$$

Отсюда следует, что геодезическая линия на поверхности эллипсоида (при азимутах, не близких к  $90$  или  $270^\circ$ ) делит угол между взаимными нормальными сечениями в отношении  $1 : 2$  и располагается в данной точке ближе к прямому нормальному сечению.

Иначе говоря, угол между геодезической линией, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , и прямым нормальным сечением в каждой из этих точек равен  $\frac{1}{3}$  угла между прямым и обратным нормальными сечениями в данной точке.

В дальнейшем этой зависимостью нам придется воспользоваться при получении формулы поправки в направления за переход от прямого нормального сечения к геодезической линии.

Если между двумя точками поверхности эллипсоида натянуть упругую нить, то нить примет форму геодезической линии. Действительно, равнодействующая упругих сил нити в каждой точке должна лежать в соприкасающейся плоскости, а сопротивление поверхности направлено по нормали к поверхности. При равновесии нити эти две силы уравниваются и соприкасающаяся плоскость будет содержать нормаль к поверхности.

### § 13. Упрощенный вывод основного уравнения геодезической линии

Рассмотрим элементарный полярный треугольник  $APB'$  (рис. 25), образованный дугами меридианов  $AP$ ,  $B'P$  и элементарной дугой геодезической линии  $ds$ .

Пусть направление начального элемента геодезической линии  $ds$  из точки  $A$  задано азимутом  $A$ . Проведем из точки  $B'$  элементарную дугу параллели  $B'C$ . Разности широт и долгот точек  $A$  и  $B'$  обозначим через  $dB$  и  $dl$ , сближение меридианов в точке  $B'$  — через  $dA$ .

Из элементарного треугольника  $AB'C$  имеем:

$$\begin{aligned} M dB &= ds \cos A, \\ r dl &= N \cos B dl = ds \sin A, \end{aligned} \quad (13.1)$$

где  $r$  — радиус параллели.

Имея в виду, что угол при вершине  $B'$  треугольника  $CPB'$  равен  $90^\circ - dA$ , напомним:

$$\left. \begin{aligned} \cos(90^\circ - B) &= \operatorname{ctg} dl \operatorname{ctg}(90^\circ - dA) \\ \operatorname{tg} dl \sin B &= \operatorname{tg} dA \\ dA &= dl \sin B \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

$$dA = \frac{ds \sin A \operatorname{tg} B}{N}. \quad (13.3)$$

Из (13.1) и (13.3) напомним

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{\sin A}{N} \sec B = \frac{V}{c} \sec B \sin A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B = \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Заметим, что первые два уравнения из системы (13.4) могут относиться к элементам любой кривой на поверхности эллипсоида, поскольку они выражают линейные элементы поверхности; последнее уравнение относится только к геодезической линии (см. [2, стр. 71—72] или [55, стр. 33—37]).

Система уравнений (13.4) имеет весьма важное значение в высшей геодезии, так как она представляет собой исходные дифференциальные уравнения для решения прямой и обратной геодезической задачи на поверхности эллипсоида.

Докажем важную теорему для геодезической линии: произведение радиуса параллели на синус азимута в каждой точке геодезической линии — величина постоянная, т. е.

$$r \sin A = \text{const.}$$

Изобразим меридиан точки  $A$  в плоскости чертежа (рис. 26). Если радиус

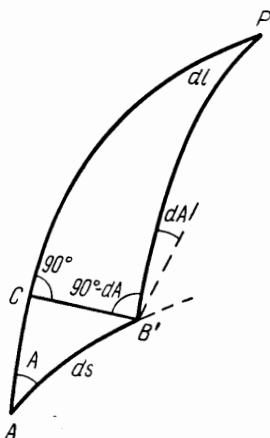


Рис. 25

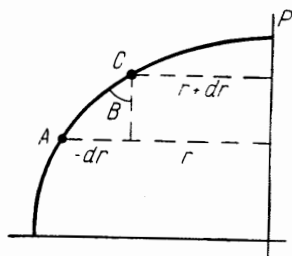


Рис. 26

параллели точки  $A$  обозначить через  $r$ , то радиус параллели точки  $C$  будет  $r + dr$ , причем по чертежу для  $dr$  будем иметь

$$-dr = M dB \sin B. \quad (13.5)$$

Из уравнений (13.1) пишем

$$\cos A = M \frac{dB}{ds}, \quad (13.6)$$

$$\sin A = r \frac{dl}{ds}. \quad (13.7)$$

Помножим левую и правую части уравнений (13.6) на  $rdA$ , а уравнения (13.7) на  $dr$  и сложим. Будем иметь:

$$r \cos A dA = Mr \frac{dB}{ds} \sin B dl,$$

$$dr \sin A = r dr \frac{dl}{ds} = -Mr \frac{dl}{ds} dB \sin B$$

или

$$r \cos A dA + dr \sin A = 0.$$

В правой части мы получили полный дифференциал, интеграл которого равен

$$r \sin A = \text{const.} \quad (13.8)$$

Следовательно, теорема доказана. Согласно (4.21),

$$r = a \cos u,$$

поэтому уравнение (13.8) может быть переписано

$$a \cos u \sin A = c \quad (13.9)$$

или

$$\cos u_1 \sin A_1 = \cos u_2 \sin A_2 = \dots = c.$$

Из уравнения (13.9) следует, что для геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения произведение косинуса приведенной широты точки геодезической линии на синус азимута геодезической линии в той же точке есть величина постоянная.

Уравнения (13.8) и (13.9) представляют собой два вида основного уравнения геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения.

Эти уравнения в дальнейшем будут использованы при выводе формул для вычисления геодезических координат при больших расстояниях между пунктами.

#### § 14. Аналитический вывод основного уравнения геодезической линии на поверхности вращения

Учитывая большое значение, которое имеет геодезическая линия в высшей геодезии, в этом параграфе получим общий вид дифференциального уравнения геодезической линии на любой поверхности исходя из ее определения и, далее, как частный случай, получим уравнение линии для поверхности эллипсоида вращения.

Пусть имеем поверхность, уравнение которой

$$F(x, y, z) = 0.$$

Параметрическое уравнение геодезической линии в общем виде будет

$$x = f(s); \quad y = \varphi(s); \quad z = \psi(s), \quad (14.1)$$

где  $s$  — длина геодезической линии.

Известно, что косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , образуемых нормалью к поверхности с осями координат, будут равны:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{D}; \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{D}; \quad \cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{D},$$

где

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Известно также, что косинусы углов, образованных главной нормалью к кривой с осями координат  $\alpha_N, \beta_N, \gamma_N$ , равны

$$\cos \alpha_N = R \frac{d^2x}{ds^2}; \quad \cos \beta_N = R \frac{d^2y}{ds^2}; \quad \cos \gamma_N = R \frac{d^2z}{ds^2},$$

где  $R$  — радиус первой кривизны.

Геодезическая линия определяется как кривая на данной поверхности, в каждой точке которой ее соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности в той же точке; это определение равносильно требованию совпадения главной нормали кривой в каждой ее точке с нормалью к поверхности в той же точке (главной нормалью кривой называется прямая, полученная в результате пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей, относящихся к одной точке кривой). Это совпадение произойдет, если

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{D} = R \frac{d^2x}{ds^2}; \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{D} = R \frac{d^2y}{ds^2}; \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{D} = R \frac{d^2z}{ds^2},$$

или

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = RD; \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = RD; \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}} = RD.$$

Следовательно, уравнение геодезической линии для произвольной поверхности имеет вид

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}. \quad (14.2)$$

Для нас представляет интерес уравнение геодезической линии и ее свойства на поверхности земного эллипсоида, являющегося поверхностью вращения.

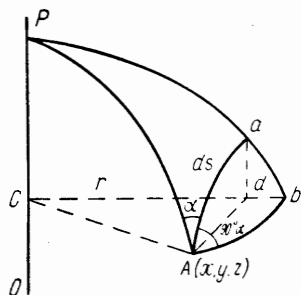


Рис. 27

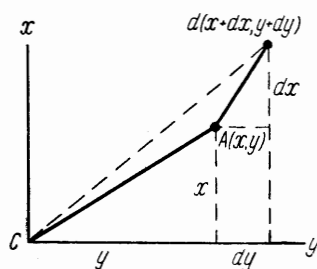


Рис. 28

Это уравнение будет частным случаем уравнения (14.2). Напишем уравнение поверхности вращения в виде

$$x^2 + y^2 + f(z) = 0.$$

Соответствующие частные производные, входящие в (14.2), будут равны:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f'(z). \quad (14.3)$$

Следовательно, уравнение геодезической линии на поверхности вращения, согласно (14.2) и (14.3), будет иметь вид

$$\frac{2x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{2y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{f'(z)}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

или

$$y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} = C,$$

или

$$+ y dx - x dy = C ds, \quad (14.4)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Определим геометрический смысл выражения  $C ds$ . Пусть координаты точки  $A$  (рис. 27), расположенной на поверхности эллипсоида, равны  $x, y, z$ ,

причем ось  $z$  расположена по оси вращения эллипсоида  $OP$ , а оси  $x$  и  $y$  находятся в плоскости, перпендикулярной к оси  $OP$  (первая система координат); пусть  $Aa$  — элемент геодезической линии, имеющий длину  $ds$  и азимут  $\alpha$ . Проекция элемента  $ds$  на параллель, т. е. отрезок  $Ab$ , равна  $ds \sin \alpha$ .

Так как точка  $a$  находится на бесконечно малом расстоянии от  $A$ , то координатами точки  $a$  будут  $x + dx$ ,  $y + dy$ ,  $z + dz$ , а ее проекции на плоскость параллели точки  $A$ , т. е. координатами точки  $d$ , будут  $x + dx$ ;  $y + dy$  и  $z$ . Радиус параллели точки  $A$ , равный  $AC = bC$ , обозначим через  $r$ .

Определим площадь треугольника  $AdC = P$ , изобразив его отдельно на рис. 28,

$$P = \frac{1}{2} \{ (x + dx)(y + dy) - xy - 2x dy - dx dy \},$$

$$P = \frac{1}{2} (y dx - x dy).$$

Площадь сектора  $AbC$  (см. рис. 27) будет равна  $\frac{1}{2} r ds \sin \alpha$ .

При бесконечно малых  $dx$  и  $dy$  площади треугольника  $AdC$  и сектора  $AbC$  равны между собой, поэтому

$$\frac{1}{2} (y dx - x dy) = \frac{1}{2} r ds \sin \alpha,$$

или, по (14.4),

$$C ds = r \sin \alpha ds,$$

откуда

$$r \sin \alpha = C, \quad (14.5)$$

или

$$a \cos u \sin \alpha = C, \quad (14.6)$$

т. е. получили уравнения (13.8) и (13.9).

## § 15. Расхождение взаимных нормальных сечений

Возьмем на поверхности эллипсоида две точки  $A$  и  $B$ , имеющие разные широты и долготы (рис. 29). Обозначим:

$n_a$ ,  $n_b$  — точки пересечения нормалей к поверхности эллипсоида в точках  $A$  и  $B$  с малой осью;

$\sigma$  — угол между прямыми  $n_a A$  и  $n_a B$ ;

$AaB$  — прямое нормальное сечение в  $A$  на точку  $B$ ;

$BbA$  — прямое нормальное сечение в  $B$  на точку  $A$ ;

$AB$  — хорда — линия пересечения плоскостей прямого и обратного сечений  $ABn_a$  и  $ABn_b$ ;

$\varepsilon$  — угол  $n_a B n_b$ .

Для определения отрезка  $n_a n_b$  воспользуемся формулами (11.2) и (11.3), из которых получим (см. рис. 17 и 29):

$$On_a = ae^2 \sin B_1 \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_1 \right),$$

$$On_b = ae^2 \sin B_2 \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_2 \right).$$

Следовательно, с ошибкой порядка  $ae^4 (B_2 - B_1)$  можем написать:

$$n_a n_b = On_b - On_a = ae^2 (\sin B_2 - \sin B_1),$$

или

$$n_a n_b = ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_m, \quad (15.1)$$

где

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Отметим, что треугольник  $An_a B$  можно считать равнобедренным, так как  $An_a \approx Bn_a$ , следовательно, угол  $Abn_a$  приближенно равен  $90^\circ - \frac{\sigma}{2}$ . Обозна-

чим через  $f$  угол между плоскостями  $ABn_a$  и  $ABn_b$  двух взаимно обратных нормальных сечений. Приняв за центр точку  $B$ , построим сферический треугольник  $An'_a n'_b$ , соответствующий трехграннику с ребрами  $BA$ ,  $Bn_b$ ,  $Bn_a$  (рис. 29 и 30). В этом треугольнике стороне  $n'_a n'_b$  будет соответствовать угол  $\varepsilon$ , стороне  $An'_a$  — угол  $ABn_a$ , равный  $90^\circ - \frac{\sigma}{2}$ . Угол при вершине треугольника  $A$  будет искомым углом  $f$ , а угол при  $n'_b$

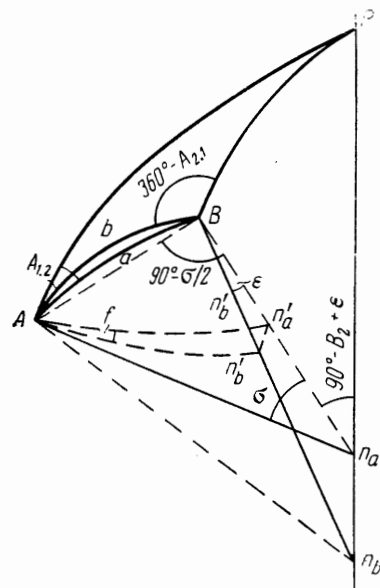


Рис. 29

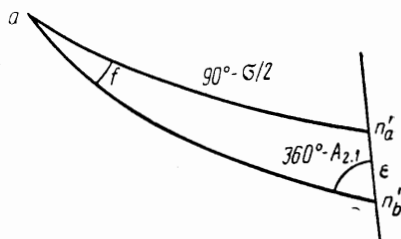


Рис. 30

равен  $360^\circ - A_{2,1}$ , так как плоскость, проходящая через точки  $B$ ,  $n_a$ ,  $n_b$ , есть плоскость меридиана точки  $B$ .

Из треугольника  $An'_a n'_b$  имеем

$$\frac{\sin f}{\sin (360^\circ - A_{2,1})} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \left( 90^\circ - \frac{\sigma}{2} \right)}. \quad (15.2)$$

Из треугольника  $Bn_a n_b$  (см. рис. 29) следует

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin (90^\circ - B_2 + \varepsilon)} = \frac{n_a n_b}{N_2}.$$

Заменив  $n_b n_a$ , согласно (15.1), и пренебрегая в знаменателе левой части последнего уравнения величиной  $\varepsilon$ , получаем

$$\frac{\sin \varepsilon}{\cos B_2} = \frac{ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_m}{N_2},$$

откуда

$$\sin \varepsilon = \frac{ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_2 \cos B_m}{N_2}.$$

или с ошибкой порядка  $e^4 (B_2 - B_1)$

$$\sin \varepsilon = e^2 (B_2 - B_1) \cos B_2 \cos B_m. \quad (15.3)$$

На основании (15.2)

$$\sin f = - \frac{\sin \varepsilon \sin A_{2,1}}{\cos \frac{\sigma}{2}},$$

или, принимая во внимание (15.3) и заменяя  $\cos B_2$  на  $\cos B_m$ , получаем

$$\sin f = - \frac{e^2 (B_2 - B_1) \cos^2 B_m \sin A_{2,1}}{\cos \frac{\sigma}{2}}.$$

Но приближенно

$$(B_2 - B_1) = s \cos A_{1,2} (1)_1 \approx \sigma \cos A_{1,2}.$$

Полагая  $A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ$ , получаем, пренебрегая ошибкой порядка  $e^2 \sigma^2$ ,

$$f'' = e^2 \sigma \cos A_{1,2} \cos^2 B_m \sin A_{1,2} \rho'',$$

или

$$f'' = \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_{1,2} \rho''. \quad (15.4)$$

При  $s = 100$  км,  $\sigma \approx \frac{1}{60}$ ,  $B_m = 45^\circ$  и  $A_{1,2} = 45^\circ$ :

$$f'' \approx 6''.$$

Таким образом,  $f$  — угол между плоскостями взаимных нормальных сечений — величина малая второго порядка. Для максимальных длин сторон треугольников триангуляции 1 класса, равных 40—50 км, значение  $f''$  равно 2—3''. Следовательно, угловые и линейные расхождения между взаимными нормальными сечениями будут величинами малыми. Поэтому при последующем выводе фор-

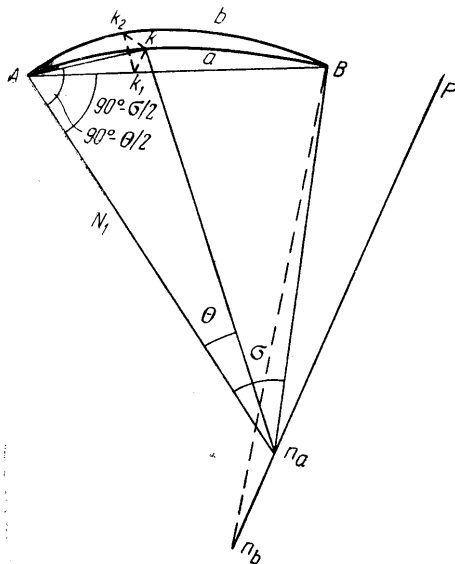


Рис. 31

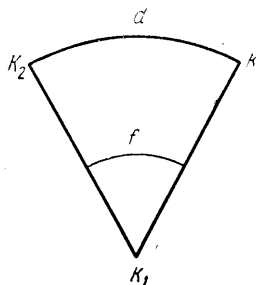


Рис. 32

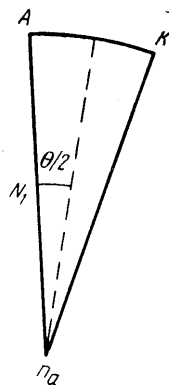


Рис. 33

мул можно дуги  $AaB$  и  $AbB$  рассматривать как сферические с центром в  $n_a$  или  $n_b$ .

На рис. 31  $AaB$  — дуга прямого нормального сечения в точке  $A$ , рассматриваемая как дуга окружности с центром в  $n_a$ ;  $AbB$  — обратное нормальное



сечение в  $A$ ; прямая  $AB$  — хорда, стягивающая дугу  $AaB$ . Возьмем на кривой  $AaB$  текущую точку  $k$  и проведем хорду  $kA$ . Обозначим центральный угол  $An_aB$  через  $\sigma$ , а угол  $kn_aA$  — через  $\Theta$ ; угол  $\Theta$  может иметь значения от 0 до  $\sigma$ . Тогда получим:

$$\angle BAn_a = 90^\circ - \frac{\sigma}{2}; \quad \angle kAn_a = 90^\circ - \frac{\Theta}{2},$$

$$\angle kAB = \angle kAn_a - \angle BAn_a = \frac{\sigma - \Theta}{2}.$$

Проведем через точку  $k$  плоскость, перпендикулярную к хорде  $AB$ ; пусть пересечение этой плоскости с хордой  $AB$  будет в точке  $k_1$  и с кривой  $AbB$  — в точке  $k_2$ . Треугольник  $kk_1k_2$  изображен на рис. 32. В этом треугольнике угол при вершине  $k_1 = f$ , а дуга  $kk_2 = d$ , т. е. линейному расхождению на поверхности эллипсоида между прямым и обратным нормальными сечениями  $AaB$  и  $AbB$ .

Из рис. 33 следует, что

$$Ak = 2N_1 \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (15.5)$$

Из треугольника  $Akk_1$  (см. рис. 31)

$$kk_1 = Ak \sin \frac{\sigma - \Theta}{2} = 2N_1 \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\sigma - \Theta}{2}. \quad (15.6)$$

Из рис. 32 имеем

$$kk_2 = kk_1 f,$$

или на основании (15.6) и (15.4)

$$kk_2 = 2N_1 \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\sigma - \Theta}{2} \frac{1}{2} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1,$$

$$kk_2 = d = \frac{N_1}{4} e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 \Theta (\sigma - \Theta). \quad (15.7)$$

Наибольшее линейное расхождение между сечениями  $AaB$  и  $AbB$  будет в середине дуги  $AB$ , т. е. при  $\Theta = \frac{\sigma}{2}$ .

Следовательно, из (15.7) получаем

$$d_{\max} = \frac{N_1}{16} e^2 \sigma^3 \cos^2 B_m \sin 2A_1. \quad (15.8)$$

Пользуясь (15.8), вычислим значения  $d_{\max}$  при различных расстояниях  $s$  между точками  $A$  и  $B$ . Положим, что широта  $B = 45^\circ$ ,  $A_1 = 45^\circ$ , тогда получим

$$s \text{ (км)} \dots 200 \quad 100 \quad 50$$

$$d_{\max} \text{ (м)} \dots 0,050 \quad 0,006 \quad 0,0008.$$

Результаты вычислений показывают, что линейные расхождения между прямым и обратным нормальными сечениями малы.

Формула (15.8) верна для геодезических линий, когда азимуты их не близки к  $90$  или  $270^\circ$ , в противном случае следует применять более точные формулы.

Дадим без вывода выражение для разности длин геодезической линии и дуги нормального сечения  $D_s$

$$D_s = \frac{ae^4}{360} \sin^2 2A_1 \cos^4 B_m \sigma^5.$$

Для  $s = 600 \text{ км}$   $D_s \leq \frac{1}{135\,000} \text{ м}$ .

Произведенные расчеты позволяют сделать заключение, что разностью длин геодезической линии и дуги нормального сечения при вычислении триангуляции можно пренебречь.

### § 16. Длина дуги нормального сечения

Выразим длину дуги нормального сечения произвольного азимута через длину окружности, построенной радиусом сечения первого вертикала в первой точке. Пусть на рис. 34  $AB$  — дуга прямого нормального сечения, проведен-

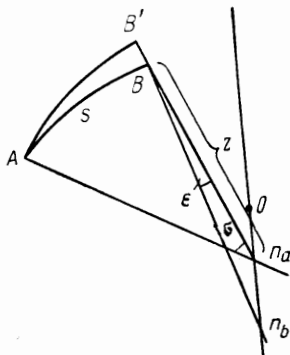


Рис. 34

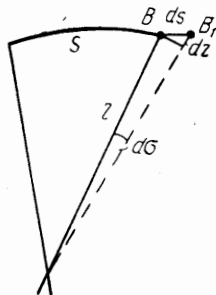


Рис. 35

ного из точки  $A$  на точку  $B$ ; пусть ее длина равна  $s$ , а азимут  $A_{1.2}$ . В плоскости этой дуги проведем окружность радиусом, равным радиусу сечения первого вертикала  $N_1$  в точке  $A$  (широта  $B_1$ ) и, следовательно, с центром в точке  $n_a$ . Пусть точка  $B'$  будет пересечением линии  $Bn_a$  с проведенной окружностью. Обозначим далее центральный угол, под которым усматривается дуга  $AB$  и  $AB'$ , через  $\sigma$ , расстояние  $Bn_a$  — через  $z$ ; угол в точке  $B$  между линией  $Bn_a$  и радиусом сечения первого вертикала в точке  $B$ , т. е.  $Bn_b$ , через  $\varepsilon$ . Тогда из треугольника  $Bn_an_b$  имеем

$$z^2 = N_2^2 + \overline{n_a n_b^2} - 2N_2 \overline{n_a n_b} \cos \{180^\circ - (90^\circ - B_2) - \varepsilon\}$$

или

$$z^2 = N_2^2 + \overline{n_a n_b^2} + 2N_2 \overline{n_a n_b} \sin (B_2 - \varepsilon),$$

откуда

$$\frac{z^2}{N_2^2} = 1 + \frac{\overline{n_a n_b^2}}{N_2^2} + \frac{2\overline{n_a n_b}}{N_2} \sin (B_2 - \varepsilon). \quad (16.1)$$

Примем за малую величину первого порядка  $\frac{s}{R}$  или  $e^2$ , тогда, имея в виду, что, согласно (15.1) и (15.3),

$$n_a n_b = Ne^2 (B_2 - B_1) \cos B_m,$$

$$\varepsilon = e^2 (B_2 - B_1) \cos^2 B_m;$$

с отбрасыванием членов третьего порядка малости (16.1) примет вид

$$\frac{z^2}{N_2^2} = 1 + \frac{2na^{n_b}}{N_2} \sin B_2$$

или, после разложения по биному Ньютона,

$$\frac{z}{N_2} = 1 + \frac{na^{n_b}}{N_2} \sin B_2. \quad (16.2)$$

Для перехода к аргументам начальной точки  $A$  воспользуемся равенствами

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= N_1 + (B_2 - B_1) \left( \frac{dN}{dB} \right)_1 + \frac{(B_2 - B_1)^2}{2} \left( \frac{d^2N}{dB^2} \right)_1 \\ \sin B_2 &= \sin B_1 + (B_2 - B_1) \cos B_1 - \frac{(B_2 - B_1)^2}{2} \sin B_1 \end{aligned} \right\}. \quad (16.3)$$

Учитывая (16.3) и (15.1), получаем

$$\frac{z}{N_1} = 1 - \frac{e^2 \cos^2 B_m (B_2 - B_1)^2}{2}. \quad (16.4)$$

Полагая

$$B_2 - B_1 = \frac{s \cos A_{1,2}}{M_1} = \sigma \cos A_{1,2}$$

и

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B,$$

формула (16.4) примет вид

$$z = N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1,2}}{2} \right). \quad (16.5)$$

Согласно рис. 35 имеем

$$ds = \sqrt{z^2 d\sigma^2 + dz^2}$$

или

$$ds = \sqrt{z^2 + \left( \frac{dz}{d\sigma} \right)^2} d\sigma. \quad (16.6)$$

Из (16.5) получаем

$$\left( \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 = N_1^2 \eta^4 \sigma^2 \cos^4 A_{1,2}$$

и

$$z^2 = N_1^2 (1 - \eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1,2}).$$

Тогда для  $ds$  будем иметь

$$ds = \sqrt{N_1^2 (1 - \eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1,2} + \eta^4 \sigma^2 \cos^4 A_{1,2})} d\sigma. \quad (16.7)$$

С удержанием членов 3-го порядка малости последнее выражение примет вид

$$ds = N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1,2}}{2} \right) d\sigma. \quad (16.8)$$

Откуда

$$s = \int_0^\sigma N_1 \left( 1 - \frac{\eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1,2}}{2} \right) d\sigma \quad (16.9)$$

или окончательно с принятой точностью

$$s = N_1 \sigma \left( 1 - \frac{\eta^2 \sigma^2 \cos^2 A_{1.2}}{6} \right) \quad (16.10)$$

и

$$\sigma'' = \frac{s}{N_1} \rho'' \left( 1 + \frac{\eta^2 s^2 \cos^2 A_{1.2}}{6N_1^2} \right). \quad (16.11)$$

Полученная формула при  $s = 150$  км точна до  $0,0001''$ . При  $s < 40$  км поправочным членом можно пренебречь; тогда будем иметь

$$\sigma = (2)_1 s. \quad (16.12)$$

Более точные формулы, выводимые в фундаментальных руководствах по высшей геодезии, имеют вид

$$s = N_1 \sigma - \frac{N_1}{6} \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2} \sigma^3 + \frac{N_1}{6} \eta^4 \cos^4 A_{1.2} \sigma^3 + \\ + \frac{N_1}{8} \eta^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 - 2\eta^2 \cos^2 A_{1.2}) \sigma^4, \quad (16.13)$$

$$\sigma'' = \frac{s}{N_1} \rho'' \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2 s^2}{6N_1^2} \cos^2 A_{1.2} - \frac{\eta_1^4 s^2}{6N_1^2} \cos^4 A_{1.2} - \right. \\ \left. - \frac{\eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2}}{8N_1^3} (1 - 2\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}) s^3 \right\}. \quad (16.14)$$

Формулы (16.13) и (16.14) ошибочны на малые величины порядка  $Ne^2 \sigma^5$ .

Без вывода приведем формулы, устанавливающие связь между длиной дуги нормального сечения  $s$  и длиной хорды  $d$ , соединяющей конечные точки дуги [44, стр. 75].

$$d = s - (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \frac{s^3}{24N_1^2} + \eta_1^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1.2} (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \frac{s^4}{8N_1^3} + \\ + (1 - 72\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1 + 76\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}) \frac{s^5}{1920N_1^4},$$

$$s = d + (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \frac{d^3}{24N_1^2} - \eta_1^2 \operatorname{tg} B \cos A_{1.2} (1 + \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2})^2 \frac{d^4}{8N_1^3} + \\ + (3 + 24\eta_1^2 \operatorname{tg}^2 B_1 - 12\eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}) \frac{d^5}{640N_1^4}.$$

#### § 17. Углы между взаимными нормальными сечениями и геодезической линией

На рис. 36 изображен треугольник, вершинами которого являются известные из предыдущего параграфа точки  $A$ ,  $k_2$ ,  $k$ . Соединим точку  $A$  с точками  $k$  и  $k_2$  прямыми, которые будут хордами для частей дуг прямого и обратного нормальных сечений в точке  $A$ . Согласно рис. 36 имеем  $\angle k A k_2 = \frac{k k_2}{A k}$ , или на основании формул (15.5) и (15.7)

$$\angle k A k_2 = \frac{N_1 e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 \Theta (\sigma - \Theta)}{4N_1 \Theta},$$

или

$$\angle kAk_2 = \frac{e^2 \sigma \cos^2 B_m \sin 2A_1 (\sigma - \Theta)}{4}. \quad (17.1)$$

Представим, что расстояние  $Ak$ , а следовательно, и угол  $\Theta$  убывают; в этом случае хорды  $Ak$  и  $Ak_2$  в пределе обращаются в касательные к прямому и обратному нормальным сечениям в точке  $A$ . Очевидно, при этом условии угол  $kAk_2$  обратится в угол между взаимными нормальными сечениями в точке  $A$ , который ранее мы обозначали через  $\Delta$ .

Таким образом, полагая в (17.1)  $\Theta$  стремящимся к нулю, получаем

$$\Delta'' = \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{4} \rho''. \quad (17.2)$$

Поэтому на основании (12.1) и (17.2) находим

$$\delta'' = \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12} \rho'' \quad (17.3)$$

или, принимая во внимание (16.11) и (16.12),

$$\delta'' = \frac{\rho'' e^2 s^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12 N_m^2},$$

$$\delta'' = \frac{e^2 s^2 (2)_m^2 \cos^2 B_m \sin 2A_1}{12 \rho''}. \quad (17.4)$$

Взаимное расположение нормальных сечений и геодезической линии между вершинами треугольника в общем случае показано на рис. 37.

Точность полученных выше формул для вычисления расхождений азимутов нормальных сечений и

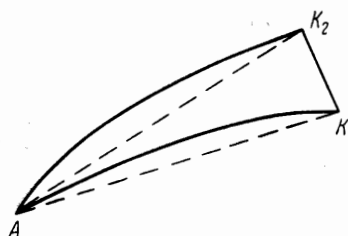


Рис. 36

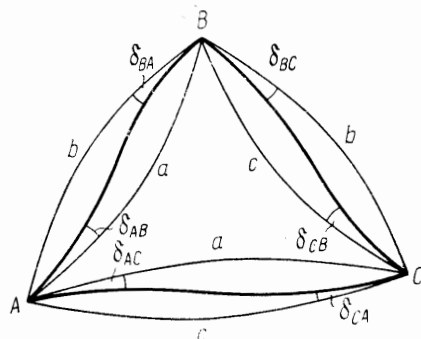


Рис. 37

геодезической линии вполне достаточна, если расстояния между точками на поверхности эллипсоида не превосходят нескольких десятков километров.

Однако при некоторых теоретических исследованиях, а также при определении больших расстояний и координат далеких точек на поверхности эллипсоида, когда расстояния исчисляются сотнями и даже тысячами километров, иногда возникает необходимость применения для указанных расхождений азимутов более точных формул.

Опустим выводы формул вследствие их громоздкости и приведем их в окончательном виде.

Для расхождения азимутов прямого и обратного нормального сечения в точке  $A$

$$\Delta_{1.2}'' = \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{2N_1} \rho'' - \frac{\eta_1^2 s^3 \sin A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{4N_1^3} \rho''. \quad (17.5)$$

При этом  $\Delta_{1.2}''$  понимается как разность между прямым и обратным нормальными сечениями в точке  $A$ , т. е.

$$\Delta_{1.2}'' = A_{AaB} - A_{AbB}.$$

Для разности азимутов прямого нормального сечения и геодезической линии в точке  $A$  с широтой  $B_1$  более точная формула с удержанием членов порядка  $\eta^2 \sigma^3$  имеет вид

$$\delta_{1.2}'' = \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{6N_1^2} \rho'' - \frac{\eta_1^2 s^3 \sin A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{24N_1^3} \rho'', \quad (17.6)$$

причем по-прежнему

$$A_{1.2} = A_{1.2}' - \delta_{1.2}''.$$

Приведем еще формулу, выражающую разность направления  $BaA$  и направления геодезической линии  $BA$ . Эта величина будет выражать разность между углом, образованным плоскостью меридиана точки  $B$  и плоскостью прямого нормального сечения в точке  $A$ , и азимутом геодезической линии  $BA$ .

Эта величина, которую назовем  $\delta_{2.1}''$ , будет

$$\delta_{2.1}'' = \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{3N_1^2} \rho'' - \frac{\eta_1^2 s^3 \sin A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{8N_1^3} \rho'', \quad (17.7)$$

причем

$$A_{2.1}' = A_{2.1}'' - \delta_{2.1}''.$$

Произведем подсчеты для определения числового значения расхождений между азимутами взаимных нормальных сечений и азимутами прямого нормального сечения и геодезической линии.

Если  $s = 200$  км, то максимальные значения  $\Delta$  и  $\delta$  при  $B = 0$  и  $A = 45^\circ$  получатся:

$$\Delta'' = 0,36'' \text{ и } \delta'' = 0,12''.$$

Если  $s = 100$  км, то соответственные величины будут равны

$$\Delta'' = 0,09'' \text{ и } \delta'' = 0,02''.$$

Если  $s = 50$  км, то

$$\Delta'' = 0,023'' \text{ и } \delta'' = 0,006''.$$

При вычислении направлений и азимутов в триангуляции 1 класса требуется обеспечить точность до сотых долей секунды. Для этого необходимо производить учет поправок и удерживать тысячные доли секунды.

\* А. Тилло. «Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена». 1866, стр. 150. В формуле Ганзена приведенные широты заменены геодезическими, что вызывает пренебрегаемые ошибки порядка  $\eta^4 \sigma^2$  и  $\eta^4 \sigma^3$ .

Следовательно, полученными значениями величин  $\Delta$  и  $\delta$  при обработке результатов угловых измерений в триангуляции 1 класса пренебрегать нельзя; они должны учитываться в виде поправок к непосредственно измеренным направлениям.

Заметим далее, что неучет этих поправок повлечет бы систематическое накопление ошибок при передаче азимута в триангуляции. Пусть, например, происходит передача азимута по ряду триангуляции, изображенному на рис. 38 по ходовой линии  $ABCDEF$  посредством углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ . Ошибка из-за неучета двойственности нормальных сечений на каждом пункте равняется  $\Delta$ .

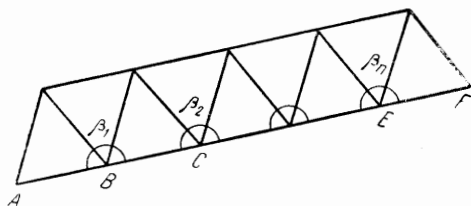


Рис. 38

Если передача азимута осуществляется через  $n$  пунктов, то накопление этой ошибки на  $n$  пунктах даст величину  $n\Delta$ . Положив  $\Delta = 0,02''$ , а  $n = 10$ , получим суммарную ошибку в передаче азимута  $0,2''$ , т. е. величину непренебрегаемую. Неучет этих поправок вызовет и дополнительную поперечную ошибку ряда.

Обозначив через  $m_\beta$  ошибку угла  $\beta$ , обусловленную неучетом двойственности нормальных сечений; через  $s$  — длину стороны триангуляции; через  $n$  — число сторон, определим влияние  $m_\beta$  на поперечный сдвиг всего ряда в точках:

$$\begin{aligned} A & ns \frac{m_\beta''}{\rho''}, \\ B & (n-1)s \frac{m_\beta''}{\rho''}, \\ C & (n-2)s \frac{m_\beta''}{\rho''}. \end{aligned}$$

Суммарное действие этих влияний, которое обозначим через  $q$ , выражится так:

$$q = \frac{(1+2+3+\dots+n)sm_\beta''}{\rho''} = \frac{n(n+1)sm_\beta''}{2\rho''}. \quad (17.8)$$

Положим  $m_\beta = 0,02''$ ,  $n = 10$  и  $s = 40$  км, тогда  $q = 0,2$  м.

При тех же данных, но при  $n = 5$ ,  $q = 0,05$  м.

Учет влияния расхождений азимутов взаимных нормальных сечений при обработке результатов угловых измерений заключается в том, что нормальные сечения заменяются геодезическими линиями. Практически такое образование треугольников из геодезических линий заключается во введении в измеренные направления поправок за переход от прямого нормального сечения к геодезической линии.

Рис. 37 показывает, что эти поправки, вычисленные по формуле (17.4), должны вычитаться из значений измеренных направлений.

### § 18. Положение геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений

Выше показано, какое положение занимает геодезическая линия относительно взаимных нормальных сечений: геодезическая линия в начале своего пути от точки  $A$  к точке  $B$  располагается ближе к прямому сечению  $AaB$ , нахо-

дась на  $\frac{1}{3}$  расхождения между взаимными нормальными сечениями в точке  $A$ ; по мере продвижения к точке  $B$  геодезическая линия приближается к сечению, обратному для точки  $A$  и прямому для точки  $B$ , и на равном расстоянии между  $A$  и  $B$  располагается посередине между обоими нормальными сечениями; наконец, в точке  $B$  она снова делит угол между взаимными нормальными сечениями в отношении  $1 : 2$ , но находится уже ближе к сечению  $BbA$ . Однако при азимутах геодезической линии  $A_{1.2} = 0$  или  $180^\circ$  и азимутах, близких к  $90$  или  $270^\circ$ , положение геодезической линии несколько иное. Рассмотрим некоторые частные случаи особого расположения геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений.

1. Если азимут  $A_{1.2} = 0$  или  $180^\circ$ , то значение поправки

$$\delta = \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2}$$

будет равно 0; следовательно, если две точки  $A$  и  $B$  находятся на одном меридиане, то прямое и обратное нормальные сечения и геодезическая линия сливаются. В этом легко убедиться и геометрически, так как нормали в точках  $A$  и  $B$  лежат в одной плоскости — плоскости меридиана точек  $A$  и  $B$ .

2. Пусть две точки  $A$  и  $B$  находятся на одной параллели и, следовательно, азимут  $A_1$  прямого нормального сечения будет близок к  $90$  или  $270^\circ$ , а  $B_1 = B_2$ . В этом случае прямое и обратное нормальные сечения совпадут, так как пересечение нормалей к поверхности в точках  $A$  и  $B$  с малой полуосью произойдет в одной точке; расположение геодезической линии относительно нормальных сечений будет иное по сравнению с указанным выше.



### Глава III

## РЕШЕНИЕ МАЛЫХ СФЕРИЧЕСКИХ И СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### § 19. Общие сведения

После того как получены окончательные значения измеренных направлений или углов на поверхности эллипсоида, переходят к решению треугольников. Задача заключается в последовательном вычислении длин сторон треугольников триангуляции, причем известны одна сторона и углы в каждом треугольнике.

Строго говоря, треугольники триангуляции являются сфероидическими или эллипсоидальными треугольниками, поскольку они образованы на поверхности эллипсоида. На практике обычно приходится иметь дело с треугольниками, стороны которых не превышают 40—50 км и в редких случаях достигают 70—80 км. Вследствие близости земного эллипсоида к сфере различие в элементах сфероидических и сферических треугольников триангуляции пренебрегаемо\*. Таким образом, вычисление треугольников триангуляции сводится к решению сферических треугольников. Если решать треугольники по обычным формулам сферической тригонометрии, то стороны необходимо выражать в частях радиуса, но это неудобно, так как практические стороны должны быть выражены в метрах. Поэтому треугольники триангуляции решают особыми методами, пользуясь теоремой Лежандра или способом аддитаментов.

При развитии геодезической сети методом трилатерации решение треугольников заключается в вычислении углов треугольников по их сторонам; в этом случае также целесообразно пользоваться теоремой Лежандра и способом аддитаментов.

### § 20. Решение сферических треугольников по теореме Лежандра

Пусть  $ABC$  (рис. 39) — сферический треугольник, стороны которого в линейных единицах обозначим через  $a, b, c$ . По сторонам  $a, b, c$  построим плоский треугольник  $A_1B_1C_1$  (рис. 40), углы сферического треугольника обозначим соответственно через  $A, B, C$ , а углы плоского — через  $A_1, B_1, C_1$ . Поставим задачу найти разности углов  $A - A_1, B - B_1, C - C_1$ . Зная эти разности, можем от сферических треугольников переходить к плоским, имеющим такие же значения длин сторон, и, таким образом, производить решение треугольников, применяя формулы прямолинейной тригонометрии.

Обозначим через  $R$  радиус шара, на котором построен сферический треугольник. Тогда, применив формулу косинуса стороны для сферического треугольника  $ABC$ , напомним

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A,$$

---

\* Это будет видно в последующем, при изложении сведений о решении больших треугольников; вывод о величине и пренебрегаемости различий, при указанных размерах треугольников, между сторонами сферических и сфероидических треугольников можно видеть из формул теории изображения эллипсоида на шаре, например, теории Гаусса — см. § 28.

откуда

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R}}{\sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R}}. \quad (20.1)$$

Пренебрегая пятыми степенями малых величин  $\frac{a}{R}$ ,  $\frac{b}{R}$  и  $\frac{c}{R}$ , формулу (20.1) переписываем в виде

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)}{\left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right) \left(\frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}\right)}.$$

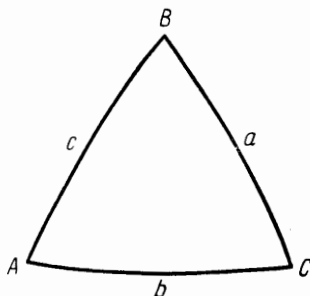


Рис. 39

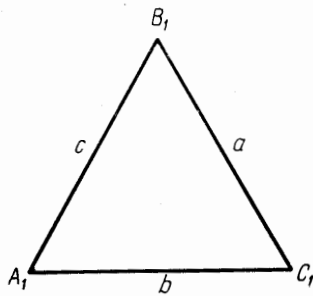


Рис. 40

С принятой точностью имеем

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{-\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} + \frac{b^2}{2R^2} - \frac{b^4}{24R^4} + \frac{c^2}{2R^2} - \frac{c^4}{24R^4} - \frac{b^2c^2}{4R^4}}{\frac{bc}{R^2} \left(1 - \frac{b^2+c^2}{6R^2}\right)} = \\ &= \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24R^2bc}\right) \left(1 + \frac{b^2+c^2}{6R^2}\right), \end{aligned}$$

или

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24R^2bc} + \frac{b^2+c^2}{6R^2} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

После перемножения и приведения подобных членов получим

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24R^2bc}. \quad (20.2)$$

Для плоского треугольника  $A_1B_1C_1$  имеем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A_1,$$

откуда

$$\cos A_1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (20.3)$$

и

$$\begin{aligned} \sin^2 A_1 &= 1 - \cos^2 A_1 = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}, \\ \sin^2 A_1 &= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Принимая во внимание выражения (20.3) и (20.4), переписываем формулу (20.2)

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc \sin^2 A_1}{6R^2},$$

или

$$\begin{aligned} \cos A - \cos A_1 &= -\frac{bc \sin^2 A_1}{6R^2}, \\ -2 \sin \frac{A-A_1}{2} \sin \frac{A+A_1}{2} &= -\frac{bc \sin^2 A_1}{6R^2}. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Разность  $A-A_1$  — малая величина, поэтому можно положить:

$$\sin \frac{A-A_1}{2} = \frac{A-A_1}{2}, \quad \sin \frac{A+A_1}{2} = \sin A_1$$

На основании (20.5) получаем

$$A - A_1 = \frac{bc \sin A_1}{6R^2}. \quad (20.6)$$

Площадь  $P$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$  может быть выражена формулой

$$P = \frac{bc \sin A_1}{2}. \quad (20.7)$$

поэтому

$$(A - A_1)'' = \frac{P}{3R^2} \rho''. \quad (20.8)$$

Аналогично предыдущему

$$(B - B_1)'' = \frac{P}{3R^2} \rho''; \quad (C - C_1)'' = \frac{P}{3R^2} \rho''.$$

Складывая почленно три последних уравнения и принимая во внимание, что  $A_1 + B_1 + C_1 = 180^\circ$ , получаем

$$(A + B + C) = 180^\circ + \frac{P}{R^2} \rho''.$$

Так как сумма углов сферического треугольника  $(A + B + C)$  равна  $180^\circ + \epsilon$ , где  $\epsilon$  — сферический избыток треугольника, то

$$\epsilon'' = \frac{P}{R^2} \rho''.$$

Искомые значения углов плоского треугольника в окончательном виде выразятся простыми формулами:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\epsilon}{3} \\ B_1 &= B - \frac{\epsilon}{3} \\ C_1 &= C - \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \right\}, \quad (20.9)$$

где

или

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'' &= \frac{P}{R^2} \rho'' = \frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho'' \\ \epsilon'' &= \frac{b^2 \sin A_1 \sin C_1}{\sin B_1} \cdot \frac{\rho''}{2R^2} \end{aligned} \right\}. \quad (20.10)$$

Обозначая

$$\frac{\rho''}{2R^2} = f,$$

выражение для сферического избытка  $\varepsilon''$  напишется

$$\varepsilon'' = 2fP = fbc \sin A_1 = f \frac{b^2 \sin A_1 \sin C_1}{\sin B_1}. \quad (20.10')$$

Значение  $f$  берется из таблиц по аргументу широты (табл. 4); при вычислении сферического избытка  $\varepsilon$  с использованием указанных таблиц значений  $f$  длины сторон треугольников выражаются в десятых долях километра.

Таблица 4

$\beta$	$f$	$\beta$	$f$
30°	0,00 25 44	50°	0,90 25 32
31	25 43	51	25 32
32	25 43	52	25 31
33	25 42	53	25 30
34	25 42	54	25 30
35	25 41	55	25 29
36	25 40	56	25 29
37	25 40	57	25 28
38	25 39	58	25 28
39	25 39	59	25 27
40	0,00 25 38	60	0,00 25 27
41	25 37	61	25 26
42	25 37	62	25 26
43	25 36	63	25 25
44	25 36	64	25 25
45	25 35	65	25 24
46	25 35	66	25 24
47	25 34	67	25 23
48	25 33	68	25 23
49	25 33	69	25 22
50°	0,00 25 32	70°	0,00 25 22

Формулы (20.9) и выражают теорему Лежандра для малых сферических треугольников. Если стороны плоского и сферического треугольников соответственно равны, то углы плоского треугольника равны углам сферического треугольника, уменьшенным на одну треть сферического избытка. Углы  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  называются плоскими приведенными углами. Если удерживать при выводе малые величины четвертого порядка, то разности между сферическими и плоскими приведенными углами выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A &= -\frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - a^2) \\ B_1 - B &= -\frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - b^2) \\ C_1 - C &= -\frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60R^2} (m^2 - c^2) \end{aligned} \right\}, \quad (20.11)$$

где

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Вывод этих формул см. в работе [31].

При сторонах треугольника длиной около 200 км максимальное значение члена  $\frac{\varepsilon}{60R^2} (m^2 - a^2)$  будет меньше 0,001"; в равносторонних треугольниках значение этого члена будет равно нулю. Таким образом, при решении треугольников, стороны которых не превышают 200 км, этим членом можно пренебречь.

Лишь при длинах сторон треугольников свыше 200 км следует учитывать второй член формул (20.11). Но в этом случае нельзя считать треугольники сферическими, а необходимо учитывать их сфероидичность, т. е. вводить поправочные члены, выражающие различие между углами сфероидического и сферического треугольников, имеющих соответственно равные стороны.

Формулы для вычислений этих сфероидических поправок, которые мы приводим без вывода, для углов  $A, B, C$  сфероидического треугольника имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\varepsilon''}{12} \cdot \frac{n_A - n}{n} \\ & -\frac{\varepsilon''}{12} \cdot \frac{n_B - n}{n} \\ & -\frac{\varepsilon''}{12} \cdot \frac{n_C - n}{n} \end{aligned} \right\}, \quad (20.12)$$

где

$$n_A = \frac{1}{R_A^2}; \quad n_B = \frac{1}{R_B^2}; \quad n_C = \frac{1}{R_C^2},$$

$$n = \frac{n_A + n_B + n_C}{3}.$$

$n_A, n_B$  и  $n_C$  — Гауссова кривизна вершин треугольника  $ABC$ .

Числовое значение поправок  $\frac{\varepsilon}{12} \frac{n_A - n}{3}$  при сторонах треугольников около 200 км менее 0,001", поэтому при вычислении триангуляции эти поправки в углы треугольников не вводятся. Треугольники триангуляции рассматриваются как сферические с радиусом, равным среднему радиусу кривизны той части эллипсоида, на которой расположена триангуляция.

В особых случаях может, однако, возникнуть необходимость учета поправок за сфероидичность треугольников. Если  $A, B, C$  — углы сфероидического треугольника, а  $A_1, B_1, C_1$  — углы плоского треугольника, имеющего стороны, соответственно равные сторонам сфероидического треугольника  $ABC$ , то переход к плоским приведенным углам совершается по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''n}{60} (m^2 - a^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_A - n}{n} \\ B_1 &= B - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''n}{60} (m^2 - b^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_B - n}{n} \\ C_1 &= C - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''n}{60} (m^2 - c^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \frac{n_C - n}{n} \end{aligned} \right\}. \quad (20.13)$$

Таким образом, если возникает необходимость учитывать второй поправочный член теоремы Лежандра, то надо рассматривать треугольники как сферо-

идические. Суммарное значение обеих поправок меньше 0,001", если стороны треугольника не превосходят 200 км.

Более точная формула для сферического избытка треугольников имеет вид

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho'' \left(1 + \frac{m^2}{8R^2}\right). \quad (20.14)$$

При уравнивании триангуляции 1 класса углы треугольников вычисляют, удерживая тысячные доли секунды. Отсюда следует, что ошибка в определении сферического избытка не должна превосходить величины порядка 0,0005".

Рассмотрим, при каких размерах сторон треугольников можно при вычислениях пренебрегать вторым членом в формуле для  $\varepsilon''$ . Если взять равносторонний треугольник со сторонами 90 км, то числовое значение поправочного члена  $\frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho'' \frac{m^2}{8R^2} = \varepsilon'' \frac{m^2}{8R^2}$  будет 0,0005". Следовательно, при вычислении

сферического избытка следует учитывать поправочный член  $\varepsilon'' \frac{m^2}{8R^2}$  в том случае, если стороны треугольников больше 90 км. Поскольку стороны треугольника триангуляции 1 класса обычно не превосходят 90 км, то вычисления сферического избытка практически почти всегда следует вести без учета второго члена, т. е.

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A_1}{2R^2} \rho''. \quad (20.15)$$

В последней формуле  $A_1$  — приведенный плоский угол.

Рассмотрим, в каких случаях можно пренебрегать при вычислении сферического избытка различием между углами  $A$  и  $A_1$ . Погрешность в  $\varepsilon$  вследствие ошибки в  $A$  выразится формулой

$$\Delta \varepsilon'' = \frac{bc \cos A}{2R^2} \rho'' \Delta A = \varepsilon'' \operatorname{ctg} A \Delta A.$$

Очевидно,  $\Delta A = \frac{\varepsilon''}{3\rho''}$ , поэтому

$$\Delta \varepsilon'' = \frac{\varepsilon''^2 \operatorname{ctg} A}{3\rho''}.$$

Ставя по-прежнему условие  $\Delta \varepsilon'' < 0,0005''$  и полагая, что  $\operatorname{ctg} A = 1$ , находим

$$\varepsilon''^2 = \Delta \varepsilon'' \cdot 3\rho'' = 300,$$

$$\varepsilon'' \approx 17''.$$

Следовательно, при величине сферического избытка меньше 17", что соответствует при равносторонней форме треугольников длинам сторон около 90 км, различием между  $A$  и  $A_1$  в формуле (20.15) можно пренебрегать и сферический избыток вычислить по формуле

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A}{2R^2} \rho''.$$

Если стороны треугольников близки или больше 90 км, то  $\varepsilon''$  следует вычислять двумя приближениями: сначала получить приближенное значение сферического избытка и по нему вычислить приближенное значение приведенного плоского угла

$$A_1'' = A - \frac{\varepsilon_1''}{3}.$$

С этим приближенным значением угла  $A_1'$  сферический избыток вычисляется по формуле

$$\varepsilon'' = \frac{bc \sin A_1'}{2R^2} \rho'' \left(1 + \frac{m^2}{8R^2}\right).$$

При логарифмическом вычислении сферического избытка величину  $\lg \frac{\rho''}{2R^2} = \lg f$  выбирают из специальной таблички (см. «Таблицы для вычисления геодезических координат». М., Геодезиздат, 1953). С этим обозначением формула для вычисления сферического избытка примет вид

$$\varepsilon'' = fbc \sin A.$$

При решении треугольников триангуляции 2 класса и ниже необходимость учета поправочных членов как в теореме Лежандра, так и при вычислении  $\varepsilon$  отпадает.

Для общей ориентировки приводим числовые значения сферических избытков при различных длинах сторон (для равносторонних треугольников):

$s$ км	
5	$\varepsilon \approx 0,07''$ ,
10	$\varepsilon \approx 0,25''$ ,
20	$\varepsilon \approx 1''$ ,
30	$\varepsilon \approx 2''$ ,
60	$\varepsilon \approx 8''$ .

Сферический избыток треугольников вычисляют при помощи четырехзначных или пятизначных таблиц логарифмов, обычно одновременно с предварительным решением треугольников.

В табл. 5 приведен пример решения малого сферического треугольника по теореме Лежандра.

Таблица 5

$B_m = 48^\circ 12'$							
Вершины	Углы сферического треугольника	$-\frac{\varepsilon}{3}$	Углы плоского треугольника	Синусы углов плоского треугольника	Стороны сферического треугольника	Вычисление сферического избытка $\varepsilon$	
				$D_{II} = 50\ 636,714$			
$B$	$62^\circ 12' 45,11''$	$-1,36$	$62^\circ 12' 43,75''$	0,8846 7988	44 797,282	$f$	0,002 533
$A$	50 20 19,98	$-1,36$	50 20 18,62	0,7698 2866	38 981,594	$b^2$	2007,04
$C$	67 26 59,00	$-1,37$	67 26 57,63	0,9235 4082	46 765,073	$\sin A$	0,769 831
						$\sin C$	0,923 542
						$\sin A \sin C$	0,710 971
						$b^2 \sin A \sin C$	1426,95
	180 00 04,09		180 00 00,00			$\sin B$	0,884 681
						$D_I$	1612,95
						$\varepsilon''$	4,086''

Этот пример, как и последующие три примера на решение сферических треугольников, взяты с некоторыми сокращениями и изменениями из [10].

Нетрудно установить порядок применения теоремы Лежандра к решению сферических треугольников по трем его сторонам. Очевидно, в этом случае

треугольники сначала надо решать как плоские, принимая стороны сферических треугольников прямолинейными, а к вычисленным таким образом углам треугольников прибавлять поправки, равные  $\frac{\varepsilon}{3}$ .

В этом случае формулы для вычислений будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A_1}{2} &= \frac{P}{p(p-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{B_1}{2} &= \frac{P}{p(p-b)} \\ \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} &= \frac{P}{p(p-c)} \end{aligned} \right\}, \quad (20.16)$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (20.17)$$

— площадь треугольника  $ABC$ ,

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1 + \frac{\varepsilon}{3} \\ B &= B_1 + \frac{\varepsilon}{3} \\ C &= C_1 + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \right\}. \quad (20.18)$$

Формула для вычисления сферического избытка:

$$\varepsilon'' = 2fP. \quad (20.19)$$

При соответствующих длинах сторон треугольников и точности измерений должны учитываться сфероидические поправки, приведенные в формулах (20.13), а сферический избыток — по формуле (20.14).

Пример на решение треугольника по сторонам приведен в табл. 6.

Таблица 6

Вершины	Стороны треуголь- ника	$p - s$	$p(p - s)$	$(p - b)$ $(p - c)$	$\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$	Углы плоского треугольника $B_1, A_1, C_1$	$\frac{\varepsilon}{3}$	Углы сферического треугольника $B, A, C$
$B$	44 797,28	20 474,69	1336,423	486,553	0,6033 8307	62°12'43,70"	1,36	62°12'45,06"
$A$	38 981,59	26 290,38	1716,025	378,923	0,4699 0866	50 20 18, 51	1,36	50 20 19, 87
$C$	46 765,07	18 506,90	1207,982	538,287	0,6675 3893	67 26 57, 50	1,36	67 26 58, 86
							4,08"	
$2p$	130 543,94	65 271,97	$P^2 = 650 241$					
$p$	65 271,97		$P = 806,375$					
			$2f = 0,00506$					
			$\varepsilon'' = 4,08''$					

Рассмотрим решение треугольников, образованных хордами между пунктами, расположенными на поверхности эллипсоида.



Обозначим по-прежнему через  $A, B$  и  $C$  углы треугольника, вершины которого лежат на поверхности эллипсоида, через  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — длины хорд между вершинами и через  $R$  — средний радиус кривизны в области расположения треугольника, принимаемого за сферический.

Имеем:

$$\bar{a} = 2R \sin \frac{a}{2R}; \quad \bar{b} = 2R \sin \frac{b}{2R} \quad (20.20)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2R} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \frac{b}{2R} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C}} \end{aligned} \right\} \quad (20.21)$$

Из сравнения формул (20.20) с учетом (20.21) получим:

$$\bar{b} = \bar{a} \sqrt{\frac{\sin B \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}} \quad (20.22)$$

Далее

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin B \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)} &= \sqrt{\sin B \left(\sin B \cos \frac{\varepsilon}{2} - \cos B \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 B \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{ctg} B\right)} = \sin B \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \operatorname{ctg} B\right) = \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right) \end{aligned} \quad (20.23)$$

и аналогично

$$\sqrt{\sin A \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (20.24)$$

При этом при разложении функций в ряд мы ограничивались его первым членом.

Принимая во внимание (20.22), (20.23) и (20.24), окончательно напомним

$$\left. \begin{aligned} \bar{b} &= \bar{a} \frac{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)} \\ \bar{c} &= \bar{a} \frac{\sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (20.25)$$

Полученные формулы позволяют решать треугольники с достаточной точностью со сторонами до 100 км.

Для практических вычислений формулы (20.20) представим в следующем виде:

$$\bar{a} = 2R \sin \frac{a}{2R} = 2R \left( \frac{a}{2R} - \frac{a^3}{48R^3} \right) = a - \frac{a^3}{24R^2}. \quad (20.26)$$

По-прежнему вводя обозначение

$$k = \frac{1}{6R^2}, \quad (20.27)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= a - 0,25ka^3 \\ \bar{b} &= b - 0,25kb^3 \\ \bar{c} &= c - 0,25kc^3 \end{aligned} \right\}, \quad (20.28)$$

где  $k = 409 \cdot 10^{-11}$  (при таком значении  $k$  длины сторон выражаются в десятых долях километра).

Из изложенного вытекает порядок вычислений:

1. Вычисление углов  $(B - \frac{\varepsilon}{4})$ ,  $(A - \frac{\varepsilon}{4})$ ,  $(C - \frac{\varepsilon}{4})$ .

2. Переход от длины исходной стороны к соответствующей ей хорде по формуле (20.28).

3. Вычисление искомых длин хорд треугольника по формулам (20.25).

Пример на решение сферического треугольника по хордам\*.

Данные для вычислений взяты из примера на решение треугольника по способу Лежандра, исходная сторона  $AC = \bar{b}$ .

Решение:

1. Вычисление углов:

$$B - \frac{\varepsilon}{4}, \quad A - \frac{\varepsilon}{4}, \quad C - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сферические углы	$-\frac{\varepsilon}{4}$	Исправленные углы
$B \ 62^\circ 12' 45,11''$	$-1,022''$	$62^\circ 12' 44,088''$
$A \ 50 \ 20 \ 19,98$	$-1,022$	$50 \ 20 \ 18,958$
$C \ 67 \ 26 \ 59,00$	$-1,022$	$67 \ 26 \ 57,978$
$180 \ 00 \ 04,09$	$-3,066$	$180 \ 00 \ 01,024$

2. Вычисление исходной стороны  $\bar{b}$  хордового треугольника

$$\bar{b} = b - 0,25k \cdot b^3$$

$$(0,25k = 102 \cdot 10^{-11})$$

$b_0$	44 797,282
$b^2$	20 070
$b^3$	899 136
$0,25k \cdot b^3$	0,092 м
$\bar{b}$	44 797,190

\* Пример заимствован из [10].

### 3. Вычисление сторон $\bar{a}$ и $\bar{c}$ .

$$\bar{a} = \frac{\bar{b}}{\sin \left( B - \frac{\varepsilon}{4} \right)} \sin \left( A - \frac{\varepsilon}{4} \right),$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{b}}{\sin \left( B - \frac{\varepsilon}{4} \right)} \sin \left( C - \frac{\varepsilon}{4} \right),$$

$\bar{b}$	44797, 190
$\sin \left( B - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	0,8846 8064
$\sin \left( A - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	0,7698 2971
$\sin \left( C - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	0,9235 4147
$b : \sin \left( B - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	50 636, 566
$\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$	38 981, 533
	46 764, 968

#### Контрольные вычисления

$b : \sin \left( B - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	50 636, 566
$a : \sin \left( A - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	50 636, 566
$c : \sin \left( C - \frac{\varepsilon}{4} \right)$	50 636, 565

### § 21. Решение треугольников по способу аддитаментов

При решении треугольников по теореме Лежандра, рассмотренной выше, поправки за сферичность для применения формул плоской тригонометрии вводились в углы; возможно использование и сферических углов, но с введением поправок — аддитаментов — в стороны. Изложим этот способ.

Сохраняя прежние обозначения, для сферического треугольника  $ABC$  имеем:

$$\sin \frac{b}{R} = \sin \frac{a}{R} \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (21.1)$$

Раскладывая  $\sin \frac{b}{R}$  и  $\sin \frac{a}{R}$  в ряд и ограничиваясь по-прежнему первыми двумя членами разложения, получим

$$\frac{b}{R} \left( 1 - \frac{b^2}{6R^2} \right) = \frac{1}{R} \left( a - \frac{a^3}{6R^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A}. \quad (21.2)$$

Введем обозначения

$$A_a = \frac{a^3}{6R^2} = ka^3; \quad a - ka^3 = a';$$

$$b' = \frac{a' \sin B}{\sin A}, \quad (21.3)$$

тогда

$$b = \frac{a' \sin B}{\sin A} \left( 1 + \frac{b^2}{6R^2} \right) = b' \left( 1 + \frac{b^2}{6R^2} \right) = b' + \frac{b'^3}{6R^2}. \quad (21.4)$$

Обозначая аналогично

$$A_b = \frac{b^3}{6R^2} = kb^3, \quad (21.5)$$

напишем окончательно

$$b = b' + A_b. \quad (21.6)$$

Для стороны  $c$  соответствующие формулы будут:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{a' \sin B}{\sin A}, \\ A_c &= \frac{c^3}{6R^2} = kc^3, \\ c &= c' + A_c. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Величина  $A_s$  называется аддитаментом стороны  $s$ .

С целью упрощения вычислений следует пользоваться таблицей аддитаментов.

Значение  $k$  для территории СССР можно считать равным

$$k = \frac{1}{6R^2} = 409 \cdot 10^{-11}. \quad (21.8)$$

При этой размерности  $k$  стороны треугольников должны быть выражены в десятых долях километра.

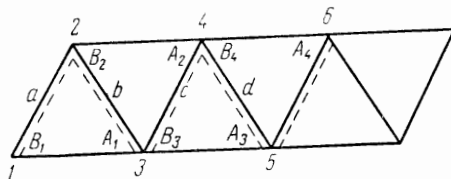


Рис. 41

Порядок вычислений при применении способа аддитаментов будет следующий:

1. Из исходной стороны  $a$  вычитается ее аддитамент  $A_a$  и таким образом вычисляется  $a'$ ;

2. С полученным значением  $a'$  треугольник решается как плоский с использованием сферических углов, т. е. вычисляются  $b'$ ,  $c'$ ;

3. Полученные значения  $b'$ ,  $c'$  исправляют аддитаментами  $A_b$  и  $A_c$  и получают искомые значения сторон треугольника.

Очевидно, при вычислении длин сторон вдоль триангуляционного ряда (рис. 41) достаточно исправить исходную сторону  $a$  аддитаментом  $A_a$ , далее с этим значением  $a'$  решить все треугольники как плоские при помощи сферических углов и затем исправить вычисленные значения сторон их аддитаментами.

Пример на решение треугольника по способу аддитаментов приведен в табл. 7\*.

Таблица 7

Вер- шины	Углы сферического треугольника	Синусы углов сферического треугольника	Приближенные стороны $a', b', c'$	Аддита- менты $A_s$	Стороны сферического треугольника
$A$	$50^{\circ}20'19,98''$	0,7698 3287	38 981, 350	0,243	38 981, 593
$B$	$62^{\circ}12'45,11''$	0,8846 8295	44 796, 914	0,368	44 797, 282
$C$	$67^{\circ}26'59,00''$	0,9235 4337	46 764, 654	0,419	46 765, 073

Способ аддитаментов применим для решения треугольников со сторонами примерно до 100 км.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ШИРОТ, ДОЛГОТ И АЗИМУТОВ

## § 22. Общие сведения

Конечная цель основных геодезических работ — определение координат геодезических пунктов. Так как в геодезических вычислениях фигура Земли принимается за эллипсоид вращения, то, следовательно, задача сводится к вычислению координат отдельных точек поверхности эллипсоида вращения. Положение геодезических пунктов может быть определено в различных системах координат; каждой системе координат соответствуют свои методы и формулы вычислений.

В этой главе рассмотрены методы вычисления геодезических координат, т. е. геодезических широт, долгот и азимутов.

Характерная особенность геодезических измерений заключается в том, что они доставляют данные, определяющие относительно взаимное положение геодезических пунктов. Так, в результате развития сетей триангуляции, проложения ходов точной полигонометрии (независимо от примененных методов измерений) получают расстояния между геодезическими пунктами, углы фигур, образованных этими пунктами, но из одних только геодезических измерений не может быть определено положение геодезических пунктов на земном эллипсоиде в виде их координат в какой-либо системе. Для вычисления геодезических координат какой-либо системы пунктов должны быть заданы или определены необходимые исходные данные, устанавливающие положение этой системы пунктов на эллипсоиде и ее ориентировку относительно параметрических линий меридианов и параллелей.

В качестве исходных данных, необходимых для вычисления геодезических координат пунктов, должно быть задано положение на поверхности эллипсоида двух каких-либо пунктов данной сети. Положение этих двух пунктов может быть задано: а) геодезическими координатами одного пункта, расстоянием и азимутом на второй пункт или б) геодезическими координатами обоих пунктов.

В первом случае даны геодезические координаты  $B_1$  и  $L_1$  для пункта  $A$  (рис. 42), азимут  $A_{1,2}$  геодезической линии  $AB$  и расстояние  $s_{1,2}$  между пунктами  $A$  и  $B$ ; требуется определить широту  $B_2$  и долготу  $L_2$  точки  $B$  и обратный азимут  $A_{2,1}$  с точки  $B$  на точку  $A$ .

Такая задача называется прямой геодезической задачей.

Вычисление координат пунктов триангуляционного ряда (сети или полигонометрического хода) заключается в последовательном решении прямой геодезической задачи по некоторой ходовой линии геодезического ряда; при каждом решении такой задачи по данной стороне искомые координаты и азимуты предыдущей задачи становятся исходными для решения задачи по данной стороне.

Во втором случае, когда по данным геодезическим координатам пунктов  $A$  и  $B$  вычисляют расстояние между этими пунктами, прямой и обратный азимуты

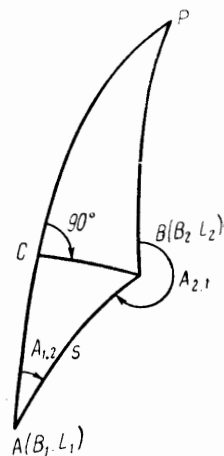


Рис. 42

линии  $A - B$ . Такая задача называется обратной геодезической задачей. Так, например, после уравнивания отдельных звеньев триангуляции 1 класса для полигонального уравнивания необходимо вычислять длины, прямой и обратный азимут геодезической линии, соединяющей конечные точки звена. В этом случае решается обратная геодезическая задача.

Прямую и обратную геодезические задачи называют главными геодезическими задачами.

Приведенное выше описание главных геодезических задач дано применительно к случаю вычисления геодезических координат пунктов государственной геодезической сети.

Этот случай характерен тем, что вычисление геодезических координат приходится вести на расстояния, не превышающие, как правило, 30—40 км, а требуемая точность вычисления координат достаточно высока. Иногда возникает необходимость вычисления прямой и обратной геодезических задач при расстояниях между пунктами в несколько сот, а в ряде случаев и в несколько тысяч километров. Необходимость решения таких задач возникает в различных целях. Например, при передаче координат на другие континенты при изучении их движения. Разнообразие в расстояниях, по которым возникает необходимость решения главных геодезических задач, различные требования к точности не позволяют рекомендовать какой-либо единый метод и единые формулы. Поэтому, в зависимости от указанных условий, целесообразно применять различные методы и формулы решения задач.

Условно расстояния можно подразделить на четыре группы:

1. Малые расстояния — до 30—45 км.
2. Средние расстояния — до 600 км.
3. Большие расстояния — до 5000 км.
4. Очень большие расстояния — до 19 000 км.

К первой группе расстояний относятся длины сторон триангуляции 1 класса.

Геодезические сети 2 класса и ниже в СССР обычно вычисляют на плоскости в принятой проекции Гаусса — Крюгера; в этом случае вычисляют прямоугольные плоские координаты. Когда речь идет о расчетах в пределах небольших расстояний и площадей, то, конечно, наиболее целесообразно использовать геодезические данные в прямоугольной системе координат. Но когда геодезические вычисления должны быть выполнены между точками земной поверхности, расположенными на значительных расстояниях, то здесь в полной мере проявляются преимущества и достоинства системы геодезических координат, как единой для всей Земли и отнесенной непосредственно к ее поверхности.

Вот почему обязательно для инженера-геодезиста знать пути и методы решения прямой и обратной задач в системе геодезических координат при разных расстояниях, если он хочет быть подготовленным для ответа на определенный круг вопросов теории высшей геодезии и ее практического применения.

### § 23. Общие соображения о решении прямой и обратной геодезических задач

Существует два основных пути решения прямой и обратной геодезических задач, называемых прямым, или непосредственным путем решения геодезической задачи и косвенным путем решения задачи.

Прямой, или непосредственный путь решения главной геодезической задачи заключается в решении сфероидического треугольника  $APB$  (рис. 43).

В этом случае известны две стороны —  $AP = 90^\circ - B_1$ ,  $AB = s$  и угол между ними  $A_{1,2}$ . Из решения треугольника непосредственно определяются три остальных элемента, являющиеся искомыми, —  $BP = 90^\circ - B_2$ , т. е. широта  $B_2$ ;  $(360^\circ - A_{2,1})$ , т. е. обратный азимут  $A_{2,1}$ , и  $l$  — разность долгот пунктов  $A$  и  $B$ , по которой легко находится долгота  $L_2 = L_1 + l$ . При решении обратной геодезической задачи известны следующие три элемента:  $B_1$ ,  $B_2$  и  $l$ . Из решения треугольника находят углы  $PAB = A_{1,2}$ ,  $PBA = 360^\circ - A_{2,1}$  и сторону  $AB = s$ , т. е. расстояние между заданными пунктами.

Таким образом, для прямого пути решения главной геодезической задачи характерно непосредственное определение элементов треугольника  $ABP$ , являющихся искомыми величинами.

Косвенный путь решения главной геодезической задачи заключается в выводе разностей широт, долгот и азимутов данного и определяемого пунктов.

Следовательно, для косвенного пути решения задачи характерен вывод разностей искомых и данных величин, т. е.  $(B_2 - B_1)$ ,  $(L_2 - L_1)$  и  $(A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ)$ , после чего определяемые геодезические координаты получаются из выражений:

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + (B_2 - B_1), \\ L_2 &= L_1 + (L_2 - L_1), \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + (A_{2,1} - A_{1,2}). \end{aligned}$$

Формулы для решения обратной геодезической задачи обычно получаются из формул для решения прямой задачи путем соответствующих математических преобразований, поэтому в последующих параграфах внимание будет сосредоточено на рассмотрении различных методов решения прямой геодезической задачи. Для решения же обратной задачи будут даны с соответствующим обоснованием только наиболее употребительные формулы.

Возвращаясь к прямому пути решения главной геодезической задачи, необходимо указать, что решение треугольника  $APB$ , как треугольника сфероидического, не может быть выполнено в элементарных функциях в замкнутой форме. Это, конечно, понятно: стороны упомянутого треугольника, как геодезические линии на поверхности эллипсоида, выражаются эллиптическими интегралами, не поддающимися интегрированию в элементарных функциях. Поэтому при решении главной геодезической задачи с применением прямого пути поступают следующим образом: от сфероидического треугольника  $APB$  переходят к треугольнику некоторой вспомогательной сферы и устанавливают одновременно аналитическую или геометрическую связь между элементами обоих треугольников. Этот методический прием решения задачи прямым путем, конечно, может считаться достаточно целесообразным и обоснованным для соответствующих случаев, если учесть, что земной эллипсоид имеет сравнительно малое сжатие  $\alpha \approx \frac{1}{300}$ , вследствие чего при удачном выборе способа перехода на сферу различие в элементах обоих треугольников при не очень больших расстояниях будет незначительно и легко учитываемо.

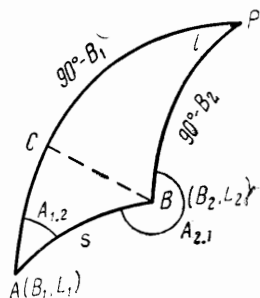


Рис. 43



После перехода от эллипсоидального треугольника к сферическому определяют все элементы последнего, затем, пользуясь теми же законами связи сфероидического и сферического треугольников, осуществляют обратный переход на сфероид, т. е. определяют элементы сфероидического треугольника, являющиеся искомыми, в прямой геодезической задаче: широта второго пункта, разность долгот обоих пунктов и обратный азимут.

Во всех способах прямого пути решения главной геодезической задачи сферическая поверхность используется как промежуточная инстанция; она может быть использована и при выводе формул, и в процессе практических вычислений. Решение треугольника на сфере производят по замкнутым формулам; переход же от элементов сфероидического треугольника к сферическому и обратно — по разомкнутым формулам.

Остановимся в общих чертах на принципиальной стороне рассматриваемой задачи.

В § 13 получены дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{V^3}{c} \cos A \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{V}{c} \sec B \sin A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A \end{aligned} \right\}. \quad (23.1)$$

После интегрирования уравнений (23.1) вдоль отрезка  $s$  между точками 1 и 2 получим

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \int_0^s \frac{V^3}{c} \cos A \, ds \\ L_2 &= L_1 + \int_0^s \frac{V}{c} \sec B \sin A \, ds \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + \int_0^s \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A \, ds \end{aligned} \right\}. \quad (23.2)$$

Формулы (23.2) дают в общем виде решение прямой геодезической задачи. Однако в общем виде уравнения (23.2) проинтегрировать нельзя, так как подынтегральная функция зависит от аргументов  $A$  и  $B$ , выразить которые в функции переменной интегрирования  $s$  в замкнутом виде не представляется возможным; сложность задачи увеличивается также и вследствие того, что функции  $V$  и  $c$  зависят и от эксцентриситета  $e$ .

Поэтому неизбежным становится использование рядов или применение описанного выше приема с переносом элементов сфероидического треугольника на сферу, решением задачи на ней и обратным переходом на поверхность эллипсоида. Заметим попутно, что при переходе на сферу стороны сфероидических треугольников должны изображаться дугами больших кругов; в этом случае решение задачи на сфере производится по элементарным формулам сферической тригонометрии.

Возвращаясь к использованию рядов для решения геодезической задачи, отметим следующее. При интегрировании уравнений (23.2) возможно разложение в ряды по возрастающим степеням  $s$  или  $e^2$ . При сравнительно малых рас-

стояниях по сравнению с радиусом Земли (25—50 км, но не свыше 400 км) выгоднее использовать ряды по степеням  $s$ ; в этом случае будет иметь место хорошая сходимости членов рядов. При больших расстояниях, вследствие слабой сходимости рядов, разложение по возрастающим степеням  $s$  практически непригодно. При  $\frac{s}{R} > 1$  ряды расходятся. В этом случае при интегрировании уравнений (23.2) используется разложение по степеням  $e^2$ .

При решении геодезической задачи на сравнительно малые расстояния целесообразно применять косвенный путь решения задачи и использовать ряды по возрастающим степеням  $s$ .

Пусть даны координаты начальной точки  $A (B_1, L_1)$  и азимут  $A_{1,2}$  элемента геодезической линии  $ds$ , тогда искомые координаты конечной точки геодезической линии и азимут ее, т. е.  $B_2, L_2, A_{2,1}$ , будут функцией от  $s$ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= f_1(s) \\ L_2 &= f_2(s) \\ A_{2,1} &= f_3(s) \end{aligned} \right\}, \quad (23.3)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= f_1(0) \\ L_1 &= f_2(0) \\ A_{1,2} &= f_3(0) \end{aligned} \right\}. \quad (23.4)$$

Применив строку Маклорена и принимая во внимание (23.1) и (23.2), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left( \frac{dB}{ds} \right)_1 s + \left( \frac{d^2B}{ds^2} \right) \frac{s^2}{2} + \left( \frac{d^3B}{ds^3} \right) \frac{s^3}{6} + \dots \\ L_2 - L_1 &= \left( \frac{dL}{ds} \right)_1 s + \left( \frac{d^2L}{ds^2} \right) \frac{s^2}{2} + \left( \frac{d^3L}{ds^3} \right) \frac{s^3}{6} + \dots \\ A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ &= \left( \frac{dA}{ds} \right)_1 s + \left( \frac{d^2A}{ds^2} \right) \frac{s^2}{2} + \left( \frac{d^3A}{ds^3} \right) \frac{s^3}{6} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (23.5)$$

Первые производные выражаются уравнениями (23.1), которые перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{V^3}{c} \cos A = \frac{\cos A}{M} \\ \frac{dL}{ds} &= \frac{V}{c} \sec B \sin A = \frac{\sin A}{N \cos B} \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A = \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N} \end{aligned} \right\}. \quad (23.6)$$

Вторые производные получаются путем дифференцирования выражений (23.6). При этом не будем принимать во внимание сфероидичность Земли, т. е. примем радиусы кривизны  $N$  и  $M$  постоянными, что допустимо при  $s \leq 30$  км. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2B}{ds^2} &= - \frac{\sin^2 A}{MN} \operatorname{tg} B \\ \frac{d^2L}{ds^2} &= \frac{\operatorname{tg} B \sec B \sin 2A}{MN} \\ \frac{d^2A}{ds^2} &= \frac{\sin A \cos A (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B)}{MN} \end{aligned} \right\}. \quad (23.7)$$

Из выражений (23.5) легко усматривается, что чем меньше  $s$ , тем лучшую сходимость имеют ряды, и, следовательно, можно ограничиться меньшим числом членов при сохранении одного и того же значения остатка, т. е. с сохранением одинаковой точности вычислений.

Полученные формулы непригодны по точности для сторон триангуляции 1 класса, которые могут превосходить указанное предельное значение  $s = 30$  км. Необходимо, в зависимости от длин сторон, учитывать третий и последующие члены, принимать во внимание непостоянство  $M$  и  $N$  и зависимость их значений от широты; естественно, учет отмеченных обстоятельств приводит при использовании рядов (23.5) к сравнительно громоздким и сложным для практических вычислений формулам.

Существуют способы и приемы использования рядов по возрастающим степеням  $s$ , которые упрощают формулы, а следовательно, и вычисления, обеспечивая достаточную точность решения геодезической задачи для предельных сторон треугольников 1 класса и даже более.

Рассмотрим далее три способа.

1. Формулы, основанные на использовании средней широты и среднего азимута стороны, по которой решается геодезическая задача. Вычисление производных при среднем значении аргументов позволяет улучшить сходимость членов ряда вследствие исключения членов ряда с четными степенями.

2. Формулы для решения задачи по так называемому способу вспомогательной точки. Сущность способа заключается в том, что искомая разность координат определяемой и данной точек вычисляется не непосредственно, а через целесообразно выбранную вспомогательную точку, в результате чего отдельные члены разложения становятся малыми, а погрешности их пренебрегаемыми.

3. Метод решения задачи, основанный на использовании вспомогательной сферы.

В этом способе треугольник  $APB$  (см. рис. 43) изображается на сфере по определенному закону и по известным данным геодезической задачи.

После решения полученного сферического треугольника осуществляется обратный переход со сферы на сфероид, но, в отличие от прямого пути решения задачи, треугольник на сфере решается по особым формулам, позволяющим находить разности элементов этого треугольника (а не сами элементы, как при прямом пути решения задачи). Переход со сферы на сфероид осуществляется также путем переноса разностей его элементов, являющихся искомыми разностями широт, долгот и азимутов. В этом состоит принципиальное отличие этого метода косвенного пути решения задачи от прямого. Легко понять, что чем меньше разности координат между вычисляемыми пунктами, тем меньше редукции для перевода этих разностей с эллипсоида на сферу и обратно и тем большие могут быть допущены упрощения соответствующих формул. На основании этих общих соображений приходим к выводу, что указанный метод решения главной геодезической задачи целесообразно применять при сравнительно незначительных расстояниях между пунктами.

Конечно, законов изображения сфероидического треугольника на сфере может быть предложено множество.

В рассмотренном далее способе использована теория Гауссова конформного изображения эллипсоида на шаре.

Несколько отличается метод решения главной геодезической задачи, основанный на замене сфероидических треугольников соответствующими плоскими, образованными из хорд эллипсоида, в результате чего получаются замкнутые

формулы, определяющие искомые разности координат и пригодные для решения задачи при любых расстояниях между пунктами.

На этот метод обратил внимание М. С. Молоденский. Заметим, что формулы Молоденского позволяют вести вычисления координат точек физической поверхности Земли. Формулы для вычисления координат точек поверхности эллипсоида получаются из формул Молоденского как частный случай при  $H = 0$ .

## § 24. О точности вычисления геодезических координат — широт, долгот, азимутов

### 1. Общие соображения

При вычислении геодезических координат должно выполняться условие необходимой и достаточной точности вычислений. Для этого следует:

а) обеспечить уверенное получение в конечных результатах вычислений тех долей принятых единиц, которые соответствовали бы исходным данным и установленным требованиям;

б) производить вычисления с удержанием необходимого и достаточного числа десятичных знаков (натуральных или логарифмических); при недостаточном числе знаков не выполняются требования к точности вычислений, а при избыточном числе излишне затрачиваются силы и средства;

в) применять для вычислений координат методы и формулы, наиболее соответствующие условиям поставленной задачи.

Особо приходится считаться с тем, что для вычислений геодезических координат применяются формулы в виде рядов, поэтому необходимо при использовании тех или иных формул правильно ограничивать число членов этих рядов.

### 2. О точности вычисления окончательных значений координат

Методическая основа расчета необходимой точности вычисления окончательных значений геодезических координат остается такой же, как в других геодезических вычислениях. Она состоит в выполнении условия, чтобы суммарные ошибки различных этапов вычислений искомых величин были в 5—10 раз меньше влияния ошибок исходных данных. Это требование понятно — точность координат пунктов должна определяться только ошибками используемых исходных данных для вычислений, но отнюдь не должна зависеть от недостаточной строгости вычислительных действий. Это условие должно соблюдаться и при решении обратной геодезической задачи.

Рассмотрим некоторые типичные случаи. Установим требуемую точность вычислений геодезических координат пунктов государственной опорной геодезической сети. Точность вычисления окончательных значений геодезических координат должна соответствовать в указанном выше смысле точности полевых измерений. Ставя условие, чтобы ошибки вычислений были в 5—10 раз меньше влияния ошибок полевых измерений, мы можем считать, что ошибки в координатах будут зависеть только от ошибок полевых измерений.

Поскольку вычисление координат пунктов геодезической сети распадается на последовательное раздельное решение задач между каждыми двумя смежными пунктами сети, то достаточно рассмотреть вопрос о точности вычислений на примере решения отдельно взятой задачи. В качестве типичного случая рассмотрим равнобедренный треугольник триангуляции.

Положение третьей вершины такого треугольника относительно двух других его вершин определится с линейной ошибкой  $m$ , которую для наших целей достаточно вычислить по формуле

$$m = \pm \frac{\mu'' s}{\rho'' \sin 60^\circ},$$

где  $s$  — длина стороны треугольника,

$\mu$  — средняя квадратическая ошибка измеренного угла,

$\rho'' = 206\,265$ .

Обозначая составляющие этой ошибки по осям координат через  $m_x$  и  $m_y$ , можем написать

$$m_x = m_y = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Рассчитаем числовые значения этих ошибок, приняв точность триангуляции:

1 класса  $s = 20-25$  км  $\mu = \pm 0,6''$   $m_x = m_y \approx \pm 6$  см,

2 класса  $s = 7-20$  »  $\mu = \pm 1,0$   $m_x = m_y \approx \pm 6$  »,

3 класса  $s = 5-8$  »  $\mu = \pm 1,5$   $m_x = m_y \approx \pm 6$  ».

Конечно, пункты триангуляции 2 и 3 классов определяются в системе плоских прямоугольных координат. Однако приведенный выше расчет позволяет сделать общий вывод, что порядок влияния ошибок полевых измерений на взаимное положение пунктов триангуляции одинаков для всех классов, поэтому координаты пунктов государственной триангуляции всех классов должны вычисляться с одной и той же точностью, т. е. с сохранением одинакового числа знаков.

Итак, принимая ошибку во взаимном положении смежных пунктов триангуляции по осям координат в 6 см, мы должны потребовать, чтобы ошибки вычисления разности широт, долгот исходного и определяемого пунктов находились в пределах 0,6—1,0 см.

Имея в виду, что  $m_B'' = \frac{m_x}{M} \rho''$  и  $m_L'' = \frac{m_y}{N} \rho'' \sec B$ , или, иначе, что длина дуги в  $1''$  большого круга земного шара равна приблизительно 30 м, получаем для  $m_x = m_y = 1$  см

$$m_B'' = 0,0003'',$$

$$m_L'' = 0,0003'' \sec B,$$

или для широты  $B = 56^\circ$

$$m_L'' = 0,0005''.$$

Как увидим далее, разность координат двух смежных пунктов получается как сумма двух-трех слагаемых. Поэтому приходим к выводу, что вычисление широт и долгот пунктов триангуляции следует вести с надежным удержанием десяти тысячных долей секунды; в этом случае вычисление геодезических координат определяемого пункта относительно исходного будет определяться с ошибкой порядка 0,0002—0,0003'' по широте и 0,0002 sec  $B$  — 0,0003'' sec  $B$  по долготе, что близко к крайнему пределу точности вычисления, т. е. к 1 см.

Остановимся на точности вычисления азимутов при вычислении координат пунктов триангуляции. При уравнивании триангуляции 1 класса поправки направлений вычисляются до тысячных долей секунды и окончательные резуль-

таты при составлении каталогов округляют до сотой доли секунды. Иначе говоря, при округлении значений уравненных направлений допускается ошибка до  $0,005''$ . С этой точностью уравненные значения углов треугольников должны соответствовать разности азимутов направлений, образующих данный угол. Так как разность прямого и обратного азимутов вычисляется почти всегда как сумма трех слагаемых, то при вычислении азимутов в триангуляции 1 класса необходимо сохранять тысячные доли секунды.

Смещение одного конца линии длиной в 25 км на  $0,0003''$  дуги нормального сечения или в линейной мере 1 см соответствует изменению ее азимута на величину порядка  $0,07''$ . Поэтому при вычислении азимутов направлений по координатам конечных точек линии (обратная геодезическая задача), при указанной точности вычислений, полного совпадения вычисленного азимута с его значением, которое использовалось при вычислении прямой геодезической задачи по данной стороне, может и не быть. Здесь возможны расхождения до  $0,02—0,03''$  (если координаты взяты с указанной точностью).

Таким образом, полного соответствия между точностью вычисления координат пунктов (широт и долгот) и азимутов направлений нет; это понятно, так как установленная выше точность вычисления азимутов определена исходя из иного условия.

Накопление ошибок вычислений координат вдоль триангуляционного ряда будет значительно слабее, чем накопление ошибок в передаче координат, вызванных ошибками измерений углов. В этом нетрудно убедиться, сравнивая законы накопления указанных ошибок. Как известно, продольный или поперечный сдвиг ряда, обусловленный ошибками углов триангуляции, возрастает пропорционально  $n^{3/2}$ , где  $n$  — число передач в ряде. Накопление ошибок вычислений как случайных величин происходит пропорционально  $n^{1/2}$ . Таким образом, высокие требования к точности вычисления координат, установленные выше, должны обеспечить практическое исключение ошибок вычислений во взаимном положении смежных пунктов, как основы для развития сетей триангуляции низших классов.

Р а с с м о т р и м п р и м е р. Триангуляционный ряд протяженностью 400 км состоит из звеньев триангуляции со сторонами треугольников 25 км. Сторон, участвующих в передаче координат, будет 16. Полагая продольный и поперечный сдвиг звена триангуляции 1 класса  $\pm 0,7$  м, получаем, что конечный пункт ряда относительно начального определится по осям координат с ошибкой  $\pm 0,7 \cdot \sqrt{2} = \pm 1$  м, или, в единицах дуги нормального сечения,  $\pm 0,03''$ . Накопление же ошибок вычислений координат будет  $\pm 0,0003'' \sqrt{16} = \pm 0,0012$ , т. е. в 25 раз меньше.

Пусть требуется решить обратную геодезическую задачу между конечными пунктами указанного ряда. Длина геодезической линии в таком ряде определится с ошибкой  $1 : 400\,000$ , что составляет 10 единиц 7-го знака логарифма, а азимут этой линии — с ошибкой около  $0,5''$ . Отсюда можно сделать вывод, что достаточно вычислить логарифм длины геодезической линии с удержанием единицы 7-го знака, а азимута — до  $0,01''$ . Необходимо при установлении точности вычислений учитывать значения погрешностей в исходных данных. Возьмем такой случай.

Требуется вычислить длину геодезической линии между двумя пунктами и азимут с одного пункта на другой; координаты пунктов определены по картам. Но оба пункта расположены в районах, где в качестве геодезической основы картографирования использованы геодезические сети, построенные в разных

системах. Прежде чем приступить к вычислению искомых величин, т. е. к решению обратной геодезической задачи, необходимо сделать расчет влияния на взаимное положение пунктов, определенных указанными координатами, различия систем координат (разные начала координат, различные размеры и ориентировки эллипсоида); искажений проекций; ошибок графического определения координат по картам; случайных ошибок геодезических связей в каждой системе координат и т. п. Определив таким образом взаимную ошибку координат пунктов, затем установим необходимую точность вычислений искомых расстояний и азимутов.

Приведенные примеры и расчеты не исчерпывают, конечно, всех случаев, имеющих на практике; они являются только иллюстрацией методического порядка, который должен быть применен при установлении необходимой и достаточной точности вычислений при решении главной геодезической задачи.

### 3. О точности формул для вычисления геодезических координат

Изложенные выше соображения и выводы о точности вычислений не затрагивали вопроса о точности формул, применяемых для вычисления координат.

В предыдущих рассуждениях как бы предполагалось наличие точных формул для вычислений. Между тем используемые формулы для вычисления координат основаны на разложениях функций в бесконечные ряды. Поэтому все применяемые формулы вычислений в этом смысле являются нестрогими и неточными. Конечно, используя соответствующее число членов ряда, можно получить формулы для вычислений с любой заданной точностью. Поэтому всегда вывод тех или иных формул для вычисления координат необходимо сопровождать исследованиями об их точности при сохранении того или иного числа членов в рядах. Практически приходится, исходя из заданной точности получения формул, устанавливать члены, подлежащие учету при разложении рядов, и вводить их в формулы в виде поправочных членов. Другие члены рядов, по их малости, приходится считать пренебрегаемыми по сравнению с заданной точностью и не вводить их в получаемые формулы. Критерием точности тех или иных формул является степень малой величины, которой пренебрегали при выводе формул. Малые величины, степень которых характеризует величину учтенных или отброшенных членов, должны быть оговорены.

При выводе формул для решения главной геодезической задачи за такую малую величину обычно принимают отношение  $\frac{s}{R}$ . При получении формул для вычисления геодезических координат пунктов триангуляции, т. е. когда  $s = 30$  км, отношение  $\frac{s}{R} = \frac{1}{200}$ ; поэтому считается, что  $e^2 = \frac{1}{150}$ ,  $\alpha = \frac{1}{300}$ ,  $(B_2 - B_1)$  суть величины того же порядка малости, что и  $\frac{s}{R}$ . Следовательно, такие члены формул, как  $e^2 \frac{r}{R}$ ,  $e^2 (B_2 - B_1)$ , — члены второго порядка малости.

При выводе формул решения геодезической задачи на значительные расстояния, например на 200 км, величина  $\frac{s}{R} = \frac{1}{30}$ ; так как  $e = \frac{1}{13}$ , то величина  $\alpha = \frac{e^2}{2}$  уже будет второго порядка малости.

Иногда за малую величину, степень которой характеризует точность формул, принимается  $e$ . Так, например, в формулах дуги меридиана их точность характеризуется степенью  $e$  в отброшенных членах ряда. Для характе-

ристики точности формул следует принимать за основу не порядок малости сохраненных членов ряда, а порядок малости отброшенных членов.

Чтобы обеспечить необходимую точность вычислений, необходимо в формулах сохранять члены, дающие основание считать их практически точными. Для этого необходимо, чтобы формула по точности имела по крайней мере десятикратный «запас прочности».

Исходя из указанных соображений, приведем расчеты по обоснованию требуемой точности формул для вычисления координат пунктов триангуляции 1 класса. Положим  $s = 30$  км или (в дуговой мере)  $1000''$ . Поставим условие, чтобы порядок ошибок формул был в десять раз меньше реальной точности вычислений координат ( $0,0003''$ ), тогда отбрасываемые при выводе формул члены должны быть меньше  $0,00003''$  или в относительной форме вызываемая этим ошибка  $\frac{0,00003}{1000} = 3 \cdot 10^{-8}$ . При таком значении  $s \frac{s}{R} = \frac{1}{200}$ . Подсчитав, получаем:

$$\left(\frac{s}{R}\right)^3 = \sim 10^{-7}; \quad \left(\frac{s}{R}\right)^4 = 6 \cdot 10^{-10}.$$

Отсюда делаем вывод, что если длины сторон триангуляции меньше 30 км, то необходимо в формулах сохранять члены третьего порядка малости и можно пренебрегать членами четвертого порядка.

В СССР длины сторон триангуляции 1 класса нередко достигают 40—50 км, а в отдельных случаях и 60 км. Произведя аналогичный расчет, приходим к выводу, что в этом случае ограничиваться только членами третьего порядка недостаточно. Поэтому при вычислении геодезических координат пунктов триангуляции 1 класса обычно применяют формулы с удержанием членов четвертого порядка малости.

Следует ясно представить себе, что должно быть полное соответствие между точностью вычислений, используемым числом десятичных знаков и точностью применяемых формул.

При применении методов прямого пути решения главной геодезической задачи, как уже указывалось, точность формул характеризуется точностью рабочих формул связи элементов эллипсоидального и соответствующего ему сферического треугольника.

Мы видим, что способы решения геодезической задачи достаточно разнообразны. И это не случайно. В практике возникает необходимость вычислений координат на разные расстояния и с различной точностью.

## § 25. Формулы для решения прямой геодезической задачи по способу вспомогательной точки, вывод формул по Красовскому

Пусть даны координаты точки  $A$ : широта  $B_1$  и долгота  $L_1$ , азимут  $A_{1,2}$  геодезической линии с  $A$  на  $B$  и расстояние  $s$  между точками  $A$  и  $B$ ; требуется определить координаты  $B_2$  и  $L_2$  и обратный азимут  $A_{2,1}$  с точки  $B$  на точку  $A$  (см. рис. 42).

Настоящий способ решения прямой геодезической задачи основан на применении косвенного пути решения задачи; как уже указывалось, он заключается в том, что непосредственно определяют не координаты точки  $B$ , а разности координат точек  $A$  и  $B$ , после чего легко находятся и искомые координаты второй точки.



Общий путь решения задачи путем введения вспомогательной точки, через которую осуществляется вычисление координат, указан выше.

Построим вспомогательную точку  $C$  на меридиане  $AP$  таким образом, чтобы геодезическая линия, проходящая через точки  $B$  и  $C$ , имела в  $C$  азимут, равный  $90^\circ$ . Тогда при переходе от  $A$  к  $C$  члены в формулах со множителем  $\sin AC$  обратятся в нуль и будем иметь:

$$B_C = B_1 + \frac{AC}{M} + \dots,$$

$$L_C = L_1,$$

$$A_{CA} = -A_{AC} + 180^\circ.$$

Иначе говоря, в формуле для вычисления широты выпадают третий, пятый и т. д. члены разложения, долгота точки  $C$  равна долготе точки  $A$ , а обратный азимут получается добавлением к прямому  $180^\circ$ .

При вычислении разностей координат точек  $B$  и  $C$ , т. е. при переходе от вспомогательной точки  $C$  к искомой  $B$ , азимут  $A_{CB}$  будет равен  $\frac{\pi}{2}$ ; поэтому в формулах члены с  $\cos A_{CB}$  и  $\sin 2A_{CB}$  будут равны нулю. Тогда в формуле для широты выпадает первый член разложения, а для долгот и азимутов — второй, четвертый и т. д.

При выводе формул будем исходить из того, что длина стороны меньше 30 км и требуется обеспечить точность вычисления координат до  $0,0001''$ .

1. Решение треугольника  $ABC$  по теореме Лежандра. Так как стороны треугольника  $ABC$  малые, то его можно рассматривать как сферический и решать по теореме Лежандра.

Вершина треуголь- ника	Сферический угол	Плоский приведенный угол
$A$	$A_{1.2}$	$A_{1.2} - \frac{\varepsilon}{3}$
$B$	$90^\circ + \varepsilon - A_{1.2}$	$90^\circ - A_{1.2} + \frac{2}{3}\varepsilon$
$C$	$90^\circ$	$90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}$

Сферический избыток треугольника находится по формуле

$$\varepsilon'' = \frac{AC \cdot BC}{2R^2} \quad \rho'' = \frac{s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{2R^2} \rho''. \quad (25.1)$$

Решая треугольник  $ABC$  по теореме Лежандра, получаем:

$$\left. \begin{aligned} AC &= \frac{s \cos \left( A_{1.2} - \frac{2}{3}\varepsilon \right)}{\cos \frac{\varepsilon}{3}} = s \cos \left( A_{1.2} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \\ BC &= \frac{s \sin \left( A_{1.2} - \frac{1}{3}\varepsilon \right)}{\cos \frac{\varepsilon}{3}} = s \sin \left( A_{1.2} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \end{aligned} \right\}, \quad (25.2)$$

причем принято, что  $\cos \frac{\varepsilon}{3} = 1$ ; это вызовет ошибку в  $AC$  и  $BC$  четвертого порядка малости, а при переходе в дальнейшем к разности координат, т. е. к  $\frac{AC}{M}$  и  $\frac{BC}{N}$ , — ошибку пятого порядка малости (за величину первого порядка принята величина  $\frac{s}{R} \approx 0,005$ ; при этом величина  $e^2 \approx 0,007$  будет также величиной первого порядка).

Раскладываем последние выражения для  $AC$  и  $BC$  по строке Тейлора, ограничиваясь по малости  $\varepsilon$  двумя членами ряда и принимая во внимание (25.1):

$$AC = s \cos A_{1,2} + \frac{2}{3} \varepsilon s \sin A_{1,2} = s \cos A_{1,2} + \frac{1}{3} \frac{s^3 \sin^2 A_{1,2} \cos A_{1,2}}{R^2},$$

$$BC = s \sin A_{1,2} - \frac{\varepsilon}{3} s \cos A_{1,2} = s \sin A_{1,2} - \frac{1}{6} \frac{s^3 \sin A_{1,2} \cos^2 A_{1,2}}{R^2}.$$

Введем обозначения:

$$u = s \cos A_{1,2}; \quad v = s \sin A_{1,2}.$$

Тогда получим

$$AC = u \left[ 1 + \frac{v^2}{3R_1^2} \right], \quad (25.3)$$

$$BC = v \left[ 1 - \frac{u^2}{6R_1^2} \right] \quad (25.4)$$

и

$$\varepsilon = \frac{uv}{2R_1^2}.$$

Формулы (25.3) и (25.4) определяют длины сторон треугольника  $ABC$ .

2. Определение разности широт данной и вспомогательной точек. Так как точки  $A$  и  $C$  лежат на одном меридиане и расстояние между ними меньше 30 км, то на основании (7.15) имеем

$$b'' = \frac{AC}{M_m} \rho'', \quad (25.5)$$

где  $b''$  — искомая разность широт точек  $A$  и  $C$ ;

$M_m$  — радиус кривизны меридиана для широты  $B_m = B_1 + \frac{b}{2}$ .

Но широта  $B_m$  нам неизвестна, так как неизвестна разность  $b$ .

Поскольку

$$\frac{1}{M_m} = f(B_m) = f\left(B_1 + \frac{b}{2}\right),$$

то, применяя ряд Тейлора, получаем

$$\frac{1}{M_m} = f(B_1) + \frac{b}{2} f'(B_1) + \frac{b^2}{8} f''(B_1) + \dots, \quad (25.6)$$

или, ограничиваясь двумя членами ряда,

$$\frac{1}{M_m} = \frac{1}{M_1} + \frac{b}{2} \left\{ \frac{d}{dB_1} \left( \frac{1}{M_1} \right) \right\}, \quad (25.7)$$

находим

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{1}{M}\right)}{dB} &= \frac{d}{dB} \frac{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}{a(1-e^2)}, \\ \frac{d}{dB} \frac{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}{a(1-e^2)} &= -\frac{3}{2} \frac{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}}{a(1-e^2)} 2e^2 \sin B \cos B = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{W}{a(1-e^2)} e^2 \sin 2B = -\frac{3}{2} \frac{e^2 \sin 2B}{MW^2}\end{aligned}\quad (25.8)$$

На основании (25.7) и (25.8) определяем

$$\frac{1}{M_m} = \frac{1}{M_1} - \frac{3}{4} \frac{be^2 \sin 2B_1}{M_1 W_1^2}.$$

Заменяя величину  $b$  в поправочном члене через  $\frac{u}{M_1} = \frac{u W_1}{a(1-e^2)}$ , получаем

$$\frac{1}{M_m} = \frac{1}{M_1} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{ue^2 W_1 \sin 2B_1}{a(1-e^2)} \right]. \quad (25.9)$$

Тогда выражение для  $b$  с учетом (25.3), (25.5) и (25.9) примет вид

$$b'' = \frac{u}{M_1} \rho'' \left[ 1 + \frac{W_1^4 v^2}{3a^2(1-e^2)} \right] \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{ue^2 W_1 \sin 2B_1}{a(1-e^2)} \right]. \quad (25.10)$$

Из последнего выражения напишем формулу с ошибкой до величины третьего порядка малости, которая будет использована в последующих выводах,

$$b'' = \frac{u}{M_1} \rho'' \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''}{\rho''} \right). \quad (25.11)$$

Вводя обозначения

$$\beta'' = \frac{u}{M_1} \rho'' = (1)_1 u \quad (25.12)$$

и имея в виду, что

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{W_1^4}{a^2(1-e^2)},$$

получаем из (25.10)

$$b'' = \beta'' \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{e^2 W_1}{a(1-e^2)} \sin 2B_1 u + \frac{v^2}{3R_1^2} \right\}. \quad (25.13)$$

Логарифмируя последнее выражение и принимая во внимание, что

$$\lg(1+x) = \mu x - \frac{1}{2} \mu x^2 + \dots,$$

находим

$$\lg b'' = \lg \beta'' - \frac{3}{4} \mu \frac{e^2 W_1^{108}}{a(1-e^2)} \sin 2B_1 u + \frac{\mu^{108}}{3R_1^2} v^2. \quad (25.14)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} (4)_1 &= \frac{3}{4} \mu \frac{e^2 W_1^{108}}{a(1-e^2)} \sin 2B_1 \\ (5)_1 &= \frac{\mu^{108}}{3R_1^2} \end{aligned} \right\}, \quad (25.15)$$

приходим к формуле

$$\lg b'' = \lg \beta'' - (4)_1 u + (5)_1 v^2. \quad (25.16)$$

Более точное выражение для  $b''$  можно получить, если для разности широт точек  $A$  и  $C$  исходить из формулы (7.13), а не (7.15), т. е. вместо  $b = \frac{AC}{M_m} \rho''$  принять

$$b'' = \frac{AC}{M_m} \rho \left( 1 - \frac{e^2 b''^2}{8 \rho''} \cos 2B_m \right),$$

и, кроме того, учесть в (25.6) следующий член разложения в ряд  $\frac{b^2}{8} f''(B_1)$ . Тогда в формуле для разности широт появится дополнительный член

$$- \frac{10^8 \mu e^2}{2a^2} \cos 2B_1 u^2 = (6)_1 u^2,$$

где

$$(6)_1 = - \frac{10^8 \mu e^2}{2a^2} \cos 2B_1.$$

В этом случае более точное выражение для  $b$  примет вид

$$\lg b = \lg \beta - (4)_1 u + (5)_1 v^2 + (6)_1 u^2. \quad (25.17)$$

Последняя формула пригодна для вычисления координат в триангуляции 1 класса при сторонах до 60 км. При длинах сторон до 30–35 км следует применять формулу (25.16).

Обозначая широту точки  $C$  через  $B_0$ , получаем

$$B_0 = B_1 + b. \quad (25.18)$$

3. Определение разности долгот точек  $C$  и  $B$  и азимута линии  $BC$ . Длину геодезической линии  $CB$  (рис. 44) практически можно положить равной дуге нормального сечения  $CB$ , поэтому

$$c'' = \frac{CB}{N_0} \rho'', \quad (25.19)$$

или, приняв во внимание (25.4), получаем

$$c'' = \frac{v}{N_0} \rho'' \left\{ 1 - \frac{W^2 u^2}{6a^2 (1-e^2)} \right\}, \quad (25.20)$$

где  $N_0$  — радиус сечения первого вертикала в точке  $C$ .

Обозначая

$$\frac{v}{N_0} \rho'' = (2)_0 v = \gamma,$$

получаем

$$c'' = \gamma \left\{ 1 - \frac{W^4 u^2}{6a^2 (1-e^2)} \right\}, \quad (25.21)$$

или

$$\lg c = \lg \gamma - \frac{1}{2} (5)_1 u^2. \quad (25.22)$$

Построим сферический треугольник  $c_1 b_1 p$  (рис. 44), соответствующий трехграннику с ребрами  $Cn_c$ ,  $Bn_c$  и  $Pn_c$ , с центром сферы в  $n_c$ ; радиус сферы

примем равным единице. Угол между плоскостью  $CBn_c$  и плоскостью меридиана, проходящего через точку  $B$ , обозначим через  $90^\circ - t$ .

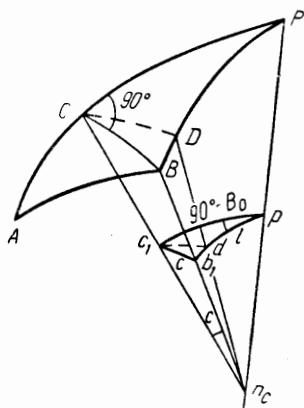


Рис. 44

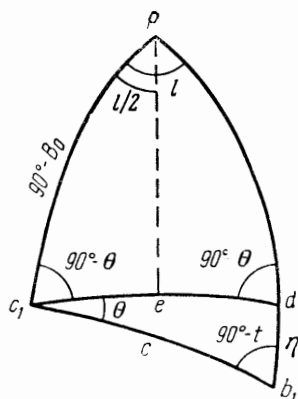


Рис. 45

Из прямоугольного треугольника  $c_1b_1P_1$  (рис. 45) напомним:

$$\left. \begin{aligned} \cos B_0 &= \operatorname{ctg} l \operatorname{tg} c \\ \operatorname{tg} l &= \operatorname{tg} c \sec B_0 \\ \operatorname{tg} t &= \sin c \operatorname{tg} B_0 \end{aligned} \right\}. \quad (25.23)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= c \sec B_0 \\ \tau &= c \operatorname{tg} B_0 \end{aligned} \right\}. \quad (25.24)$$

При этом

$$c^2 + \tau^2 = c^2 + c^2 \operatorname{tg}^2 B_0 = c^2 (1 + \operatorname{tg}^2 B_0) = c^2 \sec^2 B_0,$$

т. е.

$$c^2 + \tau^2 = \lambda^2. \quad (25.25)$$

Имея в виду, что  $c$ ,  $l$  и  $t$  — малые величины первого порядка, перепишем выражения (25.23), раскладывая тригонометрические функции этих величин в ряд

$$\text{а) } l + \frac{l^3}{3} = \left(c + \frac{c^3}{3}\right) \sec B_0 = c \sec B_0 \left(1 + \frac{c^2}{3}\right);$$

принимая во внимание (25.24),

$$l \left(1 + \frac{l^2}{3}\right) = \lambda \left(1 + \frac{c^2}{3}\right),$$

откуда

$$l = \lambda \left(1 + \frac{c^2}{3} - \frac{l^2}{3}\right); \quad (25.26)$$

$$\text{б) } t \left(1 + \frac{t^2}{3}\right) = c \left(1 - \frac{c^2}{6}\right) \operatorname{tg} B_0.$$

или

$$t \left(1 + \frac{t^2}{3}\right) = \tau \left(1 - \frac{c^2}{6}\right),$$

откуда

$$t = \tau \left( 1 - \frac{c^2}{6} - \frac{t^2}{3} \right). \quad (25.27)$$

Пренебрегая ошибками пятого порядка малости, можно в поправочных членах величины  $l$  и  $t$  заменить через  $\lambda$  и  $\tau$

$$l = \lambda \left( 1 + \frac{c^2 - \lambda^2}{3} \right) = \lambda \left( 1 - \frac{\tau^2}{3} \right). \quad (25.28)$$

Преобразуя формулу (25.27) с учетом (25.25), получаем

$$t = \tau \left( 1 - \frac{c^2}{6} - \frac{\tau^2}{3} \right) = \tau \left( 1 - \frac{\lambda^2 - \tau^2}{6} - \frac{\tau^2}{3} \right),$$

$$t = \tau \left( 1 - \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\tau^2}{6} \right). \quad (25.29)$$

Логарифмический вид выражений (25.28) и (25.29):

$$\lg l'' = \lg \lambda'' - \frac{10^8 \mu}{3\rho''^2} \tau''^2,$$

$$\lg t'' = \lg \tau'' - \frac{10^8 \mu}{6\rho''^2} \lambda''^2 - \frac{10^8 \mu}{6\rho''^2} \tau''^2.$$

Обозначим  $\frac{10^8 \mu}{6\rho''^2} = \nu$  и окончательно напомним:

$$\left. \begin{aligned} \lg l'' &= \lg \lambda'' - 2\nu\tau''^2 \\ \lg t'' &= \lg \tau'' - \nu\lambda''^2 - \nu\tau''^2 \end{aligned} \right\}. \quad (25.30)$$

4. Определение разности широт точек  $C$  и  $B$ . Проведем нормальное сечение  $CD$  через точку  $C$  так, чтобы точка  $D$  лежала с ней на одной широте; соответствующая ей кривая на сфере будет  $c_1d$  (см. рис. 44).

Угол между нормальной плоскостью  $DCn_c$  и плоскостью  $PCn_c$  обозначим через  $90^\circ - \Theta$ ; тогда угол при  $c_1$  в треугольнике  $dc_1b_1$  (рис. 45) будет равен  $\Theta$ . Угол  $Bn_cD$  обозначим через  $\eta$ ; этот угол на рис. 45 изобразится дугой  $b_1d$ .

Очевидно, треугольник  $c_1pd$  — равнобедренный; проведем биссектрису угла  $l$ ; она пересечет сторону  $c_1d$  в точке  $e$  под прямым углом. Из прямоугольного треугольника  $c_1pe$  имеем

$$\sin B_0 = \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \operatorname{tg} \Theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sin B_0. \quad (25.31)$$

Из треугольника  $c_1db_1$  получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \eta}{\sin \Theta} &= \frac{\sin c}{\cos \Theta} \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{\sin \eta}{\sin c} \end{aligned} \right\}. \quad (25.32)$$

Из (25.31) и (25.32) имеем:

$$\frac{\sin \eta}{\sin c} = \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sin B_0; \quad \sin \eta = \sin c \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sin B_0,$$

$$\eta = c \left( 1 - \frac{c^2}{6} \right) \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{l^2}{12} \right) \sin B_0.$$

Так как  $l = \lambda \left(1 - \frac{\tau^2}{3}\right)$ , то после перемножения получим:

$$\eta = \frac{c\lambda}{2} \sin B_0 \left(1 - \frac{c^2}{6} + \frac{\lambda^2}{12} - \frac{\tau^2}{3}\right) = \frac{c\tau}{2} \left(1 - \frac{c^2 + \tau^2}{6} - \frac{\tau^2}{6} + \frac{\lambda^2}{12}\right),$$

$$\eta'' = \frac{c''\tau''}{2\rho''} \left(1 - \frac{\tau^2}{6} - \frac{\lambda^2}{12}\right). \quad (25.33)$$

Рассматривая дугу  $BD$  как дугу нормального сечения с радиусом  $N_0$ , находим

$$BD = \frac{N_0 \eta''}{\rho''}. \quad (25.34)$$

Рассматривая эту же дугу как дугу меридианного сечения с радиусом  $M_0$ , получаем

$$BD = M_0 \frac{(B_0 - B_2)''}{\rho''}. \quad (25.35)$$

Сравнив оба выражения, для дуги  $BD$  будем иметь

$$(B_0 - B_2)'' = \frac{N_0}{M_0} \eta''.$$

Обозначая  $(B_0 - B_2)''$  через  $d''$  и учитывая выражение (25.33) для  $\eta$ , находим

$$d'' = c''\tau'' \frac{N_0}{M_0 2\rho''} \left(1 - \frac{\tau''^2}{6\rho''^2} - \frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}\right).$$

Вводя обозначение

$$(3)_0 = \frac{N_0}{M_0} \frac{1}{2\rho''}, \quad \delta'' = (3)_0 c''\tau'',$$

формула для  $d$  примет вид

$$d'' = \delta'' \left(1 - \frac{\tau''^2}{6\rho''^2} - \frac{\lambda''^2}{12\rho''^2}\right), \quad (25.36)$$

или логарифмически

$$\lg d'' = \lg \delta'' - \nu \tau''^2 - \frac{1}{2} \nu \lambda''^2. \quad (25.37)$$

Формула для искомой широты точки  $B$  получится

$$B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d, \quad (25.38)$$

причем величина  $d$  всегда положительна, а следовательно, в формуле (25.38) она будет всегда со знаком минус.

5. Определение обратного азимута  $A_{2,1}$ . Из рис. 46 имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_{2,1} &= 360^\circ - (90^\circ + \varepsilon - A_{1,2}) - (90^\circ - t) \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon \end{aligned} \right\}. \quad (25.39)$$

Для сферического избытка  $\varepsilon$ , согласно (25.1), имеем:

$$\varepsilon'' = \frac{s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{2R^2} \rho'' = \frac{1}{2\rho''} \frac{s \cos A_{1,2}}{M} \rho'' \frac{s \sin A_{1,2}}{N} \rho'',$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2\rho''} b'' c''. \quad (25.40)$$

## 6. Сводка формул

$u = s \cos A_{1,2}$ $\beta'' = (1)_1 u$ $\lg b'' = \lg \beta'' - (4)_1 u +$ $+ (5)_1 v^2 + (6)_1 u^2$ $B_0 = B_1 + b$ $\lambda'' = c'' \sec B_0$ $\tau'' = c'' \operatorname{tg} B_0$	}	$v = s \sin A_{1,2}$ $\gamma'' = (2)_0 v$ $\lg c'' = \lg \gamma'' - \frac{1}{2} (5)_1 u^2$ $\delta'' = (3)_0 c'' \tau''$ $\varepsilon'' = \frac{1}{2\rho''} b'' c''$
--	---	--

$$(25.41)$$
  

$$\lg l'' = \lg \lambda'' - 2v\tau''^2$$

$$\lg t'' = \lg \tau'' - v\tau''^2 - v\lambda''^2$$

$$\lg d'' = \lg \delta'' - v\tau''^2 - \frac{1}{2} v\lambda''^2$$

$$B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d$$

$$L_2 = L_1 + l$$

$$A_{2,1} = A_{1,2} \pm 180^\circ + t - \varepsilon$$

Геодезические величины (1), (2), (3), (4), (5) и (6) и значения поправочных членов для логарифмического вычисления геодезической задачи приведены в специальных таблицах.

Эти таблицы были составлены после введения эллипсоида Красовского в СССР; они называются «Таблицы для вычисления геодезических координат» (1-е изд. 1944 г. и 2-е изд. 1953 г.); таблицы вычислены с восемью десятичными знаками для всех широт от 0 до 90°.

Приведенные выше формулы пригодны для вычисления геодезических координат: в широтах и долготах с ошибкой до 0,0001"; в азимутах — с ошибкой от 0,001" — при расстояниях до 50—60 км; иначе говоря, они отвечают требованиям вычисления координат в триангуляции 1 класса.

Путем присоединения дополнительных поправок можно сделать формулы более точными, после чего применить их для треугольников со сторонами до 100—120 км.

Приведенный вывод формул для вычисления геодезических координат, основанный на геометрическом подходе, принадлежит проф. Красовскому.

В табл. 8 приведен пример логарифмического решения прямой геодезической задачи по способу вспомогательной точки и выведенным формулам.

Для вычислений на счетных машинах вместо формул (25.41) целесообразно использовать следующие (см. [44], стр. 164):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{s}{N_1} \cos A_1; & v &= \frac{s}{N_1} \sin A_1 \\ b &= u \left( 1 + \frac{v^2}{3} \right); & c &= v \left( 1 - \frac{u^2}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25.42)$$

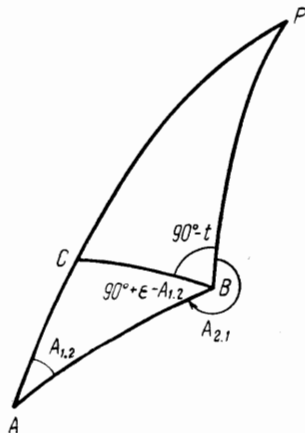


Рис. 46



№ вычислений	Элементы формул	1. Исходный пункт			
		Дубровка		Маяк	
		2. Определяемый пункт			
		Маяк		Беркут	
3	$A_1$		$44^{\circ}12'13.670''$	$224^{\circ}30'53.557''$	
3	Угол треугольника		+	—	
6	$A_{1,2}$	$44^{\circ}12'13.67''$	$111\ 39\ 12.669$	$174\ 10\ 33.578$	
57	$t$	+ $18\ 42.428$	+ $21\ 23.091$	+ $2\ 48.051$	
58	$\varepsilon$	+ $2.541$	— $1\ 320$	— $0\ 559$	
59	$A_{1,2} \pm 180^{\circ}$	$224\ 12\ 13.67$	$291\ 39\ 12.669$	$354\ 10\ 33.578$	
60	$t - \varepsilon$	+ $18\ 39.887$	+ $21\ 24.411$	+ $2\ 48.610$	
61	$A_{2,1}$	$224\ 30\ 53.557$	$292\ 00\ 37.080$	$354\ 13\ 22.188$	
1	$B_1$	$47\ 46\ 52.647$	$47\ 46\ 52.6470$	$48\ 04\ 9.6384$	
27	$b$	+ $17\ 19.7427$	— $7\ 45.7275$	— $25\ 6.3049$	
28	$B_0 = B_1 + b$	$48\ 04\ 12.3897$	$47\ 39\ 6.9195$	$47\ 39\ 3.3335$	
53	$-d$	$2.7513$	— $3.6487$	$0.0626$	
54	$B_2$	$48\ 04\ 9.6384$	$47\ 39\ 3.2708$	$47\ 39\ 3.2709$	
2	$L_1$	$35\ 49\ 36.330$	$35\ 49\ 36.3300$	$36\ 14\ 45.0504$	
55	$l$	+ $25\ 08.7204$	+ $28\ 56.1074$	+ $3\ 47.3870$	
56	$L_2$	$36\ 14\ 45.0504$	$36\ 18\ 32.4374$	$36\ 18\ 32.4374$	
26	$\lg b$	$3.0169\ 2586$	$2.6681\ 3184\ n$	$3.1779\ 1288\ n$	
25	$-(4)_1u + (5)_1v^2 +$				
	$+ (6)_1u^2$	— 751	+ 958	+ 1598	
12	$\lg \beta$	$3.0169\ 3337$	$2.6681\ 2226\ n$	$3.1778\ 9690\ n$	
11	$\lg (1)_1$	$8.5102\ 4471$	$8.5102\ 4471$	$8.5102\ 2282$	
10	$\lg u$	$4.5066\ 8866$	$4.1578\ 7755\ n$	$4.6676\ 7408\ n$	
8	$\lg \cos A_{1,2}$	$9.8554\ 3702$	$9.5670\ 1799\ n$	$9.9977\ 5249\ n$	
5	$\lg s$	$4.6512\ 5164$	$4.5908\ 5956$	$4.6699\ 2159$	
7	$\lg \sin A_{1,2}$	$9.8433\ 6524$	$9.9682\ 1772$	$9.0063\ 5105$	
9	$\lg v$	$4.4946\ 1688$	$4.5590\ 7728$	$3.6762\ 7264$	
29	$\lg (2)_0$	$8.5089\ 1798$	$8.5089\ 2857$	$8.5089\ 2860$	
31	$\lg \gamma$	$3.0035\ 3486$	$3.0680\ 0585$	$2.1852\ 0124$	
32	$\frac{1}{2} (5)_1u^2$	— 183	— 37	— 385	
13 21	$\lg (4)_1$	$8.53\ 386$	$8.53\ 386$	$8.53\ 341$	
15 22	$\lg u$	$4.50\ 669$	$4.15\ 788$	$4.66\ 767$	
18 24	$\lg (4)_1u$	$3.04\ 055$	$2.69\ 174$	$3.20\ 108$	
19 23	$\lg (5)_1v^2$	$2.54\ 021$	$2.66\ 913$	$0.90\ 349$	
17	$2 \lg v$	$8.98\ 923$	$9.11\ 815$	$7.35\ 254$	
14	$\lg (5)_1$	$3.55\ 098$	$3.55\ 098$	$3.55\ 095$	
16	$2 \lg u$	$9.01\ 338$	$8.31\ 575$	$9.33\ 535$	
20	$\lg (5)_1u^2$	$2.56\ 436$	$1.86\ 673$	$2.88\ 630$	
46	$\lg t$	$3.0501\ 5840$	$3.1082\ 5752$	$2.2254\ 4208$	
43	$-v\lambda^2 - v\tau^2$	— 601	— 794	— 13	
37	$\lg \tau$	$3.0501\ 6441$	$3.1082\ 6546$	$2.2254\ 4221$	
35	$\lg \operatorname{tg} B_0$	$0.0466\ 3138$	$0.0402\ 5998$	$0.0402\ 4482$	
33	$\lg c$	$3.0035\ 3303$	$3.0680\ 0548$	$2.1851\ 9739$	
34	$\lg \sec B_0$	$9.8249\ 1998$	$9.8284\ 2330$	$9.8284\ 3158$	
36	$\lg \hat{\lambda}$	$3.1786\ 1305$	$3.2395\ 8218$	$2.3567\ 6581$	
44	$-2v\tau^2$	— 428	— 560	— 9	
47	$\lg l$	$3.1786\ 0877$	$3.2395\ 7658$	$2.3567\ 6572$	
30	$\lg (3)_0$	$4.385\ 850$	$4.385\ 871$	$4.385\ 871$	
3	$\lg c$	$3.003\ 533$	$3.068\ 005$	$2.185\ 197$	
39	$\lg \tau$	$3.050\ 164$	$3.108\ 265$	$2.225\ 442$	
40	$\lg \delta$	$0.439\ 547$	$0.562\ 141$	$8.796\ 510$	

№ вычислений	Элементы формул	1. Исходный пункт		
		Дубровка	Дубровка	Маяк
		2. Определяемый пункт		
		Маяк	Беркут	
45	$-\nu\tau^2 - \frac{1}{2}\nu\lambda^2$	— 4	— 5	0
8	$\lg d$	0.439 550	0.562 133	8.796 510
9	$\lg b$	3.01 693	2.66 813 <i>n</i>	3.17 791 <i>n</i>
50	$\lg c$	3.00 353	3.06 801	2.18 520
51	$\lg (1 : 2\rho'')$	4.38 454	4.38 454	4.98 454
52	$\lg \varepsilon$	0.40 500	0.12 068 <i>n</i>	9.74 765 <i>n</i>
41	$\nu\lambda^2$	387	513,1	8,3
42	$\nu\tau^2$	214	280,0	4,4

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= B_1 + b\rho''; \quad \tau = c \operatorname{tg} \varphi_0; \quad \lambda = c \sec \varphi_0 \\
 t'' &= \tau \left( 1 - \frac{\lambda^2}{6} - \frac{\tau^2}{6} \right) \rho'' \\
 l'' &= \lambda \left( 1 - \frac{\tau^2}{3} \right) \rho'' \\
 d &= \frac{c\tau}{2} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{12} - \frac{\tau^2}{6} \right) \\
 \Delta\varphi &= b - d \\
 \Delta B'' &= V_1^2 \Delta\varphi \left( 1 - \frac{3}{4} e'^2 \sin 2B_1 \Delta\varphi - \frac{e'^2}{2} \cos 2B_1 \Delta\varphi^2 \right) \rho'' \\
 \varepsilon'' &= \frac{bc}{2V_1^2} \rho'' \\
 B_2 &= B_1 + \Delta B'', \quad L_2 = L_1 + l'' \\
 A_2 &= A_1 + 180^\circ + t'' - \varepsilon''
 \end{aligned} \quad (25.42)$$

Эти формулы имеют много общего с формулами, полученными ранее; однако их вывод иной — основан на перспективном изображении сфероидического треугольника  $APB$  на сферу радиуса  $N_1$ . Они удобны для программирования, вычисления на ЭВМ. Вспомогательные таблицы для приближенных вычислений по этим формулам имеются в «Руководстве по вычислению азимута и длины геодезической линии на поверхности эллипсоида Красовского» [49].

## § 26. Решение геодезической задачи по формулам со средними аргументами.

Вывод формул путем разложения в ряд разностей широт, долгот и азимутов

В § 23 даны общие основания применения рядов для вывода разностей широт, долгот и азимутов; отмечена целесообразность использования рядов со средними аргументами:

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} \quad \text{и} \quad A_m = \frac{A_{1,2} \pm 180^\circ + A_{2,1}}{2}.$$

Поясним это подробнее. Пусть на рис. 47 кривая  $AB$  представляет геодезическую линию между начальной точкой  $A$  и конечной  $B$ .

Возьмем точку  $C$ , расположенную на середине кривой  $AB$ . Если длина геодезической линии  $AB$  равна  $s$ , то точка  $C$  будет находиться от точек  $A$  и  $B$  на одинаковом расстоянии, равном  $\frac{s}{2}$ . Обозначим координаты точки  $C$  через  $B_0, L_0$  и азимут геодезической линии в этой точке через  $A_0$ . Применим первую строку рядов (23.4), т. е.

$$(B_2 - B_1) = \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots \quad (26.1)$$

для выражения разностей широт  $B_1 - B_0$  и  $B_2 - B_0$ .

Получим

$$(B_1 - B_0) = -\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{4} - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{8} + \dots \quad (26.2)$$

$$(B_2 - B_0) = +\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{8} + \dots \quad (26.3)$$

Вычитая (26.2) из (26.3), находим

$$(B_2 - B_1) = \left(\frac{dB}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0 s^3 + \dots \quad (26.4)$$

Поступая аналогично для  $(L_2 - L_1)$  и  $(A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ)$ , находим

$$(L_2 - L_1) = \left(\frac{dL}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_0 s^3 + \dots \quad (26.5)$$

$$(A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ) = \left(\frac{dA}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{24} \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_0 s^3, \quad (26.6)$$

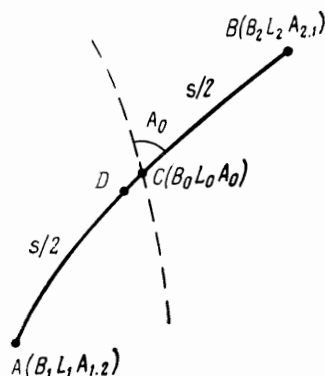


Рис. 47

где нулевой индекс при производных показывает, что они должны вычисляться по  $B_0$  и  $A_0$ .

Сравнение выражений (26.4) и (26.1) показывает выгоду использования рядов со средними аргументами: члены с четными производными в рядах (26.4) исчезли, в результате чего они будут иметь лучшую сходимость, а в оставшихся членах с нечетными производными коэффициенты при них уменьшились в несколько раз. Но координаты точки  $C$  ( $B_0, L_0$  и  $A_0$ ), расположенной на середине дуги  $AB$ , т. е. на равных расстояниях от точек  $A$  и  $B$ , не будут равны среднему значению координат этих точек ( $B_m, L_m, A_m$ ).

Найдем зависимость между этими координатами. Складывая (26.2) и (26.3), после деления на два получаем

$$B_m - B_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_0 s^2 \quad (26.7)$$

и аналогично

$$L_m - L_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_0 s^2, \quad (26.8)$$

$$A_m - A_0 \pm 180^\circ = \frac{1}{8} \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_0 s^2. \quad (26.9)$$

Как видно, разности  $(B_m - B_0)$ ;  $(L_m - L_0)$  и  $(A_m - A_0 \pm 180^\circ)$  — малые величины второго порядка.

Формулы (26.4) и (26.7) в общем виде решают задачу. Конечная цель — получить формулы для разностей координат и азимутов в функции  $B_m$  и  $A_m$ . Очевидно, это будет достигнуто в результате вычислений и подстановки производных в формулы (26.4) с принятием во внимание (26.7).

Дальнейший ход вывода: а) нахождение исходных дифференциальных уравнений и вычисление производных; б) получение рабочих формул путем подстановки найденных производных в уравнения (26.4) с учетом (26.7).

Исходные дифференциальные уравнения (13.4):

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A, \quad (26.10)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{dl}{ds} = \frac{\sin A \sec B}{N} = \frac{V}{c} \sin A \sec B, \quad (26.11)$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N} = \frac{V}{c} \sin A \operatorname{tg} B. \quad (26.12)$$

Переходим к вычислению производных следующего порядка

$$\frac{d^2B}{ds^2} = \frac{3V^2}{c} \frac{dV}{ds} \cos A - \frac{V^3}{c} \sin A \frac{dA}{ds}. \quad (26.13)$$

Вспомним, что

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \eta^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{2V dV}{dB} &= -2e'^2 \cos B \sin B, \\ \frac{dV}{dB} &= -\frac{e'^2 \cos^2 B \operatorname{tg} B}{V}. \end{aligned}$$

Обозначая  $t = \operatorname{tg} B$ , последнее выражение примет вид

$$\frac{dV}{dB} = -\frac{\eta^2}{V} t. \quad (26.14)$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ds} &= \frac{dV}{dB} \frac{dB}{ds} = -\frac{\eta^2}{V} t \frac{V^3}{c} \cos A, \\ \frac{dV}{ds} &= -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos At. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Подставляя найденные выражения первых производных в (26.13), получаем

$$\frac{d^2B}{ds^2} = \frac{3V^2}{c} \left( -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos At \right) \cos A - \frac{V^3}{c} \sin A \frac{V}{c} \sin At$$

или

$$\frac{d^2B}{ds^2} = -\frac{V^4}{c^2} t \{ \sin^2 A + 3\eta^2 \cos^2 A \}. \quad (26.16)$$

Переходим к вычислению производной

$$\begin{aligned} \frac{d^2l}{ds^2} &= \frac{\sec B \sin A dV}{c ds} + \frac{V}{c} t \sec B \sin A \frac{dB}{ds} + \frac{V}{c} \sec B \cos A \frac{dA}{ds}, \\ \frac{d^2l}{ds^2} &= \frac{\sec B \sin A}{c} \left( -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos At \right) + \frac{V}{c} t \sec B \sin A \frac{V^3}{c} \cos A + \\ &\quad + \frac{V}{c} \sec B \cos A \frac{V}{c} \sin A \cdot t \end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{2V^2 t}{c^2} \sec B \sin A \cos A \quad (26.17)$$

и, наконец, находим производную

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

Так как

$$dA = dl \sin B,$$

то

$$\frac{dA}{ds} = \frac{dl}{ds} \sin B$$

и

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{d^2 l}{ds^2} \sin B + \frac{dl}{ds} \cos B \frac{dB}{ds},$$

или

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{2V^2 t}{c^2} \sec B \sin A \cos A \sin B + \frac{V}{c} \sin A \sec B \frac{V^3}{c} \cos A \cos B$$

и окончательно

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2} \sin A \cos A (1 + 2t^2 + \eta^2). \quad (26.18)$$

Приведем без вывода третьи производные:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 B}{ds^3} = & -\frac{V^5}{c^3} \{ \cos A \sin^2 A (1 - 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) + \\ & + \cos^3 A (3\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2) \}, \end{aligned} \quad (26.19)$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2V^3}{c^3} \sec B \{ \cos^2 A \sin A (1 + 3t^2 + \eta^2) - t^2 \sin A \}, \quad (26.20)$$

$$\frac{d^3 A}{ds^3} = \frac{V^3 t}{c^3} \{ \cos^2 A \sin A (5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4) - \sin^3 A (1 + 2t^2 + \eta^2) \}. \quad (26.21)$$

Переходим к получению выражений для  $(B_2 - B_1)$ ,  $(L_2 - L_1)$  и  $(A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ)$  согласно (26.4).

Так как мы ставим цель получить искомые разности координат в функции  $B_m$  и  $A_m$ , а в выражениях (26.4) производные отнесены к аргументам  $B_0$  и  $A_0$ , то в первую очередь необходимо установить зависимость между указанными производными, т. е. между

$$\left( \frac{dB}{ds} \right)_0 \text{ и } \left( \frac{dB}{ds} \right)_m,$$

$$\left( \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \text{ и } \left( \frac{d^2 B}{ds^2} \right)_m \text{ и т. д.}$$

Предварительно отметим, что разности  $(B_0 - B_m)$  и  $(A_0 - A_m)$  малы. Рассматриваемые производные — некоторые функции от  $B$  и  $A$  и других величин, которые здесь можно рассматривать как постоянные. Таким образом, задача заключается в получении выражения функции при некоторых малых приращениях аргумента; конечно, для этого следует применить ряд Тейлора.

Попутно сделаем замечание: широта  $B_m$  не соответствует  $A_m$  в том смысле, что если взять на дуге  $AB$  точку с широтой  $B_m$ , то азимут геодезической линии в ней не будет равен  $A_m$ . Поэтому при вычислении приращений в ряде Тейлора

следует  $B$  и  $A$  рассматривать как независимые переменные и брать частные производные по  $B$  и  $A$ .

После этих пояснений имеем

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m + \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial B} (B_0 - B_m) + \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial A} (A_0 - A_m) \quad (26.22)$$

(с ошибкой на малые величины четвертого порядка) или, принимая во внимание (26.7) и (26.9)

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_0 = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m - \frac{s^2}{8} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial B} - \frac{s^2}{8} \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial A}. \quad (26.23)$$

Делая подстановку (26.23) в (26.4), получаем

$$(B_2 - B_1) = \left(\frac{dB}{ds}\right)_m s - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial B} - \\ - \frac{s^3}{8} \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_m \frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial A} + \frac{s^3}{24} \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_m, \quad (26.24)$$

причем в последнем принято, что

$$\left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_m = \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_0.$$

Входящие в (26.24) частные производные будут равны:

$$\frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial B} = \frac{\partial \frac{V^3}{c} \cos A}{\partial B} = \frac{3V^2}{c} \cos A \frac{\partial V}{\partial B} = -\frac{3V_m^2}{c} \cos A_m \frac{e^2 \cos^2 B_m \operatorname{tg} B_m}{V_m} = \\ = \frac{3V_m \eta_m^2 t_m \cos A_m}{c}, \quad (26.25)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{dB}{ds}\right)_m}{\partial A} = \frac{\partial \frac{V^3}{c} \cos A_m}{\partial A} = -\frac{V_m^3}{c} \sin A_m. \quad (26.26)$$

Подставляя в (26.24) значения производных согласно (26.10), (26.16), (26.25), (26.12), (26.26) и (26.19), получаем

$$(B_2 - B_1) = \frac{V_m^3}{c} \cos A_m s - \frac{s^3}{8} \left[ -\frac{V_m^4}{c^2} t_m (\sin^2 A_m + 3\eta_m^2 \cos^2 A_m) \right] \frac{3V_m \eta_m^2 t_m \cos A_m}{c} - \\ - \frac{s^3}{8} \left[ \frac{V_m^2}{c^2} \sin A_m \cos A_m (1 + 2t_m^2 + \eta_m^2) \right] \left[ -\frac{V_m^3}{c} \sin A_m \right] + \\ + \frac{s^3}{24} \left\{ -\frac{V_m^5}{c^3} [\cos A_m \sin^2 A_m (1 - 3t_m^2 + \eta_m^2 - 9\eta_m^2 t_m) + \right. \\ \left. + \cos^3 A_m (2\eta_m^2 - 3\eta_m^2 t_m^2 - 3\eta_m^4 - 15\eta_m^4 t_m^2)] \right\} \quad (26.27)$$

Опуская в (26.27) малые величины в пятой степени, после алгебраических преобразований получаем

$$(B_2 - B_1) = \frac{V_m^3}{c} s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{1}{24} \frac{V_m^2}{c^2} s^2 [\sin^2 A_m (2 + 3t_m^2 + 2\eta_m^2) + 3\eta_m^2 \cos^2 A_m (t_m^2 - 1 - \eta_m^2 - 4\eta_m^2 t_m^2)] \right\}. \quad (26.28)$$

Из (26.28) следует, что с ошибкой на величину третьего порядка малости можно написать:

$$\left. \begin{aligned} (B_2 - B_1) &= b = \frac{s \cos A_m}{M_m} = \frac{V_m^3}{c} s \cos A_m \\ (L_2 - L_1) &= l = \frac{s \sin A_m}{N_m} \sec B_m = \frac{V_m}{c} s \sin A_m \sec B_m \\ (A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ) &= t = \frac{s \sin A_m}{N_m} \operatorname{tg} B_m = \frac{V_m}{c} s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \end{aligned} \right\}. \quad (26.29)$$

Используя эти выражения для преобразования поправочных членов, допускаем ошибку пятого порядка малости и выше. Поэтому, принимая во внимание (26.29), уравнение (26.28) примет вид

$$(B_2 - B_1)'' = (1)_m s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B_m}{24\rho''^2} (2 + 3t_m^2 + 2\eta_m^2) + \frac{b''^2 \eta_m^2}{8\rho''^2} \frac{(t_m^2 - 1 - \eta_m^2 - 4\eta_m^2 t_m^2)}{V^4} \right\}. \quad (26.30)$$

Полученная формула пригодна для вычисления координат на расстояния до 200—250 км.

Вывод формул для  $(L_2 - L_1)$  и  $(A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ)$  производится аналогично, поэтому, не приводя этих выводов, напомним формулы в окончательном виде:

$$L_2 - L_1 = (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left\{ 1 + \frac{l''^2 \sin^2 B_m}{24\rho''^2} - \frac{b''}{24\rho''^2} \frac{(1 + \eta_m^2 - 9\eta_m^2 t_m^2)}{V^4} \right\}, \quad (26.31)$$

$$\begin{aligned} A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ &= (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left\{ 1 + \frac{b''^2}{24\rho''^2} \frac{(2 + 7\eta_m^2 + 9\eta_m^2 t_m^2 + 5\eta_m^4)}{V_m^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^2 \cos^2 B_m}{24\rho''^2} (2 + t_m^2 + 2\eta_m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (26.32)$$

Для вычисления координат при расстояниях, соответствующих длинам сторон треугольников 1 класса, в формулах достаточно сохранить малые величины в третьей степени, т. е. не принимать во внимание члены  $\frac{s^3}{R^3} \eta^2$  и меньше. С этой точностью перепишем формулу (26.28), тогда

$$(B_2 - B_1) = \frac{V_m^3}{c} s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{V_m^2}{c^2} s^2 \sin^2 A_m + \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{c^2} s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m \right\} \quad (26.33)$$

или

$$(B_2 - B_1)'' = b'' = s \cos A_m (1)_m \left\{ 1 + \frac{l''^2}{12\rho^{n^2}} \cos^2 B_m + \frac{l''^2}{8\rho^{n^2}} \sin^2 B_m \right\}$$

и окончательно

$$b'' = (1)_m s \cos A_m \left\{ 1 + \frac{l''^2}{12\rho^{n^2}} + \frac{t''^2}{24\rho^{n^2}} \right\}. \quad (26.34)$$

Из (26.31) и (26.32) с той же точностью получаем:

$$L_2 - L_1 = l'' = (2)_m s \sin A_m \sec B_m \left\{ 1 - \frac{b''^2}{24\rho^{n^2}} + \frac{t''^2}{24\rho^{n^2}} \right\}, \quad (26.35)$$

$$(A_{2.1} - A_{1.2} \pm 180^\circ)'' = t'' = (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m \left\{ 1 + \frac{b''^2}{12\rho^{n^2}} - \frac{t''^2}{24\rho^{n^2}} + \frac{l''^2}{12\rho^{n^2}} \right\}. \quad (26.36)$$

Обозначим  $v = \frac{10^8 \mu}{6\rho^{n^2}}$ ; после логарифмирования формулы примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \lg b'' &= \lg [(1)_m s \cos A_m] + \frac{1}{4} v t''^2 + \frac{1}{2} v l''^2 \\ \lg l'' &= \lg [(2)_m s \sin A_m \sec B_m] + \frac{1}{4} v t''^2 - \frac{1}{4} v b''^2 \\ \lg t'' &= \lg [(2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m] + \frac{1}{2} v b''^2 + \frac{1}{2} v l''^2 - \frac{1}{4} v t''^2 \end{aligned} \right\}. \quad (26.37)$$

Поправочные члены формул (26.37) могут быть еще представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \lg b &= \frac{1}{4} v l''^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2} v l''^2 \\ \Delta \lg l &= \frac{1}{4} v l''^2 \sin^2 B_m - \frac{1}{4} v b''^2 \\ \Delta \lg t &= \frac{1}{2} v b''^2 + \frac{1}{4} v l''^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2} v l''^2 \cos^2 B_m \end{aligned} \right\}. \quad (26.38)$$

Искомые координаты точки  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + b \\ L_2 &= L_1 + l \\ A_{2.1} &= A_{1.2} \pm 180^\circ + t \end{aligned} \right\}. \quad (26.39)$$

В формулах (26.37) определяемые величины  $b$ ,  $l$  и  $t$  — функции средней широты  $B_m$  и среднего азимута  $A_m$ , которые неизвестны. Неизвестны также и аргументы  $b$  и  $l$  в поправочных членах. Поэтому задача решается методом последовательных приближений.

Полагая в первом приближении

$$B'_2 = B_1 + s \cos A_{1.2} (1)_1 = B_1 + b',$$

$$l' = s \sin A_{1.2} \sec B_1 (2)_1,$$

$$A'_{2.1} = A_{1.2} \pm 180^\circ + s \sin A_{1.2} \operatorname{tg} B_1 (2)_1 = A_{1.2} \pm 180^\circ + t',$$



ВЫЧИСЛЯЮТ:

$$B'_m = \frac{B_1 + B'_2}{2},$$

$$A'_m = \frac{A_{1.2} + (A'_{2.1} \pm 180^\circ)}{2}.$$

Со значениями  $b'$ ,  $l'$  и  $t'$  рассчитывают поправочные члены формул (26.37), (26.38) и вычисляют, принимая во внимание  $B'_m$  и  $A'_m$ , значения  $b''$ ,  $l''$  и  $t''$ . Таким образом, получаются новые значения искомых величин в третьем приближении. Так поступают до тех пор, пока результаты вычислений из двух смежных приближений не станут одинаковыми.

Полученные формулы очень просты и достаточно точны для вычислений координат в триангуляции. Единственный, но существенный недостаток их — необходимость применения приближений, что увеличивает объем вычислений.

## § 27. Решение обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами

Искомые  $s$ ,  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$  легко определяются из формул для решения прямой геодезической задачи (26.37).

Используя прежние обозначения по заданным координатам конечных точек, имеем:

$$b = B_2 - B_1; \quad l = L_2 - L_1; \quad B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}. \quad (27.1)$$

Вычисляя по формулам (26.38) и значения  $\Delta \lg b$  и  $\Delta \lg l$  на основании (26.37) легко получаем

$$\left. \begin{aligned} \lg s \sin A_m &= \lg \frac{l \cos B_m}{(2)_m} - \Delta \lg l = \lg P \\ \lg s \cos A_m &= \lg \frac{b}{(1)_m} - \Delta \lg b = \lg Q \end{aligned} \right\}, \quad (27.2)$$

откуда

$$\lg \tg A_m = \lg P - \lg Q. \quad (27.3)$$

По  $A_m$  находим далее:

$$\lg s = \lg P - \lg \sin A_m = \lg Q - \lg \cos A_m. \quad (27.4)$$

Для вычисления  $t$  имеем последнюю формулу из системы (26.37); целесообразно вычисления проводить по следующей формуле, которую получаем из сопоставления второго и третьего выражений в формулах (26.37).

$$\lg t = \lg l \sin B_m + \frac{3}{4} \lg b^2 + \frac{1}{2} \lg l^2 \cos^2 B_m. \quad (27.5)$$

Искомые азимуты определяются:

$$\left. \begin{aligned} A_{1.2} &= A_m - \frac{1}{2} t \\ A_{2.1} &= A_m + \frac{1}{2} t \pm 180^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (27.6)$$

Формулы для решения обратной геодезической задачи для нелогарифмических вычислений при помощи арифмометра или иной счетной машины приведем без вывода:

$$s \sin A_m = \frac{m + \cos^2 B_m}{n + \cos^2 B_m} [a_1 \bar{l} + a_2 \Delta \bar{B}^2 \bar{l} + a_3 \bar{l}^3] = D \Sigma_1, \quad (27.7)$$

где  $m = +593,602160; \quad \Delta \bar{B} = 10^{-4} (B_2 - B_1)'';$

$$n = +197,867385, \quad \bar{l} = 10^{-4} (L_2 - L_1)'',$$

$$D = \frac{m + \cos^2 B_m}{n + \cos^2 B_m}, \quad (27.8)$$

$$a_1 = +103\,422,05 \cos B_m;$$

$$a_2 = +9,5144 \cos B_m + 0,5525 \cos^3 B_m - 0,0078 \cos^5 B_m;$$

$$a_3 = -10,1287 \cos B_m + 10,1287 \cos^3 B_m$$

$$s \cos A_m = \frac{m + \cos^2 B_m}{n + \cos^2 B_m} [a_4 \Delta \bar{B} + a_5 \Delta \bar{B} \bar{l}^2 + a_6 \Delta \bar{B}^3] = D \Sigma_2, \quad (27.9)$$

где  $a_4 = +103\,422,05 - 696,9116 \cos^2 B_m + 4,6954 \cos^4 B_m - 0,0310 \cos^6 B_m;$

$$a_5 = -30,3860 + 10,3334 \cos^2 B_m - 0,2061 \cos^4 B_m + 0,0014 \cos^6 B_m;$$

$$a_6 = -0,2048 + 0,4192 \cos^2 B_m - 0,0124 \cos^4 B_m;$$

$$t'' = \sin B_m [a_7 \bar{l} + a_8 \Delta \bar{B}^2 \bar{l} + a_9 \bar{l}^3] = \sin B_m \Sigma_3, \quad (27.10)$$

где

$$a_7 = +10\,000 = 10^4;$$

$$a_8 = 2,9381 + 0,0132 \cos^2 B_m;$$

$$a_9 = +1,9587 \cos^2 B_m + 0,0132 \cos^4 B_m;$$

$$A_{1,2} = A_m - \frac{1}{2} \Delta A;$$

$$A_{2,1} = A_m \pm 180^\circ + \frac{1}{2} \Delta A; \quad (27.11)$$

$$s_1 = \frac{D \Sigma_1}{\sin A_m};$$

$$s_2 = \frac{D \Sigma_2}{\cos A_m}. \quad (27.12)$$

Пример на решение обратной геодезической задачи по нелогарифмическим формулам приведен в табл. 9.

**Пр и м е р.** По заданным геодезическим координатам  $B_1, L_1$  и  $B_2, L_2$  точек 1 и 2 вычислить расстояние  $s$  между этими точками, а также прямой  $A_{12}$  и обратный  $A_{21}$  геодезические азимуты.

Заметим, что неудобство, возникающее при решении прямой геодезической задачи, — необходимость применения последовательных приближений, при решении обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами отпадает.

Образец таблиц для  $D$  при решении обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами (нелогарифмические вычисления).

$B_m$	$D$	$\Delta$
51°20'	2,9960 6211	+477
51°21'	2,9960 6497	+475
51°22'	2,9960 6782	+477
21°23'	2,9960 7068	+477
51°24'	2,9960 7354	+475
51°25'	2,9960 7639	+477

Таблица 9

Формулы	Вычисления	Формулы	Вычисления	Формулы	Вычисления
$B_1$	50°07'40,97"	$a_1$	64 537,624	$s \cdot \sin A_m = D \cdot \Sigma_1$	17 636,312
$B_2$	52 39 03,91	$a_2$	6,070		
$\Delta B$	2 31 22,94	$a_3$	-3,859	$s \cdot \cos A_m = D \cdot \Sigma_2$	280 706,597
$\Delta B''$	9 082,94			$\operatorname{tg} A_m$	0,0628 2828
$B_m$	51°23'22,44"	$a_4$	103 151,380	$A_m$	3°35'42,25"
		$a_5$	-26,393		
$L_1$	23 45 13,43	$a_6$	-0,043	$\sin A_m$	0,0627 0464
$L_2$	24 00 25,46	$a_7$	10 000,000	$\cos A_m$	0,9980 3213
$l$	0 15 12,03	$a_8$	2,943		
$l''$	912,03	$a_9$	0,765		
		$D$	2,99607176	$s_1 = \frac{D \cdot \Sigma_1}{\sin A_m}$	281 260,08 м
$\Delta \bar{B}$	0,90 82 94	$a_1 \bar{l}$	5 886,0249	$s_2 = \frac{D \cdot \Sigma_2}{\cos A_m}$	281 260,08 м
$\bar{l}$	0,09 12 03	$a_2 \cdot \Delta \bar{B}^2 \cdot \bar{l}^2$	0,4565	$s_{\text{ср}}$	281 260,08 м
$\Delta \bar{B}^2$	0,82 50	$a_3 \cdot \bar{l}^3$	-0,0031	$\Delta A'' = \sin B_m \cdot \Sigma_3$	+ 712,84"
$\bar{l}^2$	0,00 83	$\Sigma_1$	5 886, 4783		
$\Delta \bar{B}^2 \cdot \bar{l}$	0,0752			$\Delta A$	11'52,84"
$\Delta \bar{B} \cdot \bar{l}^2$	0,00 76	$a_4 \cdot \Delta \bar{B}$	93691,7795	$1/2 \Delta A$	5'56,42"
$\Delta \bar{B}^3$	0,74 93	$a_5 \cdot \Delta \bar{B} \cdot \bar{l}^2$	-0,2006	$A_{12} = A_m - 1/2 \Delta A$	3°29'45,83"
$\bar{l}^3$	0,00 08	$a_6 \cdot \Delta \bar{B}^3$	-0,0322	$A_{21} = A_m \pm 180^\circ + 1/2 \Delta A$	193°41'38,67"
$\cos B_m$	0,62 40 21 90	$\Sigma_2$	93691 5467		
$\cos^2 B_m$	0,38 94 03	$a_7 \cdot \bar{l}$	912 0300		
$\cos^3 B_m$	0,24 30	$a_8 \cdot \Delta \bar{B}^2 \cdot \bar{l}$	0,2213		
$\cos^4 B_m$	0,15 16	$a_9 \cdot \bar{l}^3$	0,0006		
$\cos^5 B_m$	0,09 46	$\Sigma_3$	912,2519		
$\cos^6 B_m$	0,05 90				
$\sin B_m$	0,78 14 07				

Примечания:

1. Коэффициент  $D$  выбирается из заранее составленных таблиц или вычисляется. Выше приведен образец таблиц для широты, соответствующей приведенному примеру (51°20'—51°25').

2. Коэффициенты  $a_i$  вычисляются на арифмометре или иной счетной машине.

3. Число знаков, подлежащих удержанию, берется из приведенного примера.

## § 28. Теория Гаусса

конформного изображения эллипсоида на шаре.

Применение ее к решению главной геодезической задачи

Проф. Ф. Н. Красовский в своем труде «Руководство по высшей геодезии» говорит: «...теория Гаусса конформного изображения эллипсоида на шаре в свое время составила эпоху в области точных наук». Указывая, что значение этой теории в геодезии в настоящее время в значительной степени утратило свою ценность, далее проф. Ф. Н. Красовский отмечает: «...возможно, что в будущем в геодезии вновь появится новое использование этой гениальной Гауссовой теории». Есть основания считать эту мысль правильной и в настоящее время.

Знакомство с этой теорией, простой и оригинальной по идее, изящной по математическому изложению и выводам в применении к геодезии, весьма полезно для геодезиста; она прекрасно показывает достоинство использования поверхности шара для проектирования на нее поверхности эллипсоида с малым сжатием. Применение этой теории в геодезии наглядно и доходчиво иллюстрирует один из основных методов решения основных задач сфероидической геодезии.

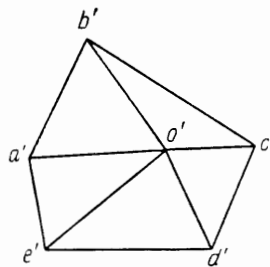
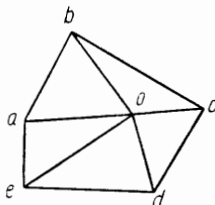


Рис. 48

Учитывая общее значение Гауссовой теории, приводим изложение ее основ и предложенное Гауссом применение теории к решению главной геодезической задачи.

Основные формулы конформного изображения эллипсоида на шаре. Конформным называется такое изображение эллипсоида на шаре, при котором бесконечно малый контур на поверхности эллипсоида изображается подобным ему контуром на шаре.

Возьмем на поверхности эллипсоида бесконечно малую фигуру  $abcde$  с центром  $O$  (рис. 48). При конформном изображении эта фигура изобразится на шаре подобной ей фигурой  $a'b'c'd'e'$  с центром  $O'$ .

В теории картографических проекций доказывается, что при произвольном законе изображения эллипсоида на шаре всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления на эллипсоиде, которые на шаре также остаются взаимно перпендикулярными. Эти два направления называются главными направлениями; масштаб изображения по этим направлениям в общем случае будет иметь максимальное и минимальное значения. При конформном изображении масштабы в каждой точке по обоим главным направлениям должны быть равны. Если обозначить масштаб изображения по меридиану через  $m$ , а масштаб изображения по параллели — через  $n$ , то условие конформности получится

$$m = n. \quad (28.1)$$

Введем обозначения:

$B$  и  $L$  — широта и долгота некоторой точки на поверхности эллипсоида;  
 $U$  и  $\omega$  — широта и долгота изображения точки на поверхности шара.

В общем случае закон изображения эллипсоида на шаре выражается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} U &= F_1(B, L) \\ \omega &= F_2(B, L) \end{aligned} \right\}, \quad (28.2)$$

для которых имеем только одно условие: в пределах изменения  $B$  и  $L$  каждым действительным значениям  $B$  и  $L$  соответствуют действительные значения  $U$  и  $\omega$ .

Поставим далее условие, чтобы меридианы на эллипсоиде изображались меридианами на шаре и параллели на эллипсоиде — параллелями на шаре.

В этом случае уравнения (28.2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= f_1(B) \\ \omega &= f_2(L) \end{aligned} \right\}. \quad (28.3)$$

Вид функций  $f_1$  и  $f_2$  определяется исходя из следующих соображений.

Возьмем на поверхности эллипсоида точку  $A$  и бесконечно близкую к ней точку  $B$  (рис. 49); пусть изображениями этих точек на поверхности шара будут точки  $A_1$  и  $B_1$ .

Обозначим координаты точки  $A$  через  $B$  и  $L$ , а точки  $B$  — через  $B + dB$  и  $L + dL$ ; соответственно на шаре имеем координаты  $U$  и  $\omega$  для точки  $A_1$ ,  $U + dU$  и  $\omega + d\omega$  — для точки  $B_1$ .

Дуга  $BC$  — элемент параллели точки  $B$ ;  $B_1C_1$  — изображение этого элемента на шаре.

Определим масштаб изображения по меридиану и параллели для точки  $A$ . Будем иметь:

для масштаба по меридиану

$$m = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{R dU}{M dB};$$

для масштаба по параллели

$$n = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{R \cos U d\omega}{N \cos B dL},$$

$R$  — радиус шара.

Для того, чтобы изображение было конформным, необходимо и достаточно, чтобы  $m = n$ . Отсюда

$$\frac{R dU}{M dB} = \frac{R \cos U d\omega}{N \cos B dL},$$

откуда

$$\frac{dU}{\cos U} = \frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B} \frac{d\omega}{dL}. \quad (28.4)$$

Но, согласно (28.3), сферическая широта  $U$  должна зависеть только от  $B$ , а долгота  $\omega$  — только от  $L$ ; следовательно,  $\frac{d\omega}{dL}$  должна быть постоянной величиной.

Обозначая  $\frac{d\omega}{dL} = \alpha$ , находим

$$\omega = \alpha L + \beta, \quad (28.5)$$

где  $\beta$  — постоянное интегриации.

Если долготы на эллипсоиде и шаре считать от одного меридиана, то для начального меридиана  $\omega = L = 0$ , следовательно, и  $\beta$  равно нулю, поэтому уравнение (28.5) примет вид

$$\omega = \alpha L. \quad (28.6)$$

Преобразуем выражение (28.4) для  $\frac{dU}{\cos U}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \frac{M dB}{N \cos B} = \frac{\alpha (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB = \alpha \frac{1-e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB, \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{1-e^2 \sin^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB - \frac{e^2 \cos^2 B}{(1-e^2 \sin^2 B) \cos B} dB \right\}, \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e^2 \cos B}{1-e^2 \sin^2 B} dB \right\}, \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e d(e \sin B)}{1-e^2 \sin^2 B} \right\}, \\ \frac{dU}{\cos U} &= \alpha \left\{ \frac{dB}{\cos B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1-e \sin B} - \frac{e}{2} \frac{d(e \sin B)}{1+e \sin B} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\lg \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \lg \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) + \lg \left( \frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} - \lg k,$$

где  $k$  — постоянное интегриации, или

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U}{2} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left( \frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}. \quad (28.7)$$

Формулы (28.6) и (28.7) выражают закон конформного изображения эллипсоида на шаре.

Для использования полученных формул необходимо знать значения постоянных  $\alpha$ ,  $k$  и  $R$ , входящих в формулы (28.6) и (28.7).

Постоянные можно определить различно. Для использования конформного изображения эллипсоида на шаре с целью решения геодезической задачи постоянные целесообразно определять из условий наибольшей простоты переноса элементов эллипсоида на шар и минимальных искажений в пределах той области, в которой располагаются исходный и определяемый пункты. В связи с этим для определения постоянных поставим условия, чтобы масштаб изображения на некоторой широте  $B_0$ , называемой нормальной широтой, равнялся единице и изменение масштаба при удалении к северу и югу от параллели с нормальной широтой происходило возможно медленнее.

Выполнение этих условий позволит в пределах некоторой области считать масштаб изображения практически постоянным и равным единице. В этом случае, очевидно, будет обеспечена малость поправок за переход с эллипсоида на шар и достигнута простота их вычисления и учета.

Если обозначим через  $U_0$  широту на шаре, соответствующую нормальной широте  $B_0$  на эллипсоиде, то математическое условие первое выразится так:

$$n_0 = m_0 = \alpha \frac{R \cos U_0}{N_0 \cos B_0} = 1, \quad (28.8)$$

где  $n_0$  — масштаб изображения на параллели под широтой  $B_0$ .

Для математического выражения второго условия напишем сначала выражение для масштаба в виде

$$m = m_0 + \left(\frac{dm}{dB}\right)_0 (B - B_0) + \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 \frac{(B - B_0)^2}{2} + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6} + \dots,$$

где  $B$  — широта текущей точки, находящейся на расстоянии  $B - B_0$  от нормальной широты.

С учетом (28.8) напишем

$$m = 1 + \left(\frac{dm}{dB}\right)_0 (B - B_0) + \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 \frac{(B - B_0)^2}{2} + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6} + \dots$$

Условие медленного изменения масштаба при удалении от параллели с широтой  $B_0$  целесообразно выразить так:

$$\left(\frac{dm}{dB}\right)_0 = 0 \text{ и } \left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_0 = 0. \quad (28.9)$$

Выражения (28.8) и (28.9), дающие три уравнения, позволяют определить три постоянные. Находим производные (28.9), учитывая (28.8), и совместно решаем три полученных уравнения; после соответствующих преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin U_0 &= \frac{\sin B_0}{\alpha} \\ \alpha^2 &= 1 + \frac{e^2 \cos^4 B_0}{1 - e^2} \end{aligned} \right\}. \quad (28.10)$$

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U_0}{2} \right)} \left( \frac{1 - e \sin B_0}{1 + e \sin B_0} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad (28.11)$$

$$R = \sqrt{M_0 N_0}. \quad (28.12)$$

Из (28.12) следует, что радиус шара равен среднему радиусу кривизны эллипсоида в точке с широтой  $B_0$ .

В математической картографии, когда стоит задача изображения всего эллипсоида на шаре, принимают  $L = \omega$ , т. е.  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$  (что означает совпадение плоскостей экваторов эллипсоида и шара) и

$$R = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right) \text{ или } R = a.$$

При условии (28.9) легко найдем выражение масштаба  $m$

$$m = 1 + \left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0 \frac{(B - B_0)^3}{6}.$$

Вычисляя  $\left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_0$ , получаем в логарифмическом виде

$$\lg m = -\frac{2}{3} \mu \frac{e^2 (1 - e^2) \sin B_0 \cos B_0}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^2} (B - B_0)^3. \quad (28.13)$$

Для  $(B - B_0) = 1 \frac{1^\circ}{4}$  и  $B_0 = 55^\circ$   
 $\lg m = 0.000\,000\,01$ .

Отсюда можно сделать весьма важный вывод: в пределах зоны, ограниченной  $B_0 - 1 \frac{1^\circ}{4}$  и  $B_0 + 1 \frac{1^\circ}{4}$ , т. е. в пределах пояса шириной до 250 км, практически масштаб можно считать равным единице при указанном выше условии выбора постоянных.

Этот вывод исчерпывающе показывает выгоду использования поверхности шара для проектирования поверхности эллипсоида и малую величину искажений, обусловленную незначительностью сжатия земного эллипсоида.

Таким образом, если триангуляционная сеть расположена на расстоянии 100—120 км к северу или югу от параллели с нормальной широтой (и, конечно, как угодно далеко по долготе), то можно считать, что элементы триангуляции на эллипсоиде переносятся на шар без искажений: угловые — по конформности проекции, а линейные — по малости искажений. Этим обстоятельством мы воспользуемся при выводе формул для решения геодезической задачи.

Однако в азимуты приходится вводить поправку, хотя проекция и конформна. Дело в том, что геодезическая линия на эллипсоиде изображается на шаре кривой, не совпадающей с дугой большого круга.

Пусть на рис. 50 кривая  $A_1NB_1$  — изображение геодезической линии  $AB$  на шаре; эта кривая будет двойкой кривизны. Азимут ее в точке  $A_1$  по конформности изображения в точности равен азимуту  $A_{1,2}$  геодезической линии на эллипсоиде. Пусть  $A_1MB_1$  — дуга большого круга, соединяющая точки  $A_1$  и  $B_1$ . Чтобы в дальнейшем иметь возможность пользоваться формулами сферической тригонометрии, необходимо в азимут кривой  $A_1NB_1$  ввести поправку, равную разности азимутов кривой  $A_1NB_1$  и дуги большого круга  $A_1MB_1$ . После этого треугольники на шаре будут иметь стороны, являющиеся дугами больших кругов. Однако вследствие близости земного эллипсоида к шару эта поправка вводится лишь в значения направлений, конечные точки которых расположены на расстоянии более 50—70 км от параллели с нормальной широтой  $B_0$ . При расположении точек на меньших расстояниях этой поправкой можно пренебречь.

Упрощенные выражения для  $(A - \beta)$ :

$$A_{1,2} - \beta_{1,2} = s \sin A_{1,2} \left( \frac{2k_1 + k_2}{3} \right),$$

$$A_{2,1} - \beta_{2,1} = -\sin A_{1,2} \left( \frac{k_1 + 2k_2}{3} \right),$$

где

$$k_i = \frac{e^2 \sin B_0 \cos B_0 \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{3/2}} (B_i - B_0)^2,$$

$$i = 1, 2.$$

При удалении пунктов триангуляции от параллели с широтой  $B_0$  более чем на  $1^\circ$  (110 км) следует учитывать линейные искажения.

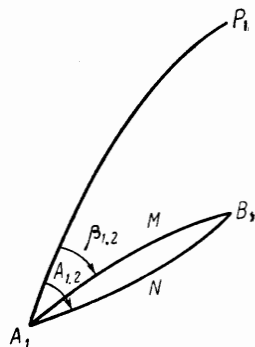


Рис. 50



Если обозначить через  $ds$  элемент геодезической линии на эллипсоиде в точке  $A$ , а через  $dS$  — элемент дуги большого круга на шаре, то

$$m = \frac{dS}{ds},$$

откуда

$$S = \int m ds, \quad (28.14)$$

Подставляем в (28.14) значение  $m$  и интегрируем; после преобразований получим

$$S = s \sqrt{m_1 m_2}$$

или

$$\lg S = \lg s + \frac{\lg m_1 + \lg m_2}{2}, \quad (28.15)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — масштабы изображения в точках  $A$  и  $B$ .

Решение прямой геодезической задачи с применением Гауссовой теории изображения эллипсоида на шаре. В качестве иллюстрации применения теории Гаусса к задачам высшей геодезии выведем формулы для решения прямой геодезической задачи, которые получены в § 26. Общий ход решения задачи состоит в том, что исходные данные  $B_1, L_1, A_{12}, s$ , отнесенные к поверхности эллипсоида, переносятся на шар по закону конформного изображения эллипсоида на шаре. Задача решается на поверхности шара, в результате чего определяются широта, разность долгот и обратный азимут на шаре. В соответствии с тем же законом изображения осуществляется обратный переход с шара на эллипсоид, в результате которого и определяются искомые величины: широта  $B_2$ , разность долгот  $l$  и обратный азимут  $A_{21}$ .

Задачу можно решать двумя способами: 1) путем перехода от числовых значений исходной широты, азимута и длины стороны на эллипсоиде к соответственным числовым значениям этих же величин на шаре, решения сферического треугольника с числовыми данными и обратного перехода с шара на эллипсоид также с числовыми данными; 2) переход с эллипсоида на шар, решение сферического треугольника на шаре и обратный переход с шара на эллипсоид осуществляют в процессе вывода формул в общем виде, а не с числовыми данными задачи. В этом случае шар используется как промежуточная поверхность при выводе формул, выражающих искомые разности широт, долгот и азимутов. Элементы сферического треугольника, которые появляются в процессе вывода формул, исключаются, и окончательные формулы выражают зависимость между данными и искомыми величинами на эллипсоиде.

Первый способ вследствие громоздкости на практике не применяется. Второй способ довольно часто находит применение, поэтому ниже он изложен с необходимой подробностью. При выводе формул будем иметь в виду их применение для вычисления координат по сторонам треугольников триангуляции, т. е. для расстояний, не превышающих 50 км.

Вывод формул для второго способа, данный Гауссом, основан на разложении в ряды искомых величин. Приведем вывод этих формул, предложенный проф. Ф. Н. Красовским. Этот вывод основан на геометрическом подходе; он прост и в то же время отчетливо показывает достоинства использования конформного изображения эллипсоида на шаре для решения геодезической задачи.

При выводе будем следовать указанному выше общему порядку решения задачи.

1. Переход от исходных данных на эллипсоиде к соответствующим им величинам на шаре. Пусть на эллипсоиде (рис. 51):

- $B_1$  и  $B_2$  — широты точек  $A$  и  $B$ ;
- $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$  — прямой и обратный азимуты геодезической линии  $AB$ ;
- $l$  — разность долгот точек  $A$  и  $B$ ;
- $s$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

Пусть точки  $A_1$  и  $B_1$  — изображения на шаре точек  $A$  и  $B$  эллипсоида, имеющие широты  $U_1$  и  $U_2$ .

Нормальную широту на шаре примем  $U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$ . Проведем параллели  $B_1D_1$  и  $E_1F_1$  через точки  $B_1$  и  $C_1$  на шаре, тогда точки  $E_1$  и  $F_1$  будут точками пересечения последней параллели с меридианами  $A_1P_1$  и  $B_1P_1$ . Пусть точка  $C$  на эллипсоиде соответствует точке  $C_1$  на шаре, т. е. точка  $C_1$  — изображение на шаре точки  $C$ . Проведем параллель через точку  $C$ , и пусть точки  $E$  и  $F$  — пересечение параллели с меридианами  $AP$  и  $BP$ . Так как параллели на эллипсоиде изображаются параллелями на шаре, то точки  $E_1, F_1, D_1$  будут изображениями точек  $E, F, D$ .

Широта параллели  $EF$  — нормальная широта  $B_0$  на эллипсоиде. Так как разности  $B_1 - B_0$  и  $B_2 - B_0$  для сторон триангуляции не превышают  $\frac{1^\circ}{3}$ , то, согласно (28.13), масштаб изображения в пределах зоны расположения дуги  $AB$  можно считать постоянным и равным единице. Иначе говоря, все линейные элементы в пределах треугольника  $ABD$  переносятся на шар практически без искажений, в том числе и длина стороны  $AB = S$ , являющаяся одной из исходных величин для решения задачи.

Имея это в виду, можно написать

$$A_1E_1 = E_1D_1 = AE = ED.$$

Возьмем на меридиане  $AP$  точку  $H$ , имеющую широту

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

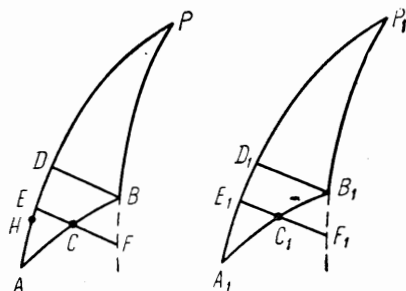


Рис. 51

Понятно, что точки  $H$  и  $E$  не совпадут: точка  $E$  располагается посередине дуги  $AD$ , т. е. на одинаковом линейном расстоянии от точек  $A$  и  $D$  по дуге меридиана; точка же  $H$  располагается так, что разности широт между этой точкой и точками  $A$  и  $D$  одинаковы. Вследствие разницы в кривизне меридиана точка  $H$  будет находиться на разных линейных расстояниях от точек  $A$  и  $D$ .

Найдем разность широт точек  $H$  и  $E$ , т. е.  $B_m - B_0$ .

Напишем

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} = B_1 + \frac{b}{2},$$

где

$$b = B_2 - B_1.$$

Применяя формулу (25.14) для  $b$ , получаем

$$B_m = B_1 + \frac{u}{2M_1} \rho'' \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''}{\rho''} \right). \quad (28.16)$$

Для вычисления широты  $B_0$  воспользуемся той же формулой (25.11), так как точка  $E$ , имеющая широту  $B_0$ , расположена на расстоянии  $\frac{AD}{2}$  от точки  $A$ . Заменяя в этой формуле  $u = s \cos A_{1.2}$  через  $\frac{u}{2}$  и  $b$  через  $\frac{b}{2}$ , получаем

$$B_0 = B_1 + \frac{u}{2M_1} \rho'' \left( 1 - \frac{3}{4} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''}{2\rho''} \right). \quad (28.17)$$

Сравнивая (28.16) с (28.17), находим

$$B_m - B_0 = -\frac{3}{16} e^2 \sin 2B_1 \frac{b''^2}{\rho''}. \quad (28.18)$$

Для  $b'' = 1300''$  (что соответствует расстоянию  $s = 40$  км) при широте  $B = 60^\circ$  получим

$$B_m - B_0 < \frac{1''}{120}.$$

Такое малое расхождение между  $B_m$  и  $B_0$  позволит в дальнейшем не отличать радиусов  $M_0$  и  $N_0$ , вычисленных для широты  $B_0$ , от радиусов  $M_m$  и  $N_m$ , вычисленных для широты  $B_m$ .

Поправка в азимут за переход от изображения геодезической линии на шаре к дуге большого круга при настоящем выборе нормальной широты и при  $s \leq 60$  км будет пренебрегаемо мала.

Таким образом, при расстоянии  $s$  между пунктами  $A$  и  $B$ , не превышающем 40 км, и указанном выборе нормальной параллели два элемента треугольника

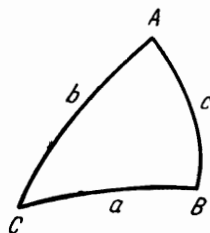


Рис. 52

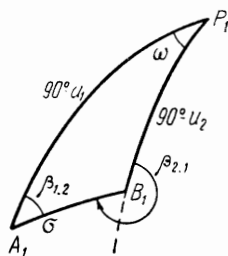


Рис. 53

$ABP$  — сторона  $AB = s$ , и азимут  $A_{1.2}$  — переносятся на шар практически без заметных искажений. При этом за нормальную широту на эллипсоиде для стороны  $AB$  следует принять

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}.$$

Сферический треугольник  $A_1B_1P_1$  решают по особым формулам, в которых в качестве третьего исходного элемента участвует  $U_0 = \frac{U_1 + U_2}{2}$ . Зависимость

между  $U_0$  и соответствующей широтой  $B_0$  (или, как показано выше, широтой  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ ) определяется на основании (28.10)

$$\sin U_0 = \frac{\sin B_m}{\alpha}. \quad (28.19)$$

Решение сферического треугольника. Для треугольника  $ABC$  (рис. 52) имеем формулы Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{C-B}{2} &= \sin \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2} \\ \sin \frac{a}{2} \sin \frac{C-B}{2} &= \sin \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \cos \frac{C+B}{2} &= \cos \frac{c+b}{2} \sin \frac{A}{2} \\ \cos \frac{a}{2} \sin \frac{C+B}{2} &= \cos \frac{c-b}{2} \cos \frac{A}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (28.20)$$

Применим эти формулы к решению треугольника  $A_1B_1P_1$  (рис. 53). Обозначим:

$U_1$  и  $U_2$  — широты  $A_1$  и  $B_1$ ;

$\omega$  — разность долгот этих точек;

$\sigma$  — расстояние  $A_1B_1$  по дуге большого круга;

$\beta_{1.2}$  и  $\beta_{2.1}$  — прямой и обратный азимуты дуги  $A_1B_1$ .

Тогда

$$a = \sigma; \quad C = \beta_{1.2}; \quad b = 90^\circ - U_1; \quad A = \omega; \quad c = 90^\circ - U_2; \quad B = 360^\circ - \beta_{2.1}.$$

Кроме того, обозначим:

$$\begin{aligned} \frac{U_1 + U_2}{2} &= U_0; \quad U_2 - U_1 = q; \quad \beta'_{2.1} = \beta_{2.1} - 180; \quad \frac{\beta'_{2.1} + \beta_{1.2}}{2} = \beta_m; \\ \beta'_{2.1} - \beta_{1.2} &= t. \end{aligned}$$

Формулы (28.20) с принятыми обозначениями примут вид:

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \beta_m = \sin \frac{\omega}{2} \cos U_0,$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \beta_m = \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{q}{2},$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{\omega}{2} \sin U_0,$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{t}{2} = \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{q}{2}.$$

Раскладывая синусы и косинусы малых дуг в ряд, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \sin \beta_m &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \cos U_0 \\ \sigma \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \cos \beta_m &= q \left(1 - \frac{q^2}{24}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{8}\right) \\ t \left(1 - \frac{\sigma^2}{8}\right) \left(1 - \frac{t^2}{24}\right) &= \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \sin U_0 \\ \sigma^2 + t^2 &= q^2 + \omega^2 \end{aligned} \right\}. \quad (28.21)$$

Находим из (28.21) выражения для искомых величин  $q$ ,  $\omega$  и  $t$ :

$$\begin{aligned}\omega &= \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{24}\right), \\ q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24}\right) \left(1 + \frac{q^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{8}\right), \\ t &= \omega \sin U_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{24}\right) \left(1 + \frac{\sigma^2}{8}\right) \left(1 + \frac{t^2}{24}\right).\end{aligned}$$

Далее, с ошибками на величины пятого порядка малости, получим:

$$\left. \begin{aligned}\omega &= \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right) \\ q &= \sigma \cos \beta_m \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{q^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) \\ t &= \omega \sin U_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{t^2}{24}\right)\end{aligned}\right\}. \quad (28.22)$$

Учитывая последнее равенство в формулах (28.21), получаем

$$\left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{q^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) = \left(1 + \frac{t^2}{24} - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\omega^2}{8}\right) = \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right).$$

Подставляя в выражение для  $t$  значение  $\omega$ , находим

$$t = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{24} - \frac{\omega^2}{24} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{t^2}{24} - \frac{\sigma^2}{24}\right) = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right).$$

Таким образом, окончательно получим:

$$q = \sigma \cos \beta_m \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right), \quad (28.23)$$

$$\omega = \sigma \sin \beta_m \sec U_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\omega^2}{24}\right), \quad (28.24)$$

$$t = \sigma \sin \beta_m \operatorname{tg} U_0 \left(1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24}\right). \quad (28.25)$$

2. Переход от разностей координат и азимутов на шаре к соответствующим величинам на эллипсоиде. Воспользуемся зависимостью, существующей между величинами на шаре и эллипсоиде:

1) так как  $AD = A_1D_1$  (рис. 51), то

$$\frac{b''M_m}{\rho''} = \frac{q''R}{\rho''},$$

откуда

$$q'' = \frac{b''M_m}{R}; \quad (28.26)$$

2) на основании (28.6), (28.8) и (28.10) имеем:

$$\omega = \alpha l'', \quad (28.27)$$

$$\alpha \cos U_0 = \frac{N_m}{R} \cos B_m, \quad (28.28)$$

$$\alpha \sin U_0 = \sin B_m. \quad (28.29)$$

В последних двух формулах на основании предыдущего нормальная широта  $B_0$  заменена через  $B_m$ .

Подставляем (28.26) в (28.23), принимая во внимание, что

$\sigma'' = \frac{s}{R} \rho''$  и  $\beta_m = A_m$ , а в поправочном члене  $\omega$  заменяя на  $l$  получаем

$$\frac{b'' M_m}{R} = \frac{s}{R} \rho'' \cos A_m \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right). \quad (28.30)$$

Отсюда находим

$$b'' = \frac{s}{M_m} \rho'' \cos A_m \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right), \quad (28.31)$$

или

$$b'' = s \cos A_m (1)_m \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right), \quad (28.32)$$

так как  $t \approx l \sin B$ , то получаем

$$b'' = s \cos A_m (1)_m \left( 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (28.33)$$

Подставляя (28.27) в (28.24), находим

$$\alpha l'' = \frac{s}{R} \rho'' \frac{\sin A_m}{\cos U_0} \left( 1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{l^2}{24} \right).$$

Отсюда, принимая во внимание (28.28), имеем

$$l = \frac{s}{N_m} \rho'' \sin A_m \sec B_m \left( 1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{l^2}{24} \right),$$

но по (28.21) находим

$$l^2 - \sigma^2 = t^2 - b^2 = l^2 \sin^2 B_m - b^2$$

и окончательно получаем

$$l = s \sin A_m (2)_m \sec B_m \left( 1 - \frac{b^2}{24} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (28.34)$$

При получении выражения для сближения меридианов заметим, что в рассматриваемом случае

$$t = A_{2,1} - A_{1,2} \pm 180^\circ.$$

Разделив (28.29) на (28.28), получим

$$\operatorname{tg} U_0 = \frac{R}{N_m} \operatorname{tg} B_m. \quad (28.35)$$

Если принять во внимание (28.35), то выражение (28.25) примет вид

$$t'' = \frac{s}{R} \rho'' \sin A_m \frac{R}{N_m} \operatorname{tg} B_m \left( 1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right),$$

или

$$t'' = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \rho'' \left( 1 + \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} \right). \quad (28.36)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{12} + \frac{t^2}{24} &= \frac{\sigma^2 + t^2}{12} - \frac{t^2}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{12} - \frac{t^2}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{24} + \frac{l^2}{24} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} = \\ &= -\frac{b^2}{12} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{24} + \frac{l^2 (\sin^2 B_m + \cos^2 B_m)}{24} = \frac{b^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$t'' = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \rho'' \left( 1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12} + \frac{b^2}{12} \right). \quad (28.37)$$

Напишем все формулы вместе:

$$\left. \begin{aligned} b'' &= s \cos A_m (1)_m \left( 1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2}{12} \right) \\ l'' &= s \sin A_m \sec B_m (2)_m \left( 1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} - \frac{b^2}{24} \right) \\ t'' &= s \sin A_m \operatorname{tg} B_m (2)_m \left( 1 + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} + \frac{l^2 \cos^2 B_m}{12} + \frac{b^2}{12} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (28.38)$$

Искомые координаты второй точки определяются из формул:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + b \\ L_2 &= L_1 + l \\ A_{2,1} &= A_{1,2} \pm 180^\circ + t \end{aligned} \right\}. \quad (28.39)$$

Итак, мы получили формулы, тождественные с формулами, выведенными в § 26.

Можно указать еще на одно применение изложенной Гауссовой теории в геодезии. При изображении поверхности эллипсоида на плоскости функциональные зависимости, выражающие закон изображения, имеют сложный вид и представляются бесконечными рядами. Эти зависимости при проектировании эллипсоида на плоскость не имеют точной геометрической интерпретации. В то же время при проектировании поверхности шара на плоскость соответствующие аналитические зависимости изображения становятся простыми; они имеют ясное и точное геометрическое толкование и выражаются строгими формулами. Поэтому ряд авторов проекции поверхности эллипсоида на плоскость использовали идею двойного проектирования: сначала поверхность эллипсоида изображается на шаре, затем переносится с шара на плоскость. Эта идея, в частности, была использована Зольднером в теории проекции, носящей его имя; Крюгером — в теории стереографической проекции. В этом случае конформную проекцию Гаусса следует признать одной из наилучших при переходе с эллипсоида на шар.

В настоящее время путь двойного проектирования поверхности эллипсоида на шар используется редко; он имеет историческое значение, в то же время представляет существенный методический интерес.

## § 29. Решение главной геодезической задачи по способу Бесселя

Способ Бесселя применяется при решении геодезической задачи на большие расстояния — от 600—800 км и более. В основе способа лежит прямой путь решения геодезической задачи, в котором непосредственно находятся искомые величины, т. е. широта и долгота второй точки и азимут со второй точки на первую — прямая геодезическая задача; в обратной задаче вычисляются прямой и обратный азимуты и расстояние между заданными пунктами.

По способу Бесселя задача решается по следующему плану:

1. Треугольник  $APB$  (рис. 54) переносится на шар по заданным трем элементам треугольника при помощи основного уравнения геодезической линии

$$\cos u_1 \sin A_{1.2} = \cos u_2 \sin A'_{2.1} = c. \quad (29.1)$$

2. После указанного перехода полученный на сфере треугольник  $A_1P_1B_1$  (рис. 55) решается относительно известных его элементов.

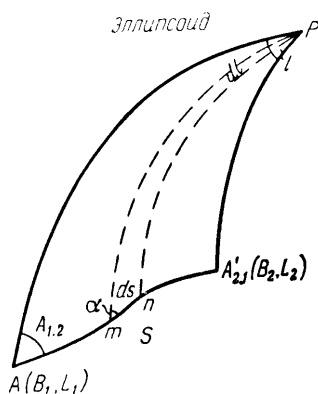


Рис. 54

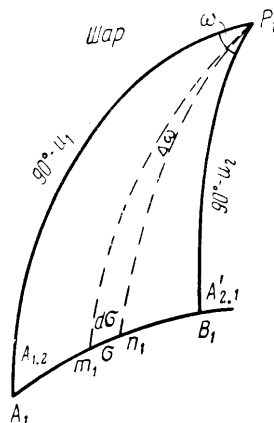


Рис. 55

3. От вычисленных из решения сферического треугольника элементов осуществляется переход к соответствующим элементам сфероидического треугольника.

Остановимся подробнее на переходе от сфероидического треугольника  $APB$  к сферическому  $A_1P_1B_1$ .

Если обозначим элементы сферического треугольника так, как показано на рис. 55, то уравнение геодезической линии (29.1) представит собой одновременно точную зависимость, вытекающую из теоремы синусов для этого треугольника

$$\frac{\sin A_{1.2}}{\sin(90^\circ - u_2)} = \frac{\sin(180^\circ - A'_{2.1})}{\sin(90^\circ - u_1)}. \quad (29.2)$$

Отсюда можно установить соотношения и соответствия между элементами сфероидического треугольника  $APB$  и сферического  $A_1P_1B_1$ .

1. Стороны  $A_1P_1$  и  $B_1P_1$  на сфере равны дополнениям до  $90^\circ$  приведенных широт точек  $A$  и  $B$  на эллипсоиде, т. е.  $90 - u_1$  и  $90 - u_2$ ; точка  $P_1$  на шаре играет роль полюса. Согласно (4.27), приведенные широты  $u$  определяются по формуле

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

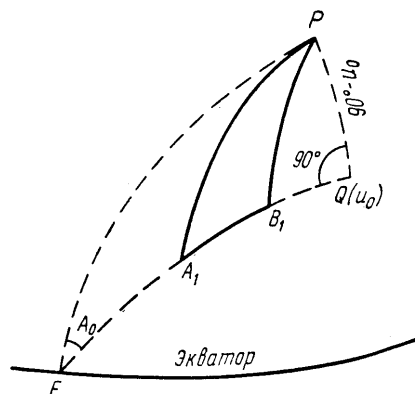


Рис. 56



2. Геодезическая линия  $s$  на эллипсоиде между точками  $A$  и  $B$  соответствует на сфере дуге большого круга  $\sigma$ , на которой в каждой ее точке азимуты равны азимутам геодезической линии в соответствующих точках на эллипсоиде. Следовательно, углы сфероидического треугольника  $APB$  в точках  $A$  и  $B$  равны углам сферического в точках  $A_1$  и  $B_1$ .

Эти зависимости однозначно определяют элементы сферического треугольника  $A_1P_1B_1$ .

В дальнейшем (для упрощения) радиус сферы будем считать равным единице.

Укажем попутно геометрический смысл постоянного  $c$  в уравнении (29.1). Если продолжим дугу большого круга до экватора в точке  $F$  ( $u = 0$ ) и до пересечения в точке  $Q$  с меридианом, составляющим с дугой угол  $90^\circ$  (рис. 56), то получим:

$$\text{для точки } F \quad c = \sin A_0,$$

$$\text{» » } Q \quad c = \cos u_0.$$

Для получения формул решения задачи по способу Бесселя необходимо установить зависимость между разностями долгот пунктов на эллипсоиде и на сфере, т. е. между  $l$  и  $\omega$ , а также между длиной геодезической линии на эллипсоиде  $s$  и дугой большого круга  $\sigma$  на сфере.

Ход вывода формул для решения главной геодезической задачи по способу Бесселя:

1. Вывод дифференциальных уравнений, устанавливающих связь между  $s$  и  $\sigma$ ,  $l$  и  $\omega$ .

2. Интегрирование полученных дифференциальных уравнений.

3. Решение треугольника на сфере применительно к условиям прямой и обратной задачи и окончательное вычисление определяемых величин.

### 1. Вывод дифференциальных уравнений

Обозначим (рис. 54):

$ds$  — бесконечно малый элемент геодезической линии  $s$  на эллипсоиде;

$\alpha$  — азимут элемента  $ds$ ;

$B$  и  $u$  — геодезическая и приведенная широты текущей точки  $m$ ;

$du$  и  $dl$  — разности широт и долгот точек  $m$  и  $n$ .

На рис. 55:

$d\sigma = m_1 n_1$  — бесконечно малый элемент дуги большого круга на сфере, соответствующий элементу  $ds$  на эллипсоиде;

$d\omega$  — разность долгот точек  $m_1$  и  $n_1$  на сфере.

С этими обозначениями:

$$du = d\sigma \cos \alpha,$$

$$M dB = ds \cos \alpha,$$

откуда

$$\frac{du}{dB} = M \frac{d\sigma}{ds}. \quad (29.3)$$

На основании (4.28) и (4.29) напомним:

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}, \quad (29.4)$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos u}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}, \quad (29.5)$$

откуда

$$\cos u \, du = \sqrt{1-e^2} \left\{ \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} + \frac{e^2 \sin^2 B \cos B}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \right\} dB \quad (29.6)$$

и

$$\frac{du}{dB} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos u} \frac{\cos B}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}. \quad (29.7)$$

Из (29.5)

$$\frac{\cos B}{\cos u} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}; \quad (29.8)$$

тогда, принимая во внимание (29.8) и умножая числитель и знаменатель в (29.7) на  $a$ , получаем

$$\frac{du}{dB} = \frac{a(1-e^2)}{a(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}},$$

или окончательно

$$\frac{du}{dB} = \frac{M}{a} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}}. \quad (29.9)$$

На основании (29.3) и (29.9)

$$\frac{M}{a} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}} = M \frac{d\sigma}{ds},$$

откуда

$$ds = a \sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \, d\sigma. \quad (29.10)$$

Далее, из рис. 54 и 55 имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\omega \cos u &= d\sigma \sin \alpha \\ N \cos B \, dl &= ds \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (29.11)$$

Откуда в результате деления получаем

$$\frac{N \cos B}{\cos u} \frac{dl}{d\omega} = \frac{ds}{d\sigma}. \quad (29.12)$$

Принимая во внимание (29.10),

$$N \cos B \, dl = a \cos u \sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \, d\omega.$$

Учитывая (4.22), получаем окончательно

$$dl = \sqrt{1-e^2 \cos^2 u} \, d\omega. \quad (29.13)$$

## 2. Интегрирование дифференциальных уравнений

Оставляя прежние обозначения элементов полярного сферического треугольника, выполняем вспомогательные построения, показанные на рис. 57: проводим из точки  $P_1$  дугу большого круга перпендикулярно к продолжению стороны  $A_1B_1$  до пересечения с последней в точке  $C$ .

В образовавшемся прямоугольном треугольнике обозначим катеты  $P_1C$  через  $m$ , а  $A_1C$  через  $90^\circ - M$ . При заданных  $u_1$  и  $A_{1.2}$  эти катеты можно считать известными. Они получаются из решения прямоугольного треугольника  $A_1P_1C$  по формулам:

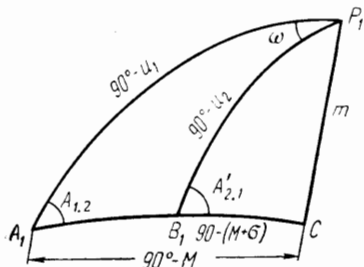


Рис. 57

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} M &= \frac{\operatorname{tg} u_1}{\cos A_{1.2}} \\ \operatorname{ctg} M &= \frac{\sin m \operatorname{ctg} A_{1.2}}{\sin u_1} \end{aligned} \right\} \quad (29.14)$$

$$\sin m = \sin A_{1.2} \cos u_1, \quad (29.15)$$

$$\cos m = \frac{\sin u_1}{\sin M} = \frac{\cos u_1 \cos A_{1.2}}{\cos M}. \quad (29.16)$$

Будем в дальнейшем рассматривать точку  $B_1$  как текущую, имеющую широту  $u$ . Из прямоугольного сферического треугольника  $B_1P_1C$  имеем:

$$\sin u = \cos m \sin (M + \sigma), \quad (29.17)$$

$$\cos^2 u = 1 - \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma). \quad (29.18)$$

Подставив последние выражения для  $\cos^2 u$  в (29.10), получим

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma$$

или

$$ds = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma. \quad (29.19)$$

Приняв во внимание (2.6) и (2.7), напомним

$$ds = b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma. \quad (29.20)$$

Обозначая  $e'^2 \cos^2 m$  через  $k^2$ , получаем

$$ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 (M + \sigma)} d\sigma. \quad (29.21)$$

Как известно, полученное уравнение не интегрируется в элементарных функциях; разложим подкоренное выражение в биномиальный ряд с целью последующего почленного интегрирования.

Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 (M + \sigma)} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 (M + \sigma) - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 (M + \sigma) + \\ &+ \frac{k^6}{16} \sin^6 (M + \sigma) - \dots \end{aligned}$$

В дальнейшем выводе ограничимся членами с  $k^4$ . Заменяем синусы четных степеней через косинусы кратных дуг на основании известных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2(M+\sigma) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(M+\sigma) \\ \sin^4(M+\sigma) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(M+\sigma) + \frac{1}{8} \cos 4(M+\sigma) \end{aligned} \right\}. \quad (29.22)$$

Выполняя указанную подстановку, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{1+k^2 \sin^2(M+\sigma)} &= \left(1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4\right) + \\ &+ \left(-\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4\right) \cos 2(M+\sigma) - \frac{k^4}{64} \cos 4(M+\sigma). \end{aligned} \quad (29.23)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 \\ B &= \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} \\ C &= \frac{k^4}{128} \end{aligned} \right\}. \quad (29.24)$$

Напишем на основании (29.21) и (29.23)

$$s = b \int_0^\sigma [A - B \cos 2(M+\sigma) - 2C \cos 4(M+\sigma) + \dots] d\sigma. \quad (29.25)$$

Интегралы от второго и третьего членов последнего ряда вычисляют так:

$$\begin{aligned} B \int_0^\sigma \cos 2(M+\sigma) d\sigma &= B \left[ \frac{1}{2} \sin 2(M+\sigma) \right]_0^\sigma = B \sin \sigma \cos (2M+\sigma), \\ 2C \int_0^\sigma \cos 4(M+\sigma) d\sigma &= 2C \left[ \frac{1}{4} \sin 4(M+\sigma) \right]_0^\sigma = C \sin 2\sigma \cos (4M+2\sigma) \end{aligned}$$

и выражение для  $s$  в функции  $\sigma$  получится

$$s = Ab\sigma - Bb \sin \sigma \cos (2M+\sigma) - Cb \sin 2\sigma \cos (4M+2\sigma). \quad (29.26)$$

Обратная зависимость будет иметь вид

$$\sigma'' = \frac{\rho''}{A} \frac{s}{b} + \frac{B\rho''}{A} \sin \sigma \cos (2M+\sigma) + \frac{C\rho''}{A} \sin 2\sigma \cos (4M+2\sigma) + \dots \quad (29.27)$$

Обозначим:

$$\alpha = \frac{\rho''}{bA}; \quad \beta = \frac{B\rho''}{A} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{C\rho''}{A}. \quad (29.28)$$

Тогда в окончательном виде выражение для  $\sigma$  получится

$$\sigma'' = \alpha s + \beta \sin \sigma \cos (2M+\sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M+2\sigma) + \dots \quad (29.29)$$

Из (29.29) можем написать для  $s$

$$s = \frac{1}{\alpha} [\sigma'' - \beta \sin \sigma \cos (2M+\sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos (4M+2\sigma) - \dots]. \quad (29.30)$$

Зависимость между  $l$  и  $\omega$ . Напишем предварительно соотношение для разности долгот на сфере

$$d\omega = d\sigma \sin \alpha \sec u. \quad (29.31)$$

Из решения треугольника  $B_1P_1C$  получим

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos u}. \quad (29.32)$$

С учетом (29.32) формула (29.31) примет вид

$$d\omega = \frac{\sin m}{\cos^2 u} d\sigma. \quad (29.33)$$

Обращаясь к исходному дифференциальному уравнению (29.13), отмечаем, что по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, подынтегральная функция предварительно должна быть разложена в бесконечный ряд. Поэтому пишем

$$dl = \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \dots\right) d\omega. \quad (29.34)$$

Приступая к интегрированию и принимая во внимание (29.33), находим

$$l = \omega - \frac{e^2}{2} \int_0^\sigma \left(\cos^2 u + \frac{e^2}{4} \cos^4 u\right) \frac{\sin m}{\cos^2 u} d\sigma. \quad (29.35)$$

Так как  $\sin m$  — величина постоянная, то напишем

$$l = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left(1 + \frac{e^2}{4} \cos^2 u\right) d\sigma. \quad (29.36)$$

Для замены переменной  $u$  через переменную  $\sigma$  воспользуемся выражением (29.18). Имеем

$$l = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left[1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} \cos^2 m \sin^2 (M + \sigma) \dots\right] d\sigma.$$

Делая замену, согласно (29.22), получаем

$$l = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \int_0^\sigma \left[1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{8} \cos^2 m + \frac{e^2}{8} \cos^2 m \cos 2(M + \sigma)\right] d\sigma.$$

Интегрируя почленно, находим

$$l = \omega - \frac{e^2 \sin m}{2} \sigma \left(1 + \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{8} \cos^2 m\right) - \frac{e^4 \sin m \cos^2 m}{16} \sin \sigma \cos (2M + \sigma). \quad (29.37)$$

Интеграл последнего члена вычислен аналогично (29.26).

Обозначая

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m\right) e^2 &= \alpha_1 \\ \frac{\cos^2 m \rho''}{16} e^4 &= \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (29.38)$$

и выражая  $l$  в секундах дуги, имеем окончательно

$$l'' = \omega'' - \sin m \{ \alpha_1 \sigma'' + \beta_1 \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \}. \quad (29.39)$$

Формулами (29.29), (29.30) и (29.39) решается задача интегрирования полученных ранее дифференциальных уравнений. Формула (29.29) служит для перехода от длины геодезической линии к дуге большого круга на шаре. Как видно из структуры этой формулы, вычисление  $\sigma$  по  $s$  следует вести последовательными приближениями:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \sigma_0 = \alpha s \\ 2 \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma_0) \\ 3 \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1) + \gamma \sin 2\sigma_1 \cos (4M + 2\sigma_1) \\ 4 \quad \sigma_3 = \sigma_0 + \beta \sin \sigma_2 \cos (2M + \sigma_2) + \gamma \sin 2\sigma_2 \cos (4M + 2\sigma_2) \end{array} \right\} \quad (29.40)$$

и т. д. — до совпадения результатов вычислений двух последних приближений в пределах заданной точности.

Формула (29.30) используется при решении обратной геодезической задачи. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  целесообразно выбирать из специально составленных таблиц.

Формула (29.39) служит для вычисления разности геодезических долгот  $l$  по разности сферических долгот  $\omega$  после решения сферического треугольника — в прямой геодезической задаче.

Согласно этой формуле осуществляется и обратный переход — при решении обратной геодезической задачи.

Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  также целесообразно вычислять по заранее составленным таблицам.

### *3. Порядок вычисления при решении прямой и обратной геодезических задач и формулы для решения сферического треугольника*

#### П р я м а я   г е о д е з и ч е с к а я   з а д а ч а

1. Вычисление приведенной широты исходного пункта по заданной геодезической широте

$$\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_1.$$

Можно применить формулу для разности  $(B_1 - u_1)$ , которая для размеров эллипсоида Красовского имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} B_1 - u_1 = 346,3143 \sin 2B_1 - 0,2907'' \sin 4B_1 + 0,0003 \sin 6B_1 \\ B_1 - u_1 = 346,3143 \sin 2u_1 + 0,2907'' \sin 4u_1 + 0,0003 \sin 6u_1 \end{array} \right\} \quad (29.41)$$

2. Вычисление вспомогательных величин  $m$  и  $M$  по формулам (29.14), (29.15), используя известный азимут  $A_1$  и вычисленную по (29.41) широту  $u_1$ .  
Вычисление коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ .

3. Вычисление  $\sigma$  по  $s$  по формуле (29.29), применяя способ последовательных приближений (29.40).

4. Решение сферического треугольника  $A_1P_1B_1$  производят по двум сторонам ( $90^\circ - u_1$ ) и  $\sigma$  и по углу между ними  $A_{1.2}$ . Применяя формулу Непера для наших обозначений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} + \omega}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1.2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} - \omega}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2}}{\cos \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2}} \operatorname{tg} \frac{A_{1.2}}{2} \end{aligned} \right\} (29.42)$$

$$\operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_1 + \sigma}{2} \frac{\sin \frac{A'_{2.1} - \omega}{2}}{\sin \frac{A'_{2.1} + \omega}{2}} = \operatorname{tg} \frac{90^\circ - u_1 - \sigma}{2} \frac{\cos \frac{A'_{2.1} - \omega}{2}}{\cos \frac{A'_{2.1} + \omega}{2}}$$

Для вычисления приведенной широты  $u_2$  второй точки и обратного азимута можно применять формулы из решения сферического прямоугольного треугольника  $B_1P_1C$ , аналогичные формулам (29.15) и (29.16):

$$\left. \begin{aligned} \sin u_2 &= \cos m \sin (M + \sigma) \\ \sin A_{2.1} &= \sin m \sec u_2 \\ \cos u_2 \cos A'_{2.1} &= \cos m \cos (M + \sigma) \end{aligned} \right\} (29.43)$$

и из треугольника  $A_1P_1B_1$  для разности долгот  $\omega$

$$\left. \begin{aligned} \cos u_2 \sin \omega &= \sin \sigma \sin A_{1.2} \\ \cos u_1 \sin \omega &= \sin \sigma \sin A'_{2.1} \end{aligned} \right\} (29.44)$$

5. Вычисление разности долготы  $l$  по вычисленному значению сферической долготы  $\omega$  по формуле (29.39).

6. Переход от приведенной широты  $u_2$  к геодезической  $B_2$  по формуле (29.41)

#### Обратная геодезическая задача

1. Вычисление приведенных широт  $u_1$  и  $u_2$  по геодезическим  $B_1$  и  $B_2$  согласно (29.41).

2. Вычисление разности сферических долгот  $\omega$  по разности геодезических долгот  $l$ . Так как величины  $m$ ,  $M$ ,  $\sigma$  нам неизвестны, то применяется способ последовательных приближений следующим образом.

Напишем аналогии Непера из треугольника  $A_1P_1B_1$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} + A_{1.2}}{2} &= \frac{\cos \frac{u_2 + u_1}{2}}{\sin \frac{u_2 - u_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{A'_{2.1} - A_{1.2}}{2} &= \frac{\sin \frac{u_2 + u_1}{2}}{\cos \frac{u_2 - u_1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} (29.45)$$

Таблица 10

Порядок действий	Формулы	Вычисления
1	$B_1$	$49^{\circ} 00' 00,009''$
6	$\operatorname{tg} B_1$	1,15036851
8	$-0,003352330 \operatorname{tg} B_1$	-0,00385642
10	$\operatorname{tg} u_1$	1,14651209
12	$u_1$	$48^{\circ} 54' 16,985''$
13	$\sin u_1$	0,75361752
14	$\cos u_1$	0,65731319
2	$B_2$	$58^{\circ} 20' 52,798''$
7	$\operatorname{tg} B_2$	1,62217610
9	$-0,003352330 \operatorname{tg} B_2$	0,00543807
11	$\operatorname{tg} u_2$	1,61673803
15	$u_2$	$58^{\circ} 15' 43,166''$
16	$\sin u_2$	0,85046233
17	$\cos u_2$	0,52603596
18	$\cos u_1 \cdot \cos u_2$	0,34577038
3	$L_2$	$54^{\circ} 04' 15,596''$
4	$L_1$	1344015,608
5	$l$	-803600,012
28	$\Delta l_0$	-422,890
29	$\omega_0$	-804022,902
21	$\sin l$	-0,9866
22	$\cos l$	0,163326
20	$\sin u_1 \cdot \sin u_2$	0,640923
23	$\cos u_1 \cdot \cos u_2 \cdot \cos l$	0,056473
24	$\cos \sigma_0$	0,697396
25	$\sigma_0$	$45^{\circ} 46' 53,6''$
26	$\sin \sigma_0$	0,7167
27	$\sin m_0$	-0,4760
30	$\sin \omega_0$	-0,98677953
31	$\cos \omega_0$	0,16206836
19	$\sin u_1 \cdot \sin u_2$	0,64092331
32	$\cos u_1 \cdot \cos u_2 \cdot \cos \omega_0$	0,05603844
33	$\cos \sigma_1$	0,69696175
36	$\sin \sigma_1$	0,717107
37	$\sin m$	-0,475799
38	$\cos u_1 \cdot \operatorname{tg} u_2$	1,06270323
39	$-\sin u_1 \cdot \cos \omega_0$	-0,12213756
40	$\operatorname{ctg} A_1^{\circ} = [(38) + (39)] : (30)$	-0,95316699
41	$\sin u_2 \cdot \cos \omega_0$	0,13783304
42	$-\cos u_2 \cdot \operatorname{tg} u_1$	-0,60310659
43	$\operatorname{ctg} A_2^{\circ} = [(41) + (42)] : (30)$	0,47150710
46	$\operatorname{ctg} M$	0,601784
47	$M$	$58^{\circ} 57' 40,1''$
34	$\sigma_1$	454858,499
48	$2M + \sigma_1$	1634418,7
49	$4M + 2\sigma_1$	32728
50	$2\sigma_1$	9138
51	$\cos (2M + \sigma_1)$	-0,959994
52	$\sin 2\sigma_1$	0,9996
53	$\cos (4M + 2\sigma_1)$	0,8431
54	$\sin^2 m$	0,22638
55	$\alpha$	0,0324053860
56	$\beta$	268,119
57	$\gamma$	0,044



Порядок действий	Формулы	Вычисления
58	$\alpha_1$	0,003350153
59	$\beta_1$	0,449
60	$\alpha_1 \cdot \sigma_1'' \cdot \sin m$	-262,912"
61	$\beta_1 \sin m \cdot \sin \sigma_1' \cdot \cos (2M + \sigma_1)$	0,147
62	$\Delta l$	-262,765
63	$dl = (62) - (28)$	0,125
44	$A_1^\circ$	313° 37' 35,133"
64	$\Delta A_1$	-0,039
65	$A_1$	313 37 35,094
45	$A_2^\circ$	64° 45' 20,842"
66	$\Delta A_2$	0,079
67	$A_2$	644520,921
35	$\sigma_1''$	164 938,499"
68	$-\beta_1 \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1)$	184,578
69	$-\gamma \sin 2\sigma_1 \cos (4M + 2\sigma_1)$	-0,037
70	$dl \cdot \sin m$	-0,059
71	$z = (35) + (68) + (69) + (70)$	165122,981
72	$s = z : \alpha$	5095541,2м

Положив  $\omega = l$ , найдем в первом приближении прямой и обратный азимуты и далее (также в первом приближении)  $m$ ,  $M$ ,  $\sigma$ . Второе приближение для  $\omega$  получим, применив формулу (29.39); затем со вторым приближением  $\omega$  повторим вычисления для получения следующего приближения  $m$ ,  $M$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $A_{1,2}$  и  $A'_{2,1}$  до тех пор, пока не получим окончательных значений.

3. Вычисление длины геодезической линии  $s$  по формуле (29.30), используя окончательно вычисленные величины  $M$ ,  $m$  и  $\sigma$ .

Способ Бесселя — основной для точного решения главной геодезической задачи на большие расстояния. В этом изложении достаточно подробно были приведены теоретические основы метода без освещения и изложения некоторых деталей, не имеющих принципиального характера, которые могут иметь известное значение при практических вычислениях. Так, например, не показаны возможные структуры и схемы таблиц для вычисления коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ; не указаны пути достижения быстрой сходимости вычислений при применении способа последовательных приближений для нахождения неизвестных; не приводятся, наконец, примеры точных вычислений на решение прямой и обратной геодезических задач. Эти подробности читатель найдет в специальных курсах по сфероидической геодезии [55, стр. 89—112] и [2, стр. 131—135].

Как указывалось выше, решение обратной геодезической задачи на большие расстояния имеет наибольшее применение в прикладных целях; при этом требования к точности вычислений зачастую невысокие.

В 1960 г. было опубликовано «Руководство по вычислению азимута и длины геодезической линии на поверхности эллипсоида Красовского». В этом «Руководстве» приведены формулы и таблицы коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ . Коэффициенты вычислены и приведены как функция  $\sin^2 m$ .

Рекомендуемые формулы и порядок вычислений несколько иные, чем указаны выше.

В «Руководстве» приведены формулы Бесселя для решения обратной геодезической задачи в двух видах, в зависимости от расстояний между заданными пунктами: от 400 до 7000 км и от 3000 до 17 000 км.

Приведем формулы, рекомендуемые для решения обратной геодезической задачи для расстояний от 3000 до 17 000 км.

$$\begin{aligned}
 l &= L_2 - L_1; \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} B - 0,003352330 \operatorname{tg} B \\
 \cos \sigma_0 &= \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos l; \quad 27^\circ < \sigma_0 < 155^\circ \\
 \sin m_0 &= \frac{\sin l}{\sin \sigma_0} \cos u_1 \cos u_2 \\
 \Delta l_0 &= 0,003351 \sigma_0'' \sin m_0; \quad \omega_0 = l + \Delta l_0 \\
 \cos \sigma_1 &= \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \omega_0 \\
 \operatorname{ctg} A_1^0 &= \frac{\cos u_1 \operatorname{tg} u_2 - \sin u_1 \cos \omega_0}{\sin \omega_0} \\
 \operatorname{ctg} A_2^0 &= \frac{\sin u_2 \cos \omega_0 - \cos u_2 \operatorname{tg} u_1}{\sin \omega_0} \\
 \sin m &= \frac{\sin \omega_0}{\sin \sigma_1} \cos u_1 \cos u_2; \quad \operatorname{ctg} M = \frac{\sin m \operatorname{ctg} A_1^0}{\sin u_1} \\
 \Delta l &= \alpha_1 \sigma_1'' \sin m + \beta_1 \sin m \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1) \\
 dl &= \Delta l - \Delta l_0 \\
 \Delta A_1 &= \frac{\sin m dl}{\sin \sigma_1} \operatorname{ctg} A_2^0; \quad \Delta A_2 = \frac{\sin m dl}{\sin \sigma_1} \operatorname{ctg} A_1^0 \\
 A_1 &= A_1^0 + \Delta A_1; \quad A_2 = A_2^0 + \Delta A_2 \\
 z &= \sigma_1'' - \beta \sin \sigma_1 \cos (2M + \sigma_1) - \gamma \sin 2\sigma_1 \cos (4M + 2\sigma_1) + dl \sin m \\
 s &= \frac{z}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{29.46}$$

Приведем пример на решение обратной геодезической задачи по формулам (29.46) (табл. 10).

Последний член  $dl \sin m$  введен как поправка за неточность  $\sigma_1$ , вследствие вычисления этой величины при помощи  $\omega_0$ , отличающейся от  $\omega$  на величину  $dl$ . Действительно, из треугольника  $A_1 P_1 B_1$  имеем

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \omega.$$

Полагая переменными  $\sigma$  и  $\omega$ , после дифференцирования получаем

$$d\sigma = \frac{\cos u_1 \cos u_2}{\sin \sigma} \sin \omega d\omega = \sin m dl. \tag{29.47}$$

Вычисления по формулам (29.46) обеспечивают получение азимутов с ошибкой 0,005" и расстояния с ошибкой 0,2 м.

Для более приближенных вычислений — с ошибкой в  $s$  до 50—100 м и в азимутах до 2" — приведенные формулы можно применить в более простом виде:

$$\left. \begin{aligned}
 l &= L_2 - L_1 \\
 \operatorname{tg} u &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B_1 \text{ [или по формулам (29.41)]} \\
 \cos \sigma_0 &= \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos l \\
 \sin m_0 &= \frac{\sin l}{\sin \sigma_0} \cos u_1 \cos u_2 \\
 \Delta l_0'' &= \alpha_1 \sigma_0'' \sin m_0 \\
 \omega_0 &= l + \Delta l_0 \\
 \operatorname{ctg} A_{1.2} &= \operatorname{tg} u_2 \cos u_1 \operatorname{cosec} \omega_0 - \sin u_1 \operatorname{ctg} \omega_0 \\
 \operatorname{ctg} A_{2.1} &= \sin u_2 \operatorname{ctg} \omega_0 - \operatorname{tg} u_1 \cos u_2 \operatorname{cosec} \omega_0 \\
 \operatorname{ctg} M &= \frac{\sin m_0 \operatorname{ctg} A_{1.2}}{\sin u_1} \\
 s &= \frac{1}{\alpha} [\sigma_0'' - \beta \sin \sigma_0 \cos (2M + \sigma) + \Delta l_0'' \sin m_0]
 \end{aligned} \right\}; \quad (29.48)$$

при вычислениях по формулам (29.48) следует принимать следующие числовые значения величин (для эллипсоида Красовского):

$$\sqrt{1 - e^2} = 0,996648,$$

$$\alpha_2 = 0,003351$$

$$\frac{1}{\alpha} = 30,87081 - 0,05185 \sin^2 m,$$

$$\beta = 346,5'' \cos^2 m.$$

#### Объяснение к примеру

Четверти круга, в которых лежат азимуты  $A_{1.2}^\circ$  и  $A_{2.1}^\circ$  определяют по знакам  $\operatorname{ctg} A_1^\circ$  ( $\operatorname{ctg} A_2^\circ$ ) и  $\sin \omega_0$ , пользуясь табл. 11.

Таблица 11

Функции	I	II	III	IV
	табличное значение	180° — табличное значение	180° + табличное значение	360° — табличное значение
$\operatorname{ctg} A_{1.2}^\circ$ или $\operatorname{ctg} A_{2.1}^\circ$	+	—	+	—
$\sin \omega_0$	+	+	—	—

При определении четверти круга, в которой находится азимут  $A_{2.1}^\circ$ , следует предварительно знак  $\sin \omega_0$  изменить на обратный.

Дуга  $M$  лежит в первой четверти круга, если  $\operatorname{ctg} M$  — число положительное, и во второй четверти, если  $\operatorname{ctg} M$  — число отрицательное.

Значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  выбирают из табл. 12 по аргументу  $\sin^2 m$ .

Таблица 12

$\sin^2 m$	$\alpha$	$\Delta$	$\beta$	$\Delta$	$\gamma$	$\Delta$	$\alpha_1$	$\Delta$	$\beta_1$	$\Delta$
0,0	0,03239 30760	54357	346,314	34,527	0,073	14	0,00334 9518	281	0,580	58
0,1	0,03239 85117	54390	311,787	34,550	0,059	12	0,00334 9799	280	0,522	58
0,2	0,03240 39507	54421	277,237	34,573	0,047	11	0,00335 0079	281	0,464	58
0,3	0,03240 93928	54454	242,664	34,596	0,036	10	0,00335 0360	281	0,406	58
0,4	0,03241 48382	54485	208,068	34,620	0,026	8	0,00335 0641	281	0,348	58
0,5	0,03242 02867	54518	173,448	34,643	0,018	6	0,00335 0922	281	0,290	58
0,6	0,03242 57385	54549	138,805	34,666	0,012	5	0,00335 1203	282	0,232	58
0,7	0,03243 11934	54582	104,139	34,690	0,007	4	0,00335 1485	281	0,174	58
0,8	0,03243 66516	54614	69,449	34,713	0,003	2	0,00335 1766	282	0,116	58
0,9	0,03244 21130	54646	34,736	34,736	0,001	1	0,00335 2048	282	0,058	58
1,0	0,03244 75776		0,000		0,000		0,00335 2330		0,000	

Поправки к разностям коэффициентов				Поправки к разностям коэффициентов			
$\alpha$		$\beta$		$\alpha$		$\beta$	
$\Delta \sin^2 m$	поправка	$\Delta \sin^2 m$	поправка	$\Delta \sin^2 m$	поправка	$\Delta \sin^2 m$	поправка
0,00000	—16	0,00000	—0,012	0,05312	—7	0,06983	—0,003
0,00312	—15	0,00086	—0,011	0,05938	—6	0,07845	—0,002
0,00938	—14	0,00948	—0,010	0,06562	—5	0,08707	—0,001
0,01562	—13	0,01810	—0,009	0,07188	—4	0,09569	0,000
0,02188	—12	0,02672	—0,008	0,07812	—3		
0,02812	—11	0,03534	—0,007	0,08438	—2		
0,03438	—10	0,04397	—0,006	0,09062	—1		
0,04062	—9	0,05259	—0,005	0,09688	0		
0,04688	—8	0,06121	—0,004	0,10000			

Вычисления ведут с числом десятичных знаков, указанных в примерах.

Табл. 12 содержит значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , необходимые для решения обратной геодезической задачи по способу Бесселя\*.

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  находят параболическим интерполированием при помощи поправок к разностям коэффициентов. Коэффициенты  $\gamma$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  выбирают из таблицы линейным интерполированием (см. табл. 12).

П р и м е р. Определить  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  для  $\sin^2 m = 0,24798$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  находят гиперболическим интерполированием следующим образом:

1) из таблицы коэффициентов для  $\sin^2 m = 0,2$  выбираем  $\alpha = 0,03240\ 39507$ , разность  $\Delta = 54421$ ,  $\beta = 277,237$ , разность  $\Delta = 34,573$ ;

2) из таблицы поправок к разностям коэффициентов для  $\Delta \sin^2 m = 0,04798$  отыскиваем поправку к разности  $\alpha$ , равную  $-8$ , и поправку к разности  $\beta$ , равную  $-0,006$ ;

3) по исправленным разностям коэффициентов (для  $\alpha - 54413$  и  $\beta - 34,567$ ) вычисляем окончательные значения  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = 0,03240\ 39507 + 54\ 413 \times 0,4798 \times 10^{-10} = 0,03240\ 65\ 614,$$

$$\beta = 277,237 - 34,567 \times 0,4798 = 260,652.$$

Значения коэффициентов  $\gamma$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ :

$$\gamma = 0,047 - 11 \times 0,48 \times 10^{-3} = 0,042;$$

$$\alpha_1 = 0,00335\ 0079 + 281 \times 0,4798 \times 10^{-9} = 0,00335\ 0214;$$

$$\beta_1 = 0,464 - 58 \times 0,48 \times 10^{-3} = 0,436.$$

### § 30. Решение главной геодезической задачи при помощи нормальных сечений

Рассмотрим еще один способ решения главной геодезической задачи прямым путем. В этом способе вспомогательная сфера строится радиусом, равным радиусу кривизны сечения первого вертикала  $N_1$  в начальной точке, с центром в точке пересечения нормали с осью вращения эллипсоида.

На рис. 58  $APB$  — полярный треугольник на эллипсоиде, а  $A'P'B'$  (рис. 59) — соответствующий полярный треугольник на сфере. Его построение можно представить следующим способом:

На произвольном большом круге, принятом за меридиан точки  $A$  на шаре радиуса  $N_1$ , откладываем дугу  $A'P' = 90^\circ - B_1$ , определяя тем самым на сфере положение точек  $A'$  и  $P'$ . Далее откладываем в точке  $A'$  шара от меридиана угол, равный азимуту прямого нормального сечения на эллипсоиде из  $A$  на  $B$  и под этим углом проводим дугу большого круга  $\sigma$ . При этом  $\sigma$  должно быть равно углу, под которым усматривается из точки  $n_a$  дуга нормального сечения из  $A$  в  $B$  на эллипсоиде. При помощи построения на шаре указанных элементов определяется положение и третьей вершины сферического треугольника, т. е. точки  $B'$ .

Характерная особенность данного построения — изображение сфероидического треугольника  $APB$  на шаре при помощи прямого нормального сечения в одной из конечных точек дуги  $AB$ .

\* Указанные коэффициенты можно использовать также для решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя.

Поскольку все элементы сферического треугольника выражаются в угловой мере, элементы треугольника  $A'P'B'$  тождественно будут совпадать с элементами сферического треугольника  $abr$  произвольного радиуса, показанного на рис. 58 пунктирными линиями.

Общий ход решения задачи остается прежним: а) переход от известных элементов сфероидического треугольника к соответствующим элементам сферического, б) решение сферического треугольника и нахождение величин, являющихся искомыми, и в) переход от найденных искомым величин на сфере к соответствующим им на сфероиде.

Условимся, что кривая  $AB$  на сфероиде представляет собой геодезическую линию. Установим простейшие зависимости между элементами указанных треугольников.

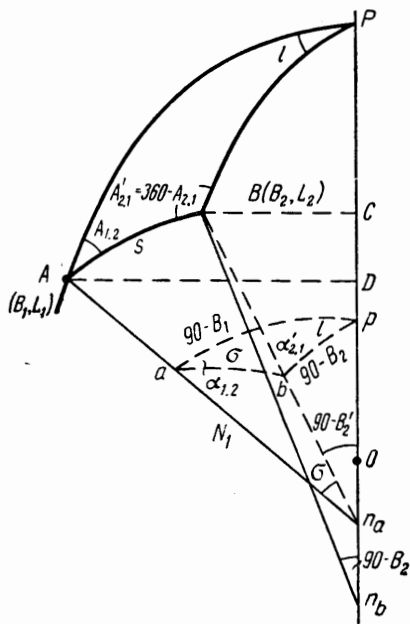


Рис. 58

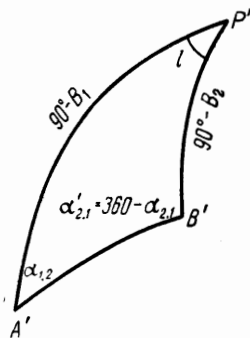


Рис. 59

Во-первых, расхождения в длинах геодезической линии и дуги нормального сечения — практически пренебрегаемы (см. § 15).

Сторона полярного треугольника  $A'P'$ , согласно принятому построению  $A'P' = 90^\circ - B_1$ . Поскольку линии  $Bn_b$  и  $Bn_a$  лежат в плоскости меридиана точки  $B$ , то угол  $l$ , выражающий разность долгот на эллипсоиде, при переходе на сферу не изменится.

Согласно упомянутому выше условию, в качестве одной из заданных величин на эллипсоиде был указан азимут геодезической линии  $A_{1,2}$ , в то время как на сфере отложен азимут прямого нормального сечения  $\alpha_{1,2}$ . Поэтому следует осуществить переход от  $A_{1,2}$  к  $\alpha_{1,2}$ .

Остальные элементы треугольника:  $s$ ,  $90^\circ - B_2$  и  $360^\circ - A_{2,1}$  при переходе на сферу получают новые значения, поэтому для применения этого способа должны быть известны зависимости или соотношения между  $s$  и  $\sigma$ ,  $B_2$  и  $B'_2$ , а также между  $\alpha'_{2,1}$  и  $A'_{2,1}$ .

Во-первых, укажем формулу для перехода от  $A_{1,2}$  к  $\alpha_{1,2}$ . Из (17.6) имеем

$$\alpha_{1,2} = A_{1,2} + \delta_{1,2} = A_{1,2} + \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1,2} \cos A_{1,2}}{6N_1^2} \rho'' - \frac{\eta_1^2 s^3 \sin A_{1,2} \operatorname{tg} B_1}{24N_1^3} \rho'' \quad (30.1)$$

Обозначив последние два поправочных члена через  $v_1$  и  $v_2$ , перепишем формулу (30.1)

$$\alpha_{1,2} = A_{1,2} + v_1 - v_2. \quad (30.2)$$

Зависимость между  $s$  и  $\sigma$  получена в § 16. Очевидно, при решении главной геодезической задачи необходимо, в зависимости от требуемой точности, применять формулу (16.11) или (16.14), причем последняя имеет вид

$$\sigma'' = \frac{s}{N_1} \rho'' \left\{ 1 + \frac{\eta_1^2 s^2}{6N_1^2} \cos^2 A_{1,2} - \frac{\eta_1^4 s^2}{6N_1^2} \cos^4 A_{1,2} - \frac{\eta^2 \operatorname{tg} B_1 \cos A_{1,2}}{8N_1^3} (1 - 2\eta_1^2 \cos^2 A_{1,2}) s^3 \right\}. \quad (30.3)$$

Формулы (30.1) и (30.3) пригодны для расстояний, не превышающих 4000—5000 км.

Зависимость между  $B_2$  и  $B'_2$  также получена в § 15. Величина  $\epsilon''$  в соответствии с (15.3) — разность широт  $B_2 - B'_2$ . Но полученное выражение для  $\epsilon$  далеко не всегда может быть использовано при решении геодезической задачи вследствие его приближенности. Дадим точные формулы для перехода от  $B'_2$  к  $B_2$  или обратно. Из рис. 58 следует, что

$$\operatorname{tg} B'_2 = \frac{n_a c}{BC} = \frac{OC - OD + n_a D}{BC}$$

или, принимая во внимание (4.8) и (11.1),

$$\operatorname{tg} B'_2 = \frac{(1 - e^2) N_2 \sin B_2 + N_1 e^2 \sin B_1}{N_2 \cos B_2}$$

Заменяя  $N = \bar{V}$ ,

$$\operatorname{tg} B'_2 = \frac{(1 - e^2) \frac{c}{V_2} \sin B_2 + \frac{c}{V_1} \sin B_1}{\frac{c}{V_2} \cos B_2},$$

после элементарных преобразований, окончательно получаем точную формулу

$$\operatorname{tg} B'_2 = \operatorname{tg} B_2 \left( 1 - e^2 + e^2 \frac{V_2}{V_1} \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \right). \quad (30.4)$$

Обозначая

$$k = \left( 1 - e^2 + e^2 \frac{V_2}{V_1} \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \right), \quad (30.5)$$

перепишем (30.4) так:

$$\operatorname{tg} B'_2 = k \operatorname{tg} B_2. \quad (30.6)$$

Переходя к установлению зависимости между  $\alpha'_{2,1}$  и  $A'_{2,1}$ , отмечаем следующее:  $\alpha'_{2,1}$  представляет собой на шаре  $360^\circ - \alpha_{2,1}$ , т. е. дополнение до  $360^\circ$  азимута направления с  $B_1$  на  $A_1$ . На эллипсоиде это будет угол между плоскостью меридиана точки  $B$  и плоскостью, проходящей через прямое нормальное сечение из точки  $A$  на точку  $B$ . Очевидно, можно перейти от  $\alpha'_{2,1}$  к  $A'_{2,1}$  следующим образом: от угла  $\alpha'_{2,1}$  к азимуту прямого нормального сечения, из точки  $B$  на  $A$  путем введения поправки  $\Delta$  и от азимута нормального сечения

к азимуту геодезической линии путем введения поправки  $\delta_{2.1}$ . Иначе говоря, используя формулы (17.2) и (17.3)

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - \Delta'' + \delta_{2.1},$$

или

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2}}{4} \rho'' + \frac{e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{1.2}}{12} \rho'' \quad (30.7)$$

Суммируя поправочные члены, находим

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{3N_1^2} \quad (30.8)$$

Принимая во внимание обозначения (30.2), получаем

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - 2v_1 \quad (30.9)$$

При решении геодезической задачи на большие расстояния эта формула будет давать значительные погрешности.

Более точной формулой будет (17.7), т. е.

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - \frac{\eta_1^2 s^2 \sin A_{1.2} \cos A_{1.2}}{3N_1^2} + \frac{\eta_1^2 s^3 \sin A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{8N_1^3} \quad (30.10)$$

или, используя обозначения (30.2),

$$A'_{2.1} = \alpha'_{2.1} - 2v_1 + 3v_2 \quad (30.11)$$

Приведенными формулами решается вопрос об установлении зависимости между элементами сфероидического и сферического треугольников.

Рассмотрим порядок решения прямой и обратной геодезической задачи по данному способу.

#### Прямая геодезическая задача

Исходные данные:  $B_1$  — широта первой точки,  $s$  — длина геодезической линии между первой и второй точками,  $A_{1.2}$  — ее азимут. Порядок решения:

1. Переход от азимута геодезической линии  $A_{1.2}$  к азимуту прямого нормального сечения  $\alpha_{1.2}$  по формулам (30.2).

2. Переход от длины геодезической линии между точками к длине дуги нормального сечения по формулам (30.3).

3. Решение сферического треугольника  $A_1 P_1 B_1$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2.1} + l}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - (B_1 - \sigma)}{2}}{\sin \frac{90^\circ - (B_1 + \sigma)}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{1.2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2.1} - l}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - (B_1 - \sigma)}{2}}{\cos \frac{90^\circ - (B_1 + \sigma)}{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{1.2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - B'_2}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha'_{2.1} - l}{2}}{\sin \frac{\alpha'_{2.1} + l}{2}} \operatorname{tg} \frac{90^\circ - (B_1 + \sigma)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (30.12)$$

и вычисление  $B'_2, \alpha'_{2.1}, l$ .



4. Переход от  $B_2$  к  $B_2$ , т. е. вычисление искомой широты второй точки по формуле (30.6).

5. Вычисление долготы второй точки.

$$L_2 = L_1 + l_1.$$

6. Переход от азимута  $\alpha_{2.1}$  на шаре к обратному азимуту геодезической линии  $A'_{2.1}$  на эллипсоиде по формуле (30.7).

#### Обратная геодезическая задача

Даны в качестве исходных координаты двух точек. Требуется определить расстояние между ними, прямой и обратный азимуты геодезической линии, соединяющей эти точки.

1. Вычисление широты  $B'_2$  по формуле (30.6).

2. Решение сферического треугольника по двум сторонам ( $90^\circ - B_1$ ) и ( $90^\circ - B'_2$ ) и по углу между ними ( $l = L_2 - L_1$ ) по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2.1} + \alpha_{1.2}}{2} &= \frac{\cos \frac{(B'_2 - B_1)}{2}}{\sin \frac{(B'_2 + B_1)}{2}} \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha'_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2} &= \frac{\sin \frac{(B'_2 - B_1)}{2}}{\cos \frac{(B'_2 + B_1)}{2}} \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \\ \sin \sigma &= \frac{\sin l \cos B_1}{\sin \alpha'_{2.1}} = \frac{\sin l \cos B'_2}{\sin \alpha_{1.2}} \end{aligned} \right\} \quad (30.13)$$

и вычисление  $\sigma$ ,  $\alpha_{1.2}$ ,  $\alpha'_{2.1}$ .

3. Вычисление прямого и обратного азимутов геодезической линии на основании формул (30.2) и (30.14).

4. Переход от  $\sigma$  к  $s$  по формуле (16.13), которую перепишем, опустив члены порядка  $\eta^4 \sigma^3$  и оставив члены  $\eta^2 \sigma^2$  (в данном случае при значительных расстояниях  $\eta$  следует считать малой величиной того же порядка, что и  $\sigma$ ).

$$s = \frac{\sigma''}{(2)_1} - \frac{s^3 \eta_1^2 \cos^2 A_{1.2}}{6N_1^3} \rho'' \frac{N_1}{\rho''} + \frac{s^4 \eta_1^2 \cos A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{8N_1^4} \frac{N_1}{\rho''}. \quad (30.14)$$

Обозначив

$$\frac{s^3 \eta_1^2 \cos A_{1.2}}{6N_1^3} \rho'' = p_1$$

и

$$\frac{s^4 \eta_1^2 \cos A_{1.2} \operatorname{tg} B_1}{8N_1^4} \rho'' = p_2$$

и имея в виду, что величина  $\frac{N_1}{\rho''}$  приближенно представляет собой длину дуги сечения первого вертикала, равную одной секунде в средних широтах 31 м, формулу (30.14) окончательно перепишем так:

$$s = \frac{\sigma''}{(2)_1} - 31 (p_1 - p_2). \quad (30.15)$$

Приведенные формулы и указанный порядок вычислений позволяют решать прямую и обратную геодезические задачи.

Предложение о практическом использовании формул настоящего параграфа для решения прямой и обратной геодезических задач сделано Г. В. Багратуни и опубликовано в Трудах МИИГАиК (вып. 9, стр. 36—40); под его руководством составлены вспомогательные таблицы для решения геодезических задач. В этих таблицах приведены (только в несколько иных обозначениях) величины  $\lg k$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ . В упомянутой статье приведена таблица наибольших погрешностей вычисления азимутов и расстояний (при средней широте  $55^\circ$ ), которая приводится здесь в сокращенном виде (табл. 13).

Таблица 13

S в км	Наибольшая погрешность		
	в $A_{1.2}$	в $A'_{2.1}$	в $s$ (м)
500	0,01"	0,02	0,00
1000	0,02	0,04	0,07
2000	0,05	0,11	1,15
3000	0,23	0,48	9,25
4000	0,73	1,65	36,2
5000	1,79	3,60	72,8

### § 31. Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге — Кутта — Мерсона

Развитие и широкое применение современной вычислительной техники существенно расширили возможности практического использования различных методов и математических формул решения вычислительных геодезических задач. Те формулы и способы, которые ранее, при прежних методах, были трудоемки и неудобны для вычислений, стали целесообразны и эффективны при использовании электронно-вычислительных машин.

Приведем формулы для решения прямой геодезической задачи Рунге — Кутта — Мерсона, вывод которых основывается на численном интегрировании уравнений (23.1) с использованием (5.23—5.25), удобные для вычислений на ЭВМ\*.

$$\left. \begin{aligned} \Delta B_i'' &= s_0 K_i^\beta \cos \alpha_i \\ \Delta L_i'' &= s_0 K_i^\alpha \sin \alpha_i \sec \beta_i \\ \Delta A_i'' &= s_0 K_i^\alpha \sin \alpha_i \operatorname{tg} \beta_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (31.1)$$

Для размеров эллипсоида Красовского

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \frac{\rho''}{3c} s = 0,010743464s \\ K_i^\alpha &= (1 + 0,00505389 \cos^2 \beta_i) (1 + 0,00168463 \cos^2 \beta_i)^{-1} \\ K_i^\beta &= (1 + 0,00842316 \cos^2 \beta_i) (1 - 0,00168463 \cos^2 \beta_i)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (31.2)$$

\* «Геодезия и картография», № 9, 1973 г., стр. 10—13.

Значения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  равны (табл. 14)

Таблица 14

i	$\alpha$	$\beta$
1	$A_1$	$B_1$
2	$A_1 + \Delta A_1$	$B_1 + \Delta B_1$
3	$A_1 + \frac{1}{2} \Delta A_1 + \frac{1}{2} \Delta A_2$	$B_1 + \frac{1}{2} \Delta B_1 + \frac{1}{2} \Delta B_2$
4	$A_1 + \frac{3}{8} \Delta A_1 + \frac{9}{8} \Delta A_3$	$B_1 + \frac{3}{8} \Delta B_1 + \frac{9}{8} \Delta B_3$
5	$A_1 + \frac{3}{2} \Delta A_1 - \frac{9}{2} \Delta A_3 + 6 \Delta A_4$	$B_1 + \frac{3}{2} \Delta B_1 - \frac{9}{2} \Delta B_3 + 6 \Delta B_4$

Таблица 15

Исходные данные:  $B_1 = 49^\circ 00' 40,236''$   $A_1 = 229^\circ 16' 01,160''$   
 $L_1 = 43^\circ 18' 28,727''$   $s = 599\,987,3 \text{ м}$   
 $s_0 = 6445,942$

Формулы	Приближения				
	1	2	3	4	5
$\alpha_i$	$229^\circ 16' 01,160''$	$227^\circ 42' 11,867''$	$227^\circ 45' 09,928''$	$227^\circ 01' 57,044''$	$225^\circ 00' 29,062''$
$\beta_i$	$49^\circ 00' 40,236''$	$47^\circ 50' 15,728''$	$47^\circ 49' 09,134''$	$47^\circ 12' 38,276''$	$45^\circ 20' 10,828''$
$\sin \alpha_i$	$-0,7577\,5850$	$-0,7396\,6981$	$-0,7402\,5048$	$-0,7317\,4058$	$-0,7072\,0640$
$\cos \alpha_i$	$-0,6525\,3510$	$-0,6729\,6995$	$-0,6723\,3118$	$-0,6815\,8325$	$-0,7070\,0715$
$\cos \beta_i$	$0,6559\,1180$	$0,6712\,3297$	$0,6714\,7225$	$0,6793\,0513$	$0,7029\,4372$
$\cos^2 \beta_i$	$0,4302\,2029$	$0,4505\,5370$	$0,4508\,7498$	$0,4614\,5546$	$0,4941\,2987$
$\operatorname{tg} \beta_i$	$1,1508\,2172$	$1,1043\,0577$	$1,1035\,8945$	$1,0803\,0382$	$1,0118\,0998$
$K_i^\alpha$	$1,0014\,4848$	$1,0015\,1687$	$1,0015\,1796$	$1,0015\,5356$	$1,0016\,6346$
$K_i^\beta$	$1,0043\,5172$	$1,0045\,5756$	$1,0045\,6081$	$1,0046\,6792$	$1,0049\,9872$
$s_0 \cdot K_i^\alpha$	$6455,2788$	$6455,7197$	$6455,7267$	$6455,9562$	$6456,6646$
$s_0 \cdot K_i^\beta$	$6473,9929$	$6475,3198$	$6475,3407$	$6476,0311$	$6478,1635$
$\sin \alpha_i \cdot \operatorname{tg} \beta_i$	$-0,8720\,4494$	$-0,8168\,2164$	$-0,8169\,3262$	$-0,7905\,0214$	$-0,7155\,5849$
$\sin \alpha_i : \cos \beta_i$	$-1,1552\,7499$	$-1,1019\,5691$	$-1,1024\,2899$	$-1,0771\,8983$	$-1,0060\,6404$
$\Delta B_i''$	$-4224,508''$	$-4357,696''$	$-4353,573''$	$-4413,954''$	$-4580,108''$
$\Delta L_i''$	$-7457,622$	$-7113,925$	$-7116,980$	$-6954,290$	$-6495,818$
$\Delta A_i''$	$-5629,293$	$-5273,172$	$-5273,894$	$-5103,447$	$-4620,121$
$\Delta B_i$	$-1^\circ 10' 24,508''$	$-1^\circ 12' 37,696''$	$-1^\circ 12' 33,573''$	$-1^\circ 13' 33,954''$	$-1^\circ 16' 20,108''$
$\Delta L_i$	$-2^\circ 04' 17,622''$	$-1^\circ 58' 33,925''$	$-1^\circ 58' 36,980''$	$-1^\circ 55' 54,290''$	$-1^\circ 48' 15,818''$
$\Delta A_i$	$-1^\circ 33' 49,293''$	$-1^\circ 27' 53,172''$	$-1^\circ 27' 53,894''$	$-1^\circ 25' 03,447''$	$-1^\circ 17' 00,121''$

$$B_2 = 49^\circ 00' 40,236'' + \frac{1}{2} (-1^\circ 10' 24,508'' - 4^\circ 54' 15,816'' - 1^\circ 16' 20,108'') = 45^\circ 20' 10,020''$$

$$L_2 = 43^\circ 18' 28,727'' + \frac{1}{2} (-2^\circ 04' 17,622'' - 7^\circ 43' 37,160'' - 1^\circ 48' 15,818'') = 37^\circ 30' 23,426''$$

$$A_2 = 229^\circ 16' 01,160'' - 180^\circ + \frac{1}{2} (-1^\circ 33' 49,293'' - 5^\circ 40' 13,788'' - 1^\circ 17' 00,121'') = 45^\circ 00' 29,548''$$

Искомые разности координат будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \frac{1}{2} (\Delta B_1 + 4 \Delta B_4 + \Delta B_5) \\ \Delta L &= \frac{1}{2} (\Delta L_1 + 4 \Delta L_4 + \Delta L_5) \\ \Delta A &= \frac{1}{2} (\Delta A_1 + 4 \Delta A_4 + \Delta A_5) \end{aligned} \right\}, \quad (31.3)$$

после чего по прежнему:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \Delta B \\ L_2 &= L_1 + \Delta L \\ A_2 &= A_1 \pm 180^\circ + \Delta A \end{aligned} \right\}. \quad (31.4)$$

Формулы (31.1)—(31.4) пригодны для вычислений на любых ЭВМ и настольных электрических машинах для средних (умеренных) расстояний до 300 км с ошибками порядка 0,003"—0,006". Для больших расстояний ошибки, естественно, будут больше.

В табл. 15 приводится пример на решение задачи по приведенным формулам.

### § 32. Решение прямой и обратной задач методом хорд эллипсоида. Формулы Молоденского

В основе рассмотренных способов решения главной геодезической задачи лежит решение сфероидических треугольников, образованных соответствующими кривыми на поверхности эллипсоида (обычно геодезическими линиями). Такой подход к решению задач приводит к применению бесконечных рядов со сложной структурой; общий член этих рядов остается неизвестным. Таким образом задача не получает строгого решения в замкнутой форме.

Решение главной геодезической задачи методом хорд заключается в замене сфероидических треугольников плоскими, образованными хордами, соединяющими вершины треугольников. В этом случае искомые величины будут определяться формулами замкнутого вида в элементарных функциях.

Идея использования хорд и основанные на ней методы решения геодезических задач были рассмотрены и исследованы еще в прошлом столетии, но практического применения не получили. В 1954 г. М. С. Молоденский обратил внимание на возможность и целесообразность использования в ряде случаев упомянутых методов и разработал теорию решения геодезических задач с использованием хорд.

Ниже будет дан вывод формул прямой и обратной геодезических задач, предполагая, что все исходные данные относятся к поверхности эллипсоида.

Принципиальная сторона этого метода проста. Положение точек в геодезических вычислениях задается криволинейными координатами  $B$  и  $L$ . По простым и точным формулам переходим к системе прямоугольных прямолинейных пространственных координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . В этой системе координат все задачи, связанные с определением взаимного положения точек, решаются в замкнутом виде, включая, конечно, прямую и обратную геодезические задачи. Обратный переход от координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  осуществляется точно так же, на основе тех же формул.

Пусть имеем на поверхности эллипсоида вращения точки  $A$  и  $B$  с координатами: для точки  $A \dots B_1$  и  $L_1$  — в геодезической системе координат и  $X_1, Y_1, Z_1$  — в системе прямоугольных прямолинейных координат; соответственно для точки  $B \dots B_2, L_2$  и  $X_2, Y_2, Z_2$ .

Зависимость между координатами выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= N \cos B \cos L \\ Y &= N \cos B \sin L \\ Z &= \frac{b^2}{a^2} N \sin B \end{aligned} \right\}. \quad (32.1)$$

Уравнение прямой, проходящей через эти две точки, имеет вид

$$\frac{X_2 - X_1}{\cos \alpha} = \frac{Y_2 - Y_1}{\cos \beta} = \frac{Z_2 - Z_1}{\cos \gamma} = s_{1.2}, \quad (32.2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы прямой с координатными осями.

$s_{1.2}$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$  по прямой (хорде эллипсоида).  
Обозначая

$$\cos \alpha = l,$$

$$\cos \beta = m,$$

$$\cos \gamma = n$$

и принимая во внимание (32.1) и (32.2), можем написать:

$$s_{1.2} l = X_2 - X_1 = N_2 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1) - N_1 \cos B_1, \quad (32.3)$$

$$s_{1.2} m = Y_2 - Y_1 = N_2 \cos B_2 \sin (L_2 - L_1), \quad (32.4)$$

$$s_{1.2} n = Z_2 - Z_1 = N_2 \frac{b^2}{a^2} \sin B_2 - \frac{b^2}{a^2} N_1 \sin B_1. \quad (32.5)$$

При этом принято, что плоскость  $XOZ$  совмещена с меридианом первой точки, т. е.  $L_1 = 0$ , а  $(L_2 - L_1)$  представляет разность долгот точек  $A$  и  $B$ .

Возведем уравнения (32.3), (32.4) и (32.5) в квадрат и сложим. Имея в виду, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

после простых преобразований получим

$$s_{1.2}^2 = N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 \cos \psi - \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2, \quad (32.6)$$

где  $\psi$  — угол между нормальными в точках  $A$  и  $B$ , определяемый из выражения

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1). \quad (32.7)$$

Определим направляющие косинусы прямой  $AB$  через зенитное расстояние  $z_{1.2}$  и геодезический азимут хорды  $A_{1.2}$ .

Вспользуемся следующим построением. С центром в точке  $I$  построим вспомогательную сферу (рис. 60).

где  $X, Y, Z$  — пространственные координаты;

$M$  — точка пересечения отрезка 1.2 (прямой  $AB$ ) с вспомогательной сферой;

$z_1$  — геодезический зенит точки 1;

$A_{1.2}$  — геодезический азимут хорды прямого нормального сечения из  $A$  на  $B$  (как азимут плоскости, проходящей через отрезок  $s_{1.2}$  и геодезический зенит первой точки).

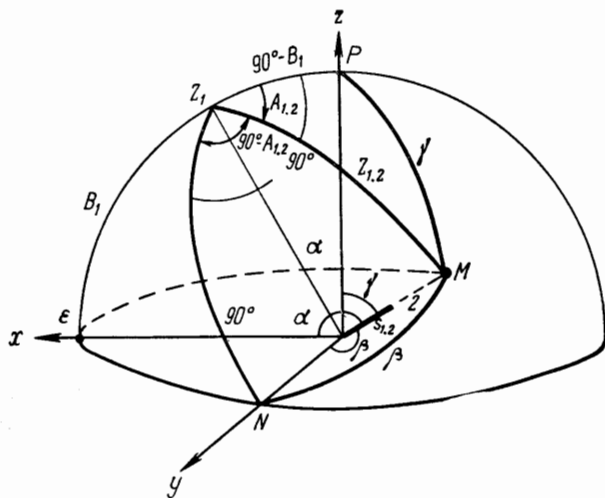


Рис. 60

Остальные элементы построения легко усматриваются из рис. 60.

Имеем из треугольника  $\varepsilon z_1 M$

$$l = \cos \alpha = \cos B_1 \cos z_{1,2} - \sin B_1 \sin z_{1,2} \cos A_{1,2}; \quad (32.8)$$

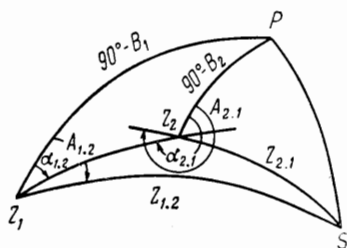


Рис. 61

из треугольника  $Mz_1N$

$$m = \cos \beta = \sin z_{1,2} \sin A_{1,2}; \quad (32.9)$$

из треугольника  $Mz, P$

$$n = \cos \gamma = \cos z_{1-2} \sin B_1 + \sin z_{1-2} \cos B_1 \cos A_{1-2}. \quad (32.10)$$

Определим азимут  $A_{1,2}$  прямой  $AB$  через геодезические координаты ее концов.

Умножим (32.8) на  $\sin B_1$  и (32.10) на  $\cos B_1$  и образуем их разность, тогда получим

$$\begin{aligned} n \cos B_1 - l \sin B_1 &= \cos^2 B_1 \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} + \sin^2 B_1 \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} = \\ &= \cos A_{1,2} \sin z_{1,2}. \end{aligned}$$

И далее

$$\frac{n \cos B_1 - l \sin B_1}{m} = \frac{\cos A_{1,2} \sin z_{1,2}}{\sin z_{1,2} \sin A_{1,2}} = \operatorname{ctg} A_{1,2}. \quad (32.11)$$

Для выражения  $\operatorname{ctg} A_{1.2}$  заменим в последнем выражении  $l, t$  и  $n$  согласно (32.3), (32.4) и (32.5). После преобразований получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A_{1,2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2}{N_2 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} \cos B_1 + \cos B_1 \operatorname{tg} B_2 \operatorname{cosec}(L_2 - L_1) - \\ - \sin B_1 \operatorname{ctg}(L_2 - L_1). \end{aligned} \quad (32.12)$$

Возьмем опять сферу единичного радиуса (рис. 61).

 $z_1$  — положение геодезического зенита  $I$  точки; $z_2$  — положение геодезического зенита 2 точки;

$P$  — положение полюса;  
 $s$  — соответствует направлению отрезка  $s_{1,2}$ ;  
 $A_{1,2}, A_{2,1}$  — прямой и обратный азимуты хорды;  
 $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}$  — прямой и обратный азимуты хорды  $s_{1,2}$  на сфере;  
 $L_2 - L_1$  — угол при вершине  $P$  треугольника  $Pz_1z_2$ , из которого имеем  
 $\sin(L_2 - L_1) \operatorname{ctg} \alpha_{1,2} = \operatorname{ctg}(90^\circ - B_2) \sin(90^\circ - B_1) - \cos(L_2 - L_1) \cos(90^\circ - B_1)$ ,

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha_{1,2} = \cos B_1 \operatorname{tg} B_2 \operatorname{cosec}(L_2 - L_1) - \sin B_1 \operatorname{ctg}(L_2 - L_1); \quad (32.13)$$

принимая во внимание (32.13), формула для  $\operatorname{ctg} A_{1,2}$  на основании (32.12) примет вид

$$\operatorname{ctg} A_{1,2} = \operatorname{ctg} \alpha_{1,2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2}{N_2 \cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} \cos B_1. \quad (32.14)$$

Для обратного азимута аналогично получим

$$\operatorname{ctg} A_{2,1} = \operatorname{ctg} \alpha_{2,1} + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \frac{N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1}{N_1 \cos B_1 \sin(L_1 - L_2)} \cos B_2. \quad (32.15)$$

Формулы (32.6), (32.14) и (32.15) принципиально решают задачу. При решении обратной геодезической задачи по этим формулам непосредственно вычисляют искомые  $s_{1,2}$ ,  $A_{1,2}$  и  $A_{2,1}$ .

Решение прямой геодезической задачи получаем следующим образом. Из формул (32.3) и (32.4), разделив первую на вторую, находим

$$\frac{l_{1,2}}{m_{1,2}} = \operatorname{ctg} L_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{m_{1,2} s_{1,2}}$$

откуда

$$\operatorname{ctg} L_2 = \frac{N_1 \cos B_1}{m_{1,2} s_{1,2}} + \frac{l_{1,2}}{m_{1,2}}. \quad (32.16)$$

Перепишем последнюю формулу, заменив значения направляющих косинусов из (32.8) и (32.9), получим

$$\operatorname{ctg} L_2 = \frac{1}{\sin A_{1,2}} \left[ \frac{N_1}{s_{1,2}} \frac{\cos B_1}{\sin z_{1,2}} + \cos B_1 \operatorname{ctg} z_{1,2} - \sin B_1 \cos A_{1,2} \right]. \quad (32.17)$$

Для получения выражения для разности широт умножим формулу (32.4) на  $-\sin B_1 \operatorname{cosec} L_2$ , а (32.5) на  $\frac{a}{b^2} \cos B_1$  и сложим.

Получим:

$$\begin{aligned} & -N_2 \cos B_2 \sin L_2 \sin B_1 \operatorname{cosec} L_2 + \frac{b^2}{a^2} N_2 \sin B_2 \frac{a^2}{b^2} \cos B_1 - \\ & - \frac{b^2}{a^2} N_1 \frac{a^2}{b^2} \cos B_1 \sin B_1 = -s_{1,2} m_{1,2} \sin B_1 \operatorname{cosec} L_2 + s_{1,2} n_{1,2} \frac{a^2}{b^2} \cos B_1. \end{aligned} \quad (32.18)$$

После преобразований

$$N_2 \sin(B_2 - B_1) = N_1 \sin B_1 \cos B_1 + \frac{a^2}{b^2} n_{1,2} s_{1,2} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{\sin L_2} m_{1,2} s_{1,2}. \quad (32.19)$$

Заменим в полученной формуле  $N_1 \cos B_1$  из (32.16), т. е.

$$N_1 \cos B_1 = m_{1,2} s_{1,2} \operatorname{ctg} L_2 - s_{1,2} l_{1,2}$$

и внесем значения  $l_{1,2}$  и  $m_{1,2}$  из (32.8) и (32.9).

Получим:

$$N_2 \sin(B_2 - B_1) = m_{1,2} s_{1,2} \operatorname{ctg} L_2 \sin B_1 - s_{1,2} l_{1,2} \sin B_1 + n_{1,2} s_{1,2} \frac{a^2}{b^2} \cos B_1 - \\ - m_{1,2} s_{1,2} \frac{\sin B_1}{\sin L_2} = s_{1,2} \left[ \sin z_{1,2} \sin A_{1,2} \sin B_1 \operatorname{ctg} L_2 - \cos B_1 \cos z_{1,2} \sin B_1 + \right. \\ \left. + \sin^2 B_1 \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} + \frac{a^2}{b^2} n_{1,2} \cos B_1 - \frac{\sin B_1}{\sin L_2} \sin z_{1,2} \sin A_{1,2} \right]. \quad (32.20)$$

Внесем преобразования

$$-\sin B_1 \cos z_{1,2} \cos B_1 + (1 - \cos^2 B_1) \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} = \\ = -\cos B_1 (\sin B_1 \cos z_{1,2} + \cos B_1 \sin z_{1,2} \cos A_{1,2}) + \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} = \\ = -\cos B_1 n_{1,2} + \sin z_{1,2} \cos A_{1,2}. \quad (32.21)$$

из (32.20) и (32.21):

$$\sin(B_2 - B_1) = \frac{s_{1,2}}{N_2} \left[ \sin z_{1,2} \sin A_{1,2} \sin B_1 \operatorname{ctg} L_2 + \right. \\ \left. + \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{1,2} \cos B_1 - \frac{\sin B_1 \sin z_{1,2} \sin A_{1,2}}{\sin L_2} \right]$$

или

$$\sin(B_2 - B_1) = \frac{s_{1,2}}{N_2} \left[ \sin z_{1,2} \cos A_{1,2} - \sin A_{1,2} \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} n_{1,2} \cos B_1 \right], \quad (32.22)$$

где значения  $\cos z_{1,2}$  и  $n_{1,2}$  определяются из (32.8), (32.9) и (32.10).

Способ М. С. Молоденского разработан автором и кандидатом технических наук В. Ф. Еремеевым до стадии практического применения.

Выше изложены только принципиальные вопросы без подробностей, с тем чтобы ознакомить читателя с иным, отличным от предыдущих, методическим подходом к решению главной геодезической задачи.

Способ Молоденского приводит к построению пространственной или «трехмерной» геодезии. Для этой цели вводится третья координата — высота пунктов над эллипсоидом  $H$ ; выражения для пространственных координат имеют вид:

$$X = (N + H) \cos B \cos L; \quad Y = (N + H) \cos B \sin L; \quad Z = [N(1 - e^2) + H] \sin B. \quad (32.23)$$

Приведем без вывода формулы для обратной геодезической задачи (при любых значениях длин хорд  $s$  и высотах  $H_1$  и  $H_2$ ).

$$s_{1,2}^2 = (N_1 + H_1)^2 + (N_2 + H_2)^2 - 2(N_1 + H_1)(N_2 + H_2) \cos \psi - \\ - \frac{a^4 - b^4}{a^4} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1)^2 - \\ - 2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) (H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1) \\ \operatorname{ctg} A_{1,2} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_1 \sin B_1 - N_2 \sin B_2) \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2} + \quad (32.24)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin L_2} + \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2} \\
\operatorname{ctg} A_{2,1} = & \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1) \cos B_2}{(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_2} - \\
& - \frac{\sin(B_1 - B_2)}{\cos B_1 \sin L_2} - \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{L_2}{2}
\end{aligned}$$

В заключение главы отметим следующее.

При выборе методов и формул для решения геодезических задач необходимо брать такие, которые обеспечивали бы заданную точность вычислений и требовали бы наименьшего вычислительного труда. Рекомендовать единый, наиболее целесообразный метод получения формул и единые формулы для решения геодезической задачи не представляется возможным.

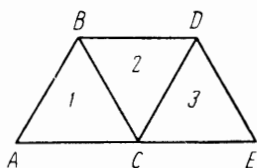


Рис. 62

Методы и формулы, пригодные для решения задач при сравнительно коротких расстояниях, при больших расстояниях становятся сложными, громоздкими, требующими затраты огромного труда. При решении задачи косвенным методом по мере увеличения расстояний возникает необходимость учитывать все возрастающее число поправочных членов. Поэтому косвенный путь, имеющий неоценимые достоинства при сравнительно коротких расстояниях, при более длинных заменяется прямым путем решения задачи.

То же самое следует сказать и о прямых методах решения задачи: будучи пригодными для вычислений координат на больших расстояниях, при уменьшении расстояний между пунктами эти методы не получают серьезного упрощения и уступают косвенным методам, формулы которых резко упрощаются при малых расстояниях, так как можно пренебрегать некоторыми поправочными членами. Но и в пределах каждого из двух основных путей решения геодезической задачи, в зависимости от требуемой точности вычислений и наличия в распоряжении вычислителя вспомогательных вычислительных средств (таблиц и т. п.), при одних и тех же расстояниях могут быть приняты разные методы и формулы.

Вычисление геодезических координат является одним из основных вопросов, рассматриваемых в сфероидической геодезии; эту задачу не без основания называют главной геодезической задачей. Однако с введением системы прямоугольных координат Гаусса — Крюгера производственное значение вопроса о решении геодезической задачи на эллипсоиде уменьшилось. В настоящее время координаты пунктов триангуляции 2 класса и ниже вычисляют на плоскости с применением соответствующих простых формул. Лишь при обработке триангуляции 1 класса вычисления ведут в системе геодезических координат на поверхности эллипсоида. Однако знание методов решения прямой и обратной геодезических задач необходимо для каждого геодезиста независимо от его специализации и сферы производственной деятельности. Для специалистов, использующих результаты геодезических и топографических работ, система прямоугольных плоских координат может считаться основной; для геодезиста же остается основной система геодезических координат на эллипсоиде. При решении основных научных вопросов высшей геодезии все вычисления выполняются на поверхности эллипсоида с применением геодезических координат.

Рассмотрим различные способы контроля вычисления геодезических координат.

1. Если ряд триангуляции предварительно или окончательно уравнен, т. е. сумма углов каждого треугольника равна  $180^\circ + \epsilon$ , то координаты пункта в каждом треугольнике вычисляют последовательно от координат двух других пунктов, что дает исчерпывающий контроль. Например, известны координаты пунктов  $A$  и  $B$  (рис. 62); от этих двух пунктов по расстояниям и азимутам сторон  $AC$  и  $BC$  вычисляют координаты пункта  $C$ . Сходимость значений широт и долгот (в пределах точности вычислений), полученных для точки  $C$  от  $A$  и от  $B$ , будет контролем вычисления этих координат. Для контроля вычисления азимутов образуем сферический угол как разность обратных азимутов направлений  $CB$  и  $CA$ ; совпадение значения вычисленного таким образом угла с его значением, известным из треугольника, и есть контроль вычисления азимутов. Такой контроль получится при вычислении последующих точек  $D$ ,  $E$  и т. д.

2. Если необходимо вычислять координаты пунктов ряда, не уравненного за условия фигур, то указанный выше порядок контроля не может быть применен, так как треугольники не представляют собой замкнутой фигуры. Такой случай может быть при вычислении свободного члена азимутального условного уравнения при уравнивании звена триангуляции 1 класса. В этом случае выбирают вдоль ряда некоторую ходовую линию, по которой вычисляют координаты. Контроль осуществляют при помощи независимых вычислений в две руки. Но бывают случаи, когда два опытейших вычислителя допускают одну и ту же ошибку, которая таким образом не обнаруживается и сказывается на всех последующих вычислениях. Чтобы это избежать, следует при вычислении в две руки пользоваться различными формулами. При нормальных расстояниях между пунктами целесообразнее вести одни вычисления по формулам со вспомогательной точкой, другие — по формулам со средними аргументами. Необходимые для вычисления средней широты и среднего азимута координаты второй точки берут из результатов вычислений первой руки. Применение двух различных формул исключает возможность сделать одну и ту же ошибку.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

## § 33. Дифференциальные формулы первого рода

После обработки триангуляции и вычисления геодезических координат пунктов может оказаться, что начальные данные (длина и азимут исходной стороны, координаты начального пункта), принятые при обработке, подлежат небольшим изменениям. Это, естественно, вызывает необходимость исправления всех вычисленных широт, долгот и азимутов триангуляции. Конечно, можно заново решить треугольники и вычислить широты, долготы и азимуты

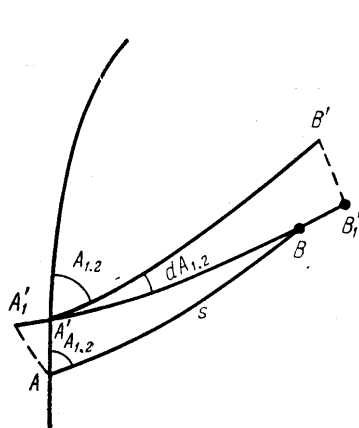


Рис. 63

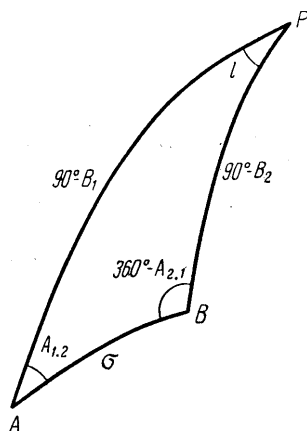


Рис. 64

на основе новых исходных данных, однако проще исправить координаты пунктов путем вычисления поправок к ним.

Формулы, выражающие поправки геодезических координат пунктов и азимутов направлений за изменение начальных данных триангуляции, называются дифференциальными формулами первого рода.

Бывают случаи, когда необходимо изменить параметры принятого референц-эллипсоида. Это может случиться при использовании старых триангуляций, которые относились в России к эллипсоидам Вальбека, Кларка, Бесселя, тогда как в настоящее время в СССР принят эллипсоид Красовского. Кроме того, в связи с переходом к эллипсоиду Красовского возникает необходимость перевычисления координат пунктов на этот эллипсоид, так как в старых каталогах приведены координаты пунктов, вычисленные с использованием параметров эллипсоида Бесселя, который был принят в геодезических работах СССР до 1942 г. Конечно, координаты, отнесенные к новому эллипсоиду, могут быть получены путем перевычисления координат пунктов с использованием новых значений параметров референц-эллипсоида. Однако и в этом случае проще получить новые координаты пунктов путем вычисления и введения поправок за изменение параметров эллипсоида.

Формулы, выражающие поправки геодезических координат за изменение параметров эллипсоида, называются дифференциальными формулами второго рода.

Выведем дифференциальные формулы первого рода.

Пусть в результате ранее выполненных вычислений получены геодезические координаты конечных точек стороны триангуляции  $AB$  (см. рис. 62), ее длина, прямой и обратный азимуты.

Обозначим:

$B_1, L_1$  — координаты пункта  $A$ ;

$B_2, L_2$  — координаты пункта  $B$ ;

$A_{1.2}$  — азимут с  $A$  на  $B$ ;

$A_{2.1}$  — азимут с  $B$  на  $A$ ;

$s$  — расстояние  $AB$ .

Пусть широта пункта  $A$  изменилась на малую величину  $dB_1$ , азимут и длина линии  $AB$  — на малые величины  $dA_{1.2}$  и  $ds$  соответственно. Найдем выражения для поправок в координаты пункта  $B$  и в обратный азимут  $A_{2.1}$ , т. е.  $dB_2, dL_2$  и  $dA_{2.1}$  как функции изменений  $dB_1, dA_{1.2}$  и  $ds$ . Учитывая, что  $dB_1, dA_{1.2}$  и  $ds$  — малые величины, имеем:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial B_2}{\partial s} ds + \frac{\partial B_2}{\partial A_{1.2}} dA_{1.2} \\ dL_2 &= \frac{\partial L_2}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial L_2}{\partial s} ds + \frac{\partial L_2}{\partial A_{1.2}} dA_{1.2} + dL_1 \\ dA_{2.1} &= \frac{\partial A_{2.1}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{2.1}}{\partial s} ds + \frac{\partial A_{2.1}}{\partial A_{1.2}} dA_{1.2} \end{aligned} \right\}. \quad (33.1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= dB_2^{B_1} + dB_2^s + dB_2^{A_{1.2}} \\ dL_2 &= dL_1 + dL_2^{B_1} + dL_2^s + dL_2^{A_{1.2}} \\ dA_{2.1} &= dA_{2.1}^{B_1} + dA_{2.1}^s + dA_{2.1}^{A_{1.2}} \end{aligned} \right\}. \quad (33.2)$$

1. Вывод величин  $dB_2^{B_1}, dL_2^{B_1}$  и  $dA_{2.1}^{B_1}$ . Пусть точка  $A'$ , лежащая на меридиане точки  $A$  (рис. 63), имеет широту  $B_1 + dB_1$ . Будем поворачивать геодезическую линию  $BA$  вокруг точки  $B$  до тех пор, пока она не пройдет через точку  $A'$ . Точка  $A$  переместится в положение  $A'_1$ . Перемещаем точку  $A'_1$  (в положение  $A'$ , сохраняя при этом длину линии  $AB$ , равной  $s$ . Тогда точка  $B$  переместится в положение  $B'_1$  и, очевидно,  $A'B'_1 = s$ . Будем поворачивать линию  $A'B'$  вокруг точки  $A'$  до тех пор, пока ее азимут не сделается равным  $A_{1.2}$ ; при этом  $B'_1$  переместится в положение  $B'$ . Очевидно, разность широт точек  $B$  и  $B'$  получится

$$dB_2^{B_1} = \frac{\partial B_2}{\partial B_1} dB_1,$$

т. е. это будет часть поправки  $dB_2$ , обусловленная изменением широты точки  $A$  на величину  $dB_1$ .

Из рис. 63 имеем:

$$BB'_1 = A'_1A' = M_1 dB_1 \cos A_{1.2},$$

$$AA'_1 = M_1 dB_1 \sin A_{1.2}.$$

Применяя формулы для решения прямой геодезической задачи, получаем разность широт точек  $B'_1$  и  $B$

$$= \frac{M_1 dB_1 \cos A_{1.2} \cos A_{2.1}}{M_2},$$

а разность широт точек  $B'$  и  $B'_1$  равна

$$- \frac{M_1 dB_1 \sin A_{1.2} \sin A_{2.1}}{M_2}.$$

Так как  $AA'_1 \approx B'_1B'$ , следовательно,

$$dB_2^{B_1} = - \frac{M_1 dB_1 \cos A_{1.2} \cos A_{2.1}}{M_2} - \frac{M_1 dB_1 \sin A_{1.2} \sin A_{2.1}}{M_2},$$

или

$$dB_2^{B_1} = - \frac{M_1}{M_2} dB_1 (\cos A_{1.2} \cos A_{2.1} + \sin A_{1.2} \sin A_{2.1}). \quad (33.3)$$

Из треугольника  $ABP$  (рис. 64), который мы рассматриваем как сферический,

$$\cos l = -\cos A_{1.2} \cos A_{2.1} - \sin A_{1.2} \sin A_{2.1} \cos \sigma. \quad (33.4)$$

Полагая в выражении (33.4)  $\cos \sigma = 1$ , на основании (33.3) и (33.4) получаем

$$dB_2^{B_1} = + \frac{M_1}{M} \cos l dB_1. \quad (33.5)$$

Для вывода  $dL_2^{B_1}$  заметим, что

$$L_2 = L_1 + l; \quad dL_2 = dL_1 + dl; \quad dl = dl^{B_1} + dl^s + dl^{A_{1.2}}.$$

По аналогии с предыдущим

$$dl_2^{B_1} = - \frac{M_1 dB_1 \cos A_{1.2} \sin A_{2.1}}{N_2 \cos B_2} + \frac{M_1 dB_1 \sin A_{1.2} \cos A_{2.1}}{N_2 \cos B_2},$$

или

$$dl_2^{B_1} = - \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \{ \cos A_{1.2} \sin A_{2.1} - \sin A_{1.2} \cos A_{2.1} \} dB_1. \quad (33.6)$$

Но из рис. 64 имеем:

$$\sin B_2 \sin l = -\sin A_{2.1} \cos A_{1.2} + \cos A_{2.1} \sin A_{1.2} \cos \sigma,$$

$$-\sin B_2 \sin l = \cos A_{1.2} \sin A_{2.1} - \sin A_{1.2} \cos A_{2.1} \cos \sigma.$$

Положим, что  $\cos \sigma = 1$ , тогда формула (33.6) примет вид

$$dl_2^{B_1} = \frac{M_1}{N_2} \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1. \quad (33.7)$$

Для вывода  $dA_{2.1}$  вспомним, что

$$A_{2.1} = A_{1.2} \pm 180^\circ + t,$$

следовательно,

$$dA_{2.1} = dt. \quad (33.8)$$

Из треугольника  $cPb$  (рис. 65)

$$\sin B_2 = \operatorname{ctg} l \operatorname{tg} t,$$

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} l \sin B_2. \quad (33.9)$$

Дифференцируя (33.9), находим

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dl}{\cos^2 l} \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 dB_2.$$

Полагая  $\cos^2 t = 1$  и  $\cos^2 l = 1$ , получаем

$$dt = dl \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 dB_2.$$

Принимая во внимание (33.8), (33.7) и (33.5), последнее уравнение примет вид

$$dA_{2.1}^{B_1} = \left\{ \frac{M_1}{N_2} \sin l \operatorname{tg} B_2 \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 \frac{M_1}{M_2} \cos l \right\} dB_1,$$

или

$$dA_{2.1}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2} \left\{ \frac{M_1}{N_2} \sin^2 B_2 + \frac{M_1}{M_2} \cos^2 B_2 \right\} dB_1.$$

Полагая  $M_1 \approx M_2$  и имея в виду, что по формуле (5.12)

$$\frac{M_2}{N_2} \approx 1 - e^2 \cos^2 B_2,$$

получаем

$$dA_{2.1}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2} \{ (1 - e^2 \cos^2 B_2) \sin^2 B_2 + \cos^2 B_2 \} dB_1,$$

или окончательно

$$dA_{2.1}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2} \{ 1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_2 \} dB_1. \quad (33.10)$$

2. Вывод величин  $dB_2^s$ ,  $dl^s$  и  $dA_2^s$ ... Оставляя прежние обозначения, положим, что длина геодезической линии  $AB = s$  (рис. 66) изменилась на величину  $BB_1 = ds$ , причем широта начальной точки и азимут линии  $AB$  остались без изменения. Таким образом,  $dB_1^s$  — изменение широты точки  $B$ , обусловленное изменением в длине геодезической линии  $AB$  на  $ds$ , равно разности широт точек  $B$  и  $B_1$ .

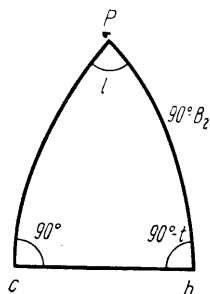


Рис. 65

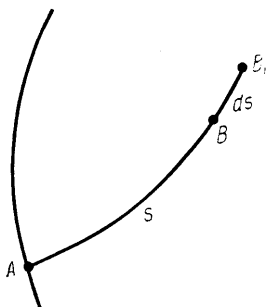


Рис. 66

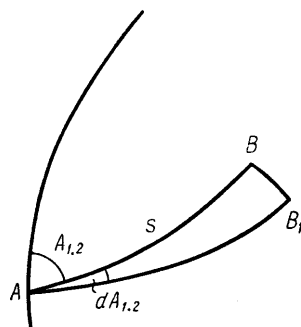


Рис. 67

Азимут линии  $BB_1$  равен  $A_{2.1} - 180^\circ$ , поэтому по формулам для решения прямой геодезической задачи найдем

$$dB_2^s = -\cos A_{2.1} (1)_2 ds. \quad (33.11)$$

Так как  $ds = s \frac{\Delta \lg s}{\mu}$ , то формула (33.11) примет вид

$$dB_2^s = -\cos A_{2.1} (1)_2 s \frac{d \lg s}{\mu}. \quad (33.12)$$

Рассуждая так же в отношении долготы второй точки и обратного азимута, получаем

$$dL_2^s = -\frac{\sin A_{2,1}}{\cos B_2} (2)_2 ds,$$

или

$$\left. \begin{aligned} dL_2^s &= -\frac{\sin A_{2,1}}{\cos B_2} (2)_2 s \frac{d \lg s}{\mu} \\ dA_{2,1}^s &= -\sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 (2)_2 ds \end{aligned} \right\}, \quad (33.13)$$

или

$$dA_{2,1}^s = -\sin A_{2,1} \operatorname{tg} B_2 (2)_2 s \frac{d \lg s}{\mu}. \quad (33.14)$$

3. Вывод величин  $dB_2^{A_{1,2}}$ ,  $dL_2^{A_{1,2}}$ ,  $dA_{2,1}^{A_{1,2}}$ . Оставляя прежние обозначения, предполагаем, что изменился азимут  $A_{1,2}$  геодезической линии  $AB$  на малую величину  $dA_{1,2}$ , в результате чего точка  $B$  переместилась в положение  $B_1$  (рис. 67). Определим длину линии, соединяющей точки  $B$  и  $B_1$ . Если бы линия  $AB$  располагалась на плоскости, то, очевидно, кривая малой длины  $BB_1$ , будучи элементарной дугой окружности, равнялась бы длине геодезической линии  $s$ , умноженной на угол  $dA_{1,2}$ , т. е. существовало бы равенство  $BB_1 = dA_{1,2}s$ . Но, поскольку линия  $AB$  расположена на эллипсоиде, то последнее равенство будет неточным. Напишем

$$BB_1 = du = m dA_{1,2}, \quad (33.15)$$

где  $m$  — функция длины и азимута геодезической линии, при которой справедливо написанное равенство. Величина  $m$  называется приведенной длиной геодезической линии.

Для определения приведенной длины геодезической линии, учитывая близость земного эллипсоида к шару и небольшую величину дифференциальных поправок, примем эллипсоид за сферу с радиусом, равным среднему радиусу кривизны.

Тогда, рассматривая треугольник  $ABB_1$  как сферический и выражая его стороны в угловой мере, находим

$$\frac{\sin \frac{du}{R}}{\sin dA_{1,2}} = \frac{\sin \frac{s}{R}}{\sin 90^\circ},$$

или, по малости величин  $\frac{du}{R}$  и  $dA_{1,2}$ ,

$$du = R \sin \frac{s}{R} dA_{1,2}. \quad (33.16)$$

Сравнивая (33.15) и (33.16), находим

$$m = R \sin \frac{s}{R}. \quad (33.17)$$

Изменение широты точки  $B$ , вызванное изменением азимута  $A_{1,2}$  на  $dA_{1,2}$ , будет, очевидно, равно разности широт точек  $B$  и  $B_1$ . Имея в виду, что азимут линии  $BB_1$  равен  $A_{2,1} + 270^\circ$ , получаем

$$dB_2^{A_{1,2}} = m \sin A_{2,1} (1)_2 dA_{1,2}, \quad (33.18)$$

Рассуждая аналогично этому, находим

$$dL_2^{A_{1.2}} = - \frac{m \cos A_{2.1}}{\cos B_2} (2)_2 dA_{1.2}. \quad (33.19)$$

Для вывода  $dA_{2.1}^{A_{1.2}}$  заметим, что поправка в обратный азимут вследствие изменения прямого азимута должна состоять из двух членов:

1) из поправки  $dA_{1.2}$ , отнесенной к приведенной длине геодезической линии, эта часть поправки имеет вид

$$\frac{dm}{ds} dA_{1.2};$$

2) из поправки, обусловленной изменением сближения меридианов при перемещении конечной точки в результате изменения начального азимута.

На рис. 68 через  $B$  обозначено положение конечной точки линии с азимутом  $A_{1.2}$ ; если азимут  $A_{1.2}$  изменяется на  $dA_{1.2}$ , то точка  $B$  перемещается в  $B_1$ . Очевидно, отрезок  $BB_1$  по-прежнему будет равен  $mdA_{1.2}$ , а азимут его  $A_{2.1} \pm 180^\circ + 90^\circ$ . Следовательно, изменение сближения меридианов в конечной точке или сближение меридианов между точками  $B$  и  $B_1$  равно

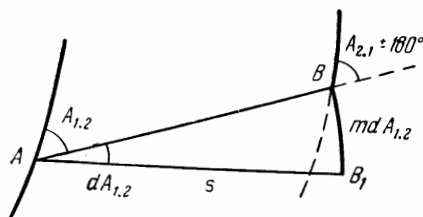


Рис. 68

$$dt = dL_2^{A_{1.2}} \sin B_2 = -m \cos A_{2.1} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{1.2}.$$

Таким образом, полная поправка в обратный азимут будет иметь вид

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = \frac{dm}{ds} dA_{1.2} - m \cos A_{2.1} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{1.2}. \quad (33.20)$$

Но

$$m = R \sin \frac{s}{R},$$

поэтому

$$\frac{dm}{ds} = \cos \frac{s}{R}. \quad (33.21)$$

Следовательно,

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = \cos \frac{s}{R} dA_{1.2} - R \sin \frac{s}{R} \cos A_{2.1} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{1.2}. \quad (33.22)$$

Для упрощения формулы заменим  $\cos \frac{s}{R}$  через  $1 - \frac{s^2}{2R^2}$ , пренебрегая при этом различием между  $R$  и  $N$ , и положим во втором члене, что  $R \sin \frac{s}{R} = s$ ; тогда получим окончательно

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = dA_{1.2} - \frac{s^2}{2N_2^2} dA_{1.2} - s (2)_2 \cos A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 dA_{1.2}. \quad (33.23)$$



Таким образом, на основании формулы (33.1) дифференциальные формулы первого рода в окончательном виде примут вид:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= + \frac{M_1}{M_2} \cos l \, dB_1 - \frac{\cos A_{2.1}}{M_2} \rho'' s \frac{d \lg s}{\mu} + \frac{m \sin A_{2.1}}{M_2} dA_{1.2} \\ dL_2 &= dL_1 + \frac{M_1}{N_2} \sin l \, \operatorname{tg} B_2 \, dB_1 - \frac{\sin A_{2.1} s}{N_2 \cos B_2} \rho'' \frac{d \lg s}{\mu} - \frac{m \cos A_{2.1}}{N_2 \cos B_2} dA_{1.2} \\ dA_{2.1} &= \frac{\sin l}{\cos B_2} \{1 - e^2 \sin^2 B_2 \cos^2 B_2\} dB_1 - \sin A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 \frac{s}{N_2} \rho'' \frac{d \lg s}{\mu} + \\ &\quad + \left\{1 - \frac{s^2}{2N_2^2} - s \frac{1}{N_2} \cos A_{2.1} \operatorname{tg} B_2\right\} dA_{1.2} \end{aligned} \right\}. \quad (33.24)$$

Эти формулы пригодны для расстояний до 200—250 км.

Точные формулы, справедливые для любых значений  $s$ , имеют вид\*.

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \frac{M_1}{M_2} \left[ \cos A_{1.2} \cos A_{2.1} + \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1.2} \sin A_{2.1} \right] dB_1 - \\ &\quad - \frac{\cos A_{2.1}}{M_2} ds + \frac{m}{M_2} \sin A_{2.1} \sin dA_{1.2} \\ dL_2 &= dL_1 - \frac{M_1}{N_2 \cos B_2} \left[ \cos A_{1.2} \sin A_{2.1} - \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1.2} \cos A_{2.1} \right] dB_1 - \\ &\quad - \frac{\sin A_{2.1}}{N_2 \cos B_2} ds - \frac{m \cos A_{2.1}}{N_2 \cos B_2} dA_{1.2} \\ dA_{2.1} &= -M_1 \operatorname{tg} A_{2.1} \left\{ \frac{\operatorname{tg} B_1}{N_1} + \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \left[ \cos A_{1.2} \cos A_{2.1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1.2} \sin A_{2.1} \right] \right\} dB_1 - \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \sin A_{2.1} ds + \\ &\quad + \left[ \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 - \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_2} \cos A_{2.1} \right] dA_{1.2} \end{aligned} \right\}, \quad (33.25)$$

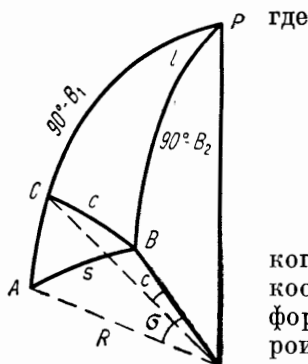


Рис. 69

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_1 = \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_2 \cos A_{2.1}} + \frac{\operatorname{tg} A_{2.1}}{\operatorname{tg} A_{1.2}},$$

$$\left( \frac{dm}{ds} \right)_2 = \frac{m \operatorname{tg} B_1}{N_1 \cos A_{1.2}} + \frac{\operatorname{tg} A_{1.2}}{\operatorname{tg} A_{2.1}}.$$

Для топографических и картографических целей, когда расстояния не превышают 40—50 км, а поправки координат достаточно иметь с точностью 0,001—0,002", формулы (33.24) можно упростить. Пренебрежем сфероидичностью Земли и заменим приведенную длину геодезической линии  $m$  длиной геодезической линии  $s$  (в данном случае дугой большого круга), тогда:

1. Принимая  $\frac{M_1}{M_2} = 1$ , согласно формуле (33.5), получаем

$$dB_2^{B_1} = \cos l \, dB_1. \quad (33.26)$$

\* См. [44, стр. 278].

2. Аналогично предыдущему, учитывая формулу (33.18), получаем

$$dB_2^{A_{1.2}} = + \frac{s}{R} \sin A_{2.1} dA_{1.2}. \quad (33.27)$$

Построим сферический треугольник  $ABP$  (рис. 69) и на меридиане точки  $A$  выберем точку  $C$ , как это делалось при выводе формул для решения прямой геодезической задачи.

Обозначим  $\frac{s}{R} = \sigma$ . Из треугольника  $ABC$  имеем

$$\sigma = \frac{c}{\sin A_{1.2}},$$

из треугольника  $CBP$  получим  $\sin c = \cos B_2 \sin l$  или  $c = \cos B_2 \sin l$ . Имея в виду последние выражения, можем написать:

$$\begin{aligned} dB_2^{A_{1.2}} &= \sigma \sin A_{2.1} dA_{1.2} = \frac{c}{\sin A_{1.2}} \sin A_{2.1} dA_{1.2}, \\ dB_2^{A_{1.2}} &= -\sin l \cos B_2 dA_{1.2}. \end{aligned} \quad (33.28)$$

3. Полагая в формуле (33.7)  $\frac{M_1}{N_2} = 1$ , получаем

$$dL_2^{B_1} = \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1. \quad (33.29)$$

4. Согласно формуле (33.19), полагая, что  $\frac{m}{N_2} = \sigma = \frac{c}{\sin A_{1.2}}$  и  $c = \sin l \cos B_2$ , получаем

$$\begin{aligned} dL_2^{A_{1.2}} &= -\sigma \frac{\cos A_{2.1}}{\cos B_2} dA_{1.2} = -\frac{c}{\sin A_{1.2}} \frac{\cos A_{2.1}}{\cos B_2} dA_{1.2} = \\ &= -\frac{\sin l \cos B_2 \cos A_{2.1}}{\sin A_{1.2} \cos B_2} dA_{1.2}. \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$dL_2^{A_{1.2}} = -\sin l \frac{\cos A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2}. \quad (33.30)$$

5. Считая эксцентриситет  $e$  равным 0 и учитывая формулу (33.10) получаем,

$$dA_{2.1}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2} dB_1. \quad (33.31)$$

6. Согласно формуле (33.22)

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = \left( \cos \frac{s}{R} - R \sin \frac{s}{R} \cos A_{2.1} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 \right) dA_{1.2}.$$

Придерживаясь принятых обозначений и по-прежнему пренебрегая сфероидичностью Земли, получаем

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = (\cos \sigma - \sin \sigma \cos A_{2.1} \operatorname{tg} B_2) dA_{1.2},$$

или

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = \left( \frac{\cos \sigma \cos B_2 - \sin \sigma \cos A_{2.1} \sin B_2}{\cos B_2} \right) dA_{1.2}.$$

Из треугольника  $ABP$  (см. рис. 69)

$$\cos B_1 \cos l = \cos \sigma \cos B_2 - \sin \sigma \cos A_{2.1} \sin B_2,$$

поэтому

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = \frac{\cos B_1 \cos l}{\cos B_2} dA_{1.2},$$

но

$$\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = \frac{\sin(90^\circ - B_1)}{\sin(90^\circ - B_2)} = -\frac{\sin A_{2.1}}{\sin A_{1.2}},$$

следовательно, окончательно

$$dA_{2.1}^{A_{1.2}} = -\cos l \frac{\sin A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2}. \quad (33.32)$$

Выражения  $dB_2^s$ ,  $dL_2^s$  и  $dA_{2.1}^s$  остаются такими же, как и в формулах (33.24). Сделав все эти преобразования, получим дифференциальные формулы первого рода в упрощенном виде

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \cos l dB_1 - \cos B_1 \sin l dA_{1.2} - (1)_2 \cos A_{2.1} s \frac{\Delta \lg s}{\mu} \\ dL_2 &= dL_1 + \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \sin l \frac{\cos A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2} - \\ &\quad - (2)_2 \frac{\sin A_{2.1}}{\cos B_2} s \frac{\Delta \lg s}{\mu} \\ dA_{2.1} &= \frac{\sin l}{\cos B_2} dB_1 - \cos l \frac{\sin A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2} - (2)_2 \sin A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 s \frac{\Delta \lg s}{\mu} \end{aligned} \right\}. \quad (33.33)$$

Для нелогарифмического вычисления поправок формулы (33.33) переписываются:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \cos l dB_1 - \cos B_1 \sin l dA_{1.2} - 0,03234'' \cos A_{2.1} ds \\ dL_2 &= dL_1 + \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1 - \sin l \frac{\cos A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2} - \\ &\quad - 0,03234'' \frac{\sin A_{2.1}}{\cos B_2} ds \\ dA_{2.1} &= \frac{\sin l}{\cos B_2} dB_1 - \cos l \frac{\sin A_{2.1}}{\sin A_{1.2}} dA_{1.2} - \\ &\quad - 0,03234'' \sin A_{2.1} \operatorname{tg} B_2 ds \end{aligned} \right\}. \quad (33.34)$$

где принято с подстановкой приближенных числовых значений:

$$(1)_2 s \frac{d \lg s}{\mu} = (2)_2 s \frac{d \lg s}{\mu} = 0,03234'' ds.$$

Из сравнения упрощенных формул с более точными формулами (33.25) следует, что в первых ошибочны коэффициенты при  $dA_1$  и  $dB_1$  на величины порядка  $e^2\sigma$ . Следовательно, при расстояниях в 40—50 км и значениях  $dA_1$  и  $dB_1$  в несколько секунд погрешности, обусловленные приближенностью формул, могут достигать величины порядка  $0,001''$ . Формулами (33.33) следует пользоваться лишь при вычислении координат пунктов как опорных для съемок.

К дифференциальным формулам I рода следует отнести формулы, служащие для решения обратной, по сравнению с рассмотренной, задачи: определить

изменения длины геодезической линии  $s$ , прямого и обратного азимутов ее  $A_{1.2}$  и  $A_{2.1}$ , вызванные изменением координат конечных точек данной линии, т. е.  $B_1, L_1, B_2, L_2$  на  $dB_1, dL_1, dB_2$  и  $dL_2$ .

Искомые формулы получаются путем алгебраических преобразований полученных выше дифференциальных формул.

Опуская вывод, приведем вывод формул в окончательном виде\*:

$$\left. \begin{aligned} \rho'' ds &= -M_2 \cos A_{2.1} dB_2 - r_2 \sin A_{2.1} dL_2 \\ m dA_{1.2} &= M_2 \sin A_{2.1} dB_2 - r_2 \cos A_{2.1} dL_2 \\ m dA_{2.1} &= M_2 \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \sin A_{2.1} dB_2 + r_1 \cos A_{1.2} dL_2 \end{aligned} \right\}. \quad (33.35)$$

Написанные формулы соответствуют случаю, когда изменились координаты второй точки, т. е.  $B_2, L_2$ . Если изменить индексы «1» на «2», то формулы будут справедливы для случая, когда изменяются координаты первой точки, т. е.  $B_1, L_1$ .

При одновременном изменении координат точек 1 и 2 формулы примут вид

$$\left. \begin{aligned} \rho'' ds &= -M_1 \cos A_{1.2} dB_1 - M_2 \cos A_{2.1} dB_2 - r_2 \sin A_{2.1} (dL_2 - dL_1) \\ m dA_{1.2} &= M_1 \left( \frac{dm}{ds} \right)_2 \sin A_{1.2} dB_1 + M_2 \sin A_{2.1} dB_2 - \\ &\quad - r_2 \cos A_{2.1} (dL_2 - dL_1) \\ m dA_{2.1} &= M_2 \left( \frac{dm}{ds} \right)_1 \sin A_{2.1} dB_2 + M_1 \sin A_{1.2} dB_1 + \\ &\quad + r_1 \cos A_{1.2} (dL_2 - dL_1) \end{aligned} \right\}, \quad (33.36)$$

где  $r$  — радиус параллели под данной широтой.

### § 34. Дифференциальные формулы второго рода

Пусть некоторая триангуляция вычислена на поверхности эллипсоида, размеры которого определяются большой полуосью  $a_1$  и сжатием  $\alpha_1$  (или эксцентриситетом  $e_1$ ). Как известно из гл. IV, геодезические координаты пунктов триангуляции вычисляют путем последовательной передачи разностей координат смежных пунктов. При вычислении разностей координат используют основные геодезические величины (1), (2), которые являются функциями большой полуоси, эксцентриситета эллипсоида и широты. Если возникает задача перевычисления триангуляции на поверхность нового эллипсоида, размеры которого определяются большой полуосью  $a_2$  и сжатием  $\alpha_2$  (или  $e_2$ ), то, очевидно, изменение размеров эллипсоида вызывает изменение разностей координат. Отсюда следует, что вывод формул для поправок за изменение параметров эллипсоида должен заключаться в нахождении формул для поправок в разности координат пунктов ходовой линии, по которой вычислялись координаты. Формулы этих поправок легко найдутся путем дифференцирования главных членов известных выражений для разностей широт, долгот и азимутов.

\* См. [2, стр. 235, 236].

Используя главные члены формул со средними аргументами для разности координат (26.34), (26.35), дифференцируя по переменным  $a$  и  $\alpha$  (или  $e$ ), после преобразований и некоторых упрощений, получим:

$$ab'' = -b'' \left\{ \frac{da}{a} - [2 - 3 \sin^2 B_m] d\alpha \right\},$$

$$dl'' = -l'' \left\{ \frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha \right\}. \quad (34.1)$$

Для получения  $dt$  напишем:

$$\left. \begin{aligned} t &= l \sin B_m \\ dt &= dl \sin B_m \end{aligned} \right\}, \quad (34.2)$$

поэтому

$$dt'' = -t'' \left\{ \frac{da}{a} + \sin^2 B_m d\alpha \right\}. \quad (34.3)$$

Полученные формулы дифференциальных поправок второго рода не являются точными. Если длины сторон триангуляции не превышают 40—50 км, то формулы обеспечивают точность поправок порядка 0,001—0,002".

Но дифференциальные формулы второго рода нужны и при составлении уравнений градусных измерений для вывода размеров эллипсоида и установления исходных геодезических дат, а также при уравнивании триангуляции 1 класса. Однако для этих целей точность выведенных выше формул недостаточна.

Вполне пригодны для этих целей новые дифференциальные формулы Красовского [31]. В них устанавливается зависимость изменений координат от изменений большой полуоси, сжатия и высоты геоида над референц-эллипсоидом в исходном пункте триангуляции, а также от изменений широты и долготы в том же исходном пункте. Эти формулы — наиболее точные; существовавшие до них формулы Гельмерта могли быть применены для расстояний порядка 600—800 км, тогда как формулы Красовского пригодны для расстояний до 6000 км и более удобны для использования. Формулы Красовского имеют важное значение для обработки такой большой астрономо-геодезической сети, как сеть СССР.

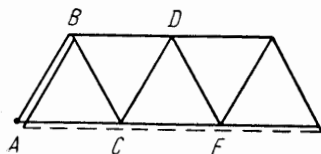


Рис. 70

Если возникает необходимость исправления координат пунктов данной триангуляции за изменение координат исходных пунктов, азимута и длины исходной стороны, то применяют дифференциальные формулы только первого рода и поправки нужно вычислять последовательно, так как поправки каждого последующего пункта — функции поправок координат предыдущего. Несколько иначе нужно вычислять поправки при перенесении координат на новый эллипсоид; при этом если даже координаты исходного пункта не изменились, поправки за переход на новый эллипсоид вычисляют по дифференциальным формулам второго и первого рода.

Например, необходимо вычислить поправки за переход на новый эллипсоид в координаты пунктов ряда, изображенного на рис. 70 по ходовой линии ACE, причем координаты исходного пункта не изменяются.

Очевидно, для нахождения поправок координат пункта C достаточно вычислить поправки второго рода за изменение разности координат пунктов A и C.

Но после введения поправок в координаты пункта  $C$  для нахождения поправок в координаты пункта  $E$  и всех последующих возникает необходимость вычисления, кроме поправок второго рода, еще поправок первого рода, так как на новом эллипсоиде координаты пункта  $C$  изменились.

Таким образом, при перевычислении координат на новый эллипсоид необходимо применять формулы обоих видов. В отличие от дифференциальных формул первого рода поправки второго рода в разности координат пунктов можно вычислить одновременно для многих сторон триангуляции.

В заключение приведем дифференциальные формулы для совместного вычисления поправок за изменение координат и параметров эллипсоида, пригодные для использования вплоть до триангуляции 1 класса \*:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= dB_1 + b \frac{ds}{s} - b \frac{\operatorname{tg} A_m}{2\rho''} dA_{1.2} - b \frac{da}{a} + b(2 - 3 \sin^2 B_m) d\alpha \\ dL_2 &= dL_1 + l \frac{ds}{s} + \frac{l \operatorname{tg} A_m}{2\rho''} dB_1 + \frac{l \operatorname{ctg} A_m}{2\rho''} dA_{1.2} - l \frac{da}{a} - \\ &\quad - l \sin^2 B_m d\alpha \\ dA_{2.1} &= dA_{1.2} + t \frac{ds}{s} + \frac{t}{\rho'' \sin 2B_m} dB_1 + t \frac{\operatorname{ctg} A_m}{2\rho''} dA_{1.2} - \\ &\quad - t \frac{da}{a} - t \sin^2 B_m d\alpha \end{aligned} \right\}. \quad (34.4)$$

В приведенных формулах поправки выражены в функции средних аргументов  $B_m$  и  $A_m$ . Формулы пригодны для вычисления на счетных машинах. Результаты вычислений округляют до 0,001", что соответствует точности формул.

\* См. [2, стр. 240].

# Глава VI

## ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ГАУССА — КРЮГЕРА

### § 35. Общие сведения

Конечная практическая цель триангуляционных и полигонометрических работ — определение положения геодезических пунктов на поверхности принятого референц-эллипсоида. Положение этих пунктов можно определить в различных системах координат. Необходимо вычислять координаты пунктов в такой системе, которая была бы проста и обеспечивала бы наиболее удобное и легкое использование координат в разнообразных практических целях. Такой системой является система плоских прямоугольных координат. В этой системе вычисляют координаты пунктов съемочного обоснования, для которых координаты триангуляционных пунктов являются исходными, производят различного рода расчеты при проектировании и строительстве разнообразных инженерных сооружений и перенос проектов в натуру. Использование топографических планов существенно облегчается, если на них нанесена сетка координатных линий в прямоугольной плоской системе координат. Прямоугольные координаты геодезических пунктов необходимы при использовании геодезических данных для оборонных целей.

Система геодезических координат имеет ряд достоинств; она наиболее удобна для решения научных задач высшей геодезии и в этой системе координат обычно обрабатывают триангуляцию 1 класса, однако она неудобна для широкого использования в указанных практических целях. Действительно, взаимное положение пунктов в этой системе определяется в угловых единицах (градусах, минутах и секундах широты и долготы), причем линейное значение этих единиц различно в зависимости от широты места; направления меридианов, от которых отсчитываются азимуты, не параллельны между собой; вычисления при помощи геодезических координат, даже при малых расстояниях, сложны, трудоемки и требуют известной подготовки вычислителя.

Таким образом, для практического использования наиболее удобна система плоских прямоугольных координат.

Известно, что поверхность эллипсоида не может быть развернута на плоскость без искажений, поэтому и не может быть предложена система плоских прямоугольных координат, в которой без искажений было бы выражено взаимное положение точек земной поверхности. Поставленная задача сводится к изображению поверхности эллипсоида на плоскости по некоторому определенному закону. Математически такой закон (или проекция) в общем виде может быть выражен уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \quad (35.1)$$

В этих уравнениях  $x$  и  $y$  — плоские прямоугольные координаты изображаемой на плоскости точки, выраженные как функции геодезических координат той же точки на поверхности эллипсоида. Если выбрать под тем или иным условием закон изображения точек эллипсоида на плоскости, то можно, пользуясь написанными формулами, получить формулы для перехода от расстояний

и углов на поверхности эллипсоида к соответствующим расстояниям и углам на плоскости.

Законов изображения поверхности эллипсоида на плоскости может быть бесчисленное множество; очевидно, каждый закон изображения определяется видом функции  $f_1$  и  $f_2$  в уравнениях (35.1).

При выборе закона изображения эллипсоида на плоскости, т. е. функций  $f_1$  и  $f_2$ , приходится иметь в виду, что желательно обеспечить единой системой плоских прямоугольных координат всю территорию государства, так как этим самым будет создана основа для единообразного вычисления результатов последующих геодезических работ и получения топографических планов в единой системе.

Конкретные требования, которые следует поставить при выборе функций  $f_1$  и  $f_2$ : минимальное искажение изображаемых на плоскости элементов поверхности эллипсоида; легкость и простота учета искажений, хотя бы за счет некоторого, конечно сравнительно небольшого, увеличения самого размера этих искажений. Простота и легкость применения проекции и учета искажений — весьма важный показатель достоинства проекции, особенно когда необходимо переходить от числовых значений геодезических координат пунктов к числовым значениям координат на плоскости. Поправки за искажения или за перенос элементов триангуляции с эллипсоида на плоскость и обратно должны вычисляться с ошибками, в 5—10 раз меньшими ошибок непосредственных измерений.

Если координаты опорных геодезических пунктов даны в проекции, то топографические планы не требуют какой-либо укладки на плоскость путем соответствующего их редуцирования. Графические материалы съемок получают в принятой проекции и лишь числовые данные съемок в виде длин сторон и углов теодолитных и тахеометрических ходов, измеряемых непосредственно на местности, должны быть исправлены за переход к проекции. Но в этом случае целесообразно учитывать только искажения длин с тем, чтобы в пределах определенной зоны масштаб изображений можно было считать постоянным. Это обуславливает выбор равноугольной или конформной проекции, для которой угловые искажения при переходе с эллипсоида на плоскость отсутствуют, а масштаб линейных искажений одинаков по всем направлениям. Этим облегчается учет искажений и редуцирование геодезических данных с эллипсоида на плоскость.

Но системы прямоугольных плоских координат с единым началом. позволяющей отобразить точки всей поверхности эллипсоида на плоскости, практически быть не может, так как искажения становятся слишком большими. Поэтому неизбежно разделение земной поверхности на части или зоны, которые изображаются на плоскости одна независимо от другой, каждая со своим началом координат. Если примем определенные условия в отношении величины и характера искажений, то возникнут определенные требования к размерам и конфигурации этих зон. При выборе проекции следует стремиться к минимальному числу зон на территории данного государства. Кроме того, проекция должна обеспечивать легкость перехода из зоны в зону и возможное единообразие при вычислениях в разных зонах.

Указанным выше требованиям из числа существующих проекций наилучшим образом удовлетворяет конформная проекция Гаусса — Крюгера. Эту проекцию Гаусс предложил в 1825—1830 гг.; в 1912 г. Крюгер разработал детали применения и дал рабочие формулы для вычислений в этой проекции, поэтому ее называют проекцией Гаусса — Крюгера.



## § 36. Основные сведения о конформной проекции Гаусса — Крюгера эллипсоида на плоскости

При использовании проекции Гаусса — Крюгера земной эллипсоид разделяется на зоны меридианами. Каждая зона представляет собой сфероидический двугульник, построенный от одного полюса до другого и ограниченный меридианами, для всей изображаемой территории имеющими постоянную разность долгот. Средний меридиан в каждой зоне называется осевым меридианом, и его долгота обозначается через  $L_0$ .

В СССР протяженность зон по долготе установлена в  $6^\circ$ , а в районах, где предстоят топографические съемки в крупном масштабе, — в  $3^\circ$ .

Граничные меридианы каждой шестиградусной зоны приняты совпадающими с меридианами, ограничивающими западную и восточную рамки карты масштаба 1 : 1 000 000 (рис. 71). Следовательно, осевые меридианы каждой зоны совпадают со средними меридианами листов карты этого масштаба. Долготы осевых меридианов вычисляют по формуле  $6n - 3$ , где  $n$  — номер зоны. Числовые значения долгот, граничных и осевых меридианов шестиградусных зон для Европейской части СССР приведены ниже.

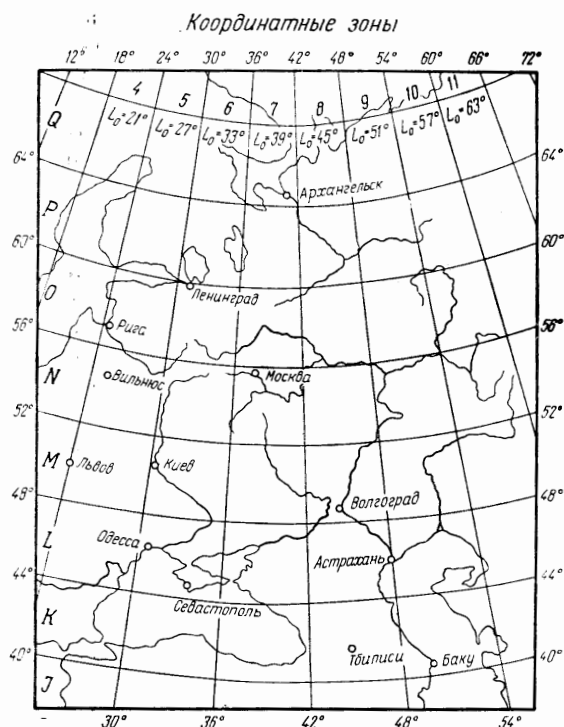


Рис. 71

Меридианы	Зоны							
	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Западный . .	18°	24°	30°	36°	42°	48°	54°	60°
Восточный . .	24	30	36	42	48	54	60	66
Осевой . . . .	21	27	33	39	45	51	57	63

В системе трехградусных зон осевые меридианы расположены через  $3^\circ$  по долготе и совпадают поочередно с граничными и средними меридианами карты масштаба 1 : 1 000 000.

В каждой зоне изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс, а изображение экватора — за ось ординат. Эти кривые на поверхности эллипсоида изображаются на плоскости прямыми линиями. Следовательно, в каждой

зоне имеется свое начало координат — пересечение осевого меридиана с экватором.

В проекции Гаусса — Крюгера осевой меридиан изображается без искажения.

На рис. 72, а показана зона с номером  $n$ ; кривые  $PEP'$  и  $PE_1P_1$  — граничные меридианы; пунктирная кривая  $PP'$  — осевой меридиан, долгота которого  $L_0$  в системе шестиградусных зон определяется по формуле  $L_0 = 6n - 3$ . Положение точки  $A$ , расположенной в этой зоне, определяется широтой  $B$  и долготой  $l$ , отсчитываемой от осевого меридиана.

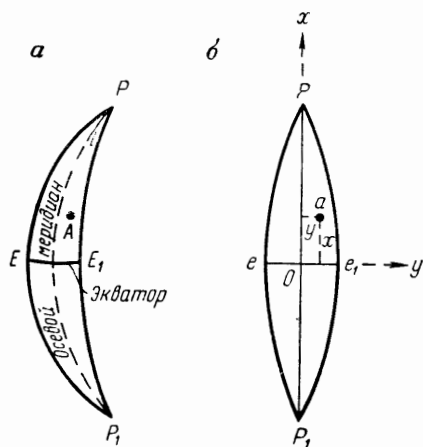


Рис. 72

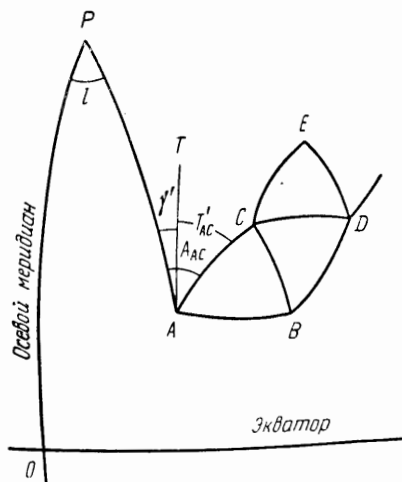


Рис. 73

На рис. 72, б показано изображение данной зоны на плоскости в проекции, кривые  $pep_1$  и  $pe_1p_1$  — изображения граничных меридианов; прямая  $pp_1$  — изображение осевого меридиана, принимаемая за ось абсцисс, и прямая  $ee_1$  — изображение экватора, принимаемая за ось ординат.

Если  $a$  — изображение точки  $A$  на плоскости, то ее положение определяется показанными на рис. 72 прямоугольными плоскими координатами  $x$  и  $y$ .

Проекция Гаусса — Крюгера конформна. Понятие об условиях и свойствах конформного изображения одной поверхности на другую дано в § 28 главы IV. Напомним основные условия и свойства конформного изображения: бесконечно малый контур на эллипсоиде изображается подобным ему на плоскости; угловые искажения отсутствуют; масштаб изображения в каждой точке зависит только от координат данной точки и не зависит от направления.

В проекции Гаусса — Крюгера поверхность шести- или трехградусной зоны изображается с заметными искажениями, но достоинство проекции — сравнительная простота и высокая точность учета искажений в пределах шестиградусной зоны, чем и обусловлен выбор этой проекции в геодезии.

Пусть на эллипсоиде (рис. 73) дана некоторая триангуляция, состоящая из треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDE$ ;  $PO$  — осевой меридиан зоны, в которой расположена данная триангуляция. Пусть долгота этого осевого меридиана  $L_0$ ;  $AP$  — меридиан, проходящий через точку  $A$ ;  $AT$  — касательная к эллипсоиду и параллельная плоскости осевого меридиана.

Угол между направлением меридиана  $AP$  и касательной  $AT$  называется геодезическим сближением меридианов в  $A$  и обозначается буквой  $\gamma'$ . Угол в  $A$  между направлением меридиана  $AP$  и геодезической линией  $AC$  есть азимут стороны  $AC$ ; обозначим его через  $A_{AC}$ ; угол в  $A$  между направлением касательной  $AT$  и направлением  $AC$  есть геодезический дирекционный угол; обозначим его через  $T'_{AC}$ . Очевидно, для эллипсоида получится равенство

$$A_{AC} = T'_{AC} + \gamma'. \quad (36.1)$$

Пусть на плоскости (рис. 74) в проекции Гаусса — Крюгера изображение тех же элементов будет: точка  $a$  — изображение точки  $A$ ; линия  $op$  — изображение осевого меридиана  $OP$ ; кривая  $an$  — изображение меридиана, проходящего

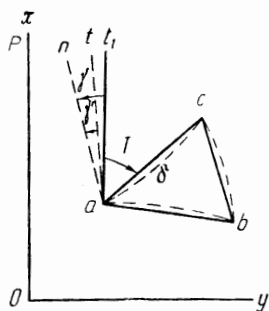


Рис. 74

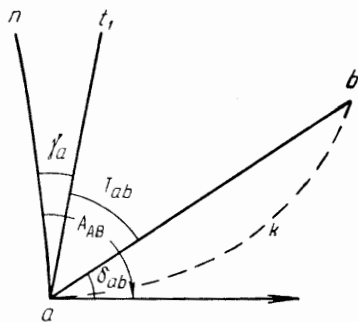


Рис. 75

через точку  $A$ ; кривая  $at$  — изображение касательной  $AT$ ; точки  $b$  и  $c$  — соответственно изображения точек  $B$  и  $C$ ; кривые  $ab$ ,  $ac$ ,  $cb$  ... — изображения геодезических линий  $AB$ ,  $AC$ ,  $CB$  и т. д.

Так как проекция конформна, то углы между изображениями линий эллипсоида на плоскости не искажутся и будут соответственно равны  $A_{AC}$ ,  $T'_{AC}$ ,  $\gamma'$ .

Проведем через точку  $a$  линию, параллельную изображению осевого меридиана, т. е. оси абсцисс; обозначим ее через  $at_1$ . Угол между кривой, изображающей меридиан точки  $a$ , т. е.  $an$ , и этой прямой, параллельной оси абсцисс, называется сближением меридианов на плоскости и обозначается буквой  $\gamma$ .

Вследствие конформности проекции углы треугольников триангуляции также перенесутся с эллипсоида на плоскость без искажений, но эти углы, перенесенные на плоскость, относятся к треугольникам, соединенным кривыми  $ab$ ,  $ac$ ,  $cb$  и т. д., что практически неудобно. Для последующих вычислений соединим точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с прямыми линиями — хордами. Тогда триангуляция на плоскости представится сетью плоских прямоугольных треугольников; решение треугольников и другие вычисления можно производить по формулам прямолинейной тригонометрии. Но для этого необходимо осуществить переход от углов между изображениями на плоскости геодезических линий, являющимися кривыми, к углам, образованным прямыми линиями, соединяющими точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Иначе говоря, для каждой стороны триангуляции, точнее для каждого направления, должна быть определена поправка, представляющая собой малый угол между кривой, изображающей геодезическую линию на плоскости, и хордой. Если кривая  $akb$  (рис. 75) — изображение стороны  $AB$  на плоскости,

а  $ab$  — хорда, соединяющая точки  $a$  и  $b$ , то угол между направлением кривой  $akb$  (т. е. касательной к ней в точке  $a$ ) и прямой  $ab$  будет искомой поправкой, называемой поправкой за кривизну изображения геодезической линии на плоскости и обозначаемой буквой  $\delta$ . Эти поправки и вводятся в измеренные направления для образования на плоскости треугольников с прямолинейными сторонами.

Вследствие малой кривизны линии  $akb$  эти редукции малы и их вычисление, как увидим далее, не представляет особого труда; при работах малой точности ими можно пренебрегать. Угол между прямой  $at_1$ , параллельной оси абсцисс, и хордой  $ab$  называется дирекционным углом на плоскости и обозначается через  $T$ .

Из рис. 75 легко получается формула для перехода от геодезического азимута к дирекционному углу хорды на плоскости

$$T_{ab} = A_{AB} - \gamma_a - \delta_{ab}. \quad (36.2)$$

Далее будет доказано, что различие в длинах кривой  $akb$  и хорды  $ab$  всегда пренебрегаемо мало.

Пусть на эллипсоиде исходной стороной триангуляции будет  $AB$ . Длину геодезической линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , обозначим  $s_0$ . Очевидно, при переходе на плоскость расстояние между точками  $a$  и  $b$  не будет равно  $s_0$  вследствие искажений проекции. Для перехода от расстояния  $AB = s_0$  к расстоянию на плоскости между точками  $a$  и  $b$  необходимо ввести поправку, называемую редукцией расстояний.

Числовые величины поправок за кривизну изображения геодезической линии на плоскости и редукции расстояний по мере удаления от осевого меридиана возрастают. Следовательно, для вычисления указанных поправок необходимо знать координаты вершин треугольников, причем вследствие малости поправок эти координаты достаточно знать приближенно.

Изложенные сведения позволяют установить следующий порядок действий для перехода с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера, если исходными данными являются длина  $s_0$ , азимут  $A$  выходной стороны триангуляции и геодезические координаты  $B$  и  $L$  одного из начальных ее пунктов.

1. Переход от геодезических координат — широты  $B$  и долготы  $L$  начального пункта — к прямоугольным координатам  $x$  и  $y$  этого же пункта в проекции Гаусса — Крюгера и вычисление для этого же пункта сближения меридианов на плоскости, позволяющего получить приближенное значение дирекционного угла исходной стороны по формуле

$$T' = A - \gamma. \quad (36.3)$$

2. Приближенное вычисление сторон треугольников и предварительных координат их вершин с использованием вычисленных координат исходного пункта  $x$  и  $y$  и приближенного значения дирекционного угла, полученного по формуле (36.3).

3. Вычисление редукции длины исходной стороны за переход с эллипсоида на плоскость и поправок за кривизну изображения геодезической линии на плоскости для каждого измеренного направления в триангуляции\*.

\* Изложенный порядок вычислений применяется при обработке результатов наблюдений в триангуляции 2 класса; в триангуляции 1 класса вычисление поправок производят двумя приближениями. В первом приближении поправки выбирают из таблиц, а аргументы — значения ординат и разности абсцисс — определяют по чертежу сети.

Вводя в длину исходной стороны и в измеренные направления эти поправки, получаем длину и дирекционный угол исходной стороны и направления, редуцированные на плоскость. После выполнения этих вычислений сеть становится подготовленной к уравниванию и окончательному вычислению координат пунктов на плоскости.

4. Уравнивание триангуляции на плоскости; по уравненным углам окончательное вычисление сторон треугольников и окончательных прямоугольных координат всех пунктов триангуляции.

Систему прямоугольных координат Гаусса — Крюгера ввели в СССР в 1930 г. В связи с увеличением объема топографо-геодезических работ возникла необходимость иметь координаты опорной геодезической сети в прямоугольной системе, причем единообразно выбранной. Плоские прямоугольные координаты применялись и до указанного времени; в землеустройстве — координаты Зольднера при частных началах координат в различных районах; в крупных маркшейдерских геодезических сетях — свои системы координат при самостоятельно выбранных началах (например, системы координат Баумана в триангуляции Донбасса). Естественно, такой разноречивой в применении системы плоских прямоугольных координат затруднял использование материалов топографо-геодезических работ в общих целях, создавал неудобства при съемках на граничных линиях районов, имеющих свои системы координат, вызывал необходимость различного рода перевычислений.

В связи с этим третье геодезическое совещание при Госплане СССР в 1928 г. вынесло решение о необходимости введения системы координат Гаусса — Крюгера, установило шестиградусную ширину зон по долготе, определило положение осевых меридианов каждой зоны (как это указано выше) и наметило мероприятия для введения новой системы координат.

В 1930 г. были изданы составленные под руководством Ф. Н. Красовского «Руководство, формулы и таблицы по применению прямоугольных координат Гаусса — Крюгера», что и способствовало введению этой системы координат в практику геодезических работ. После этого координаты Гаусса — Крюгера получили в СССР всеобщее распространение, и в настоящее время во всех каталогах геодезических пунктов обязательно помещают плоские прямоугольные координаты в этой системе.

Искажение длин на краю шестиградусной зоны может достигать величины порядка  $\frac{1}{1500} - \frac{1}{2000}$ , поэтому при топографических съемках мелкого и среднего масштабов — 1 : 100 000, 1 : 50 000 — эти искажения во взаимном положении точек при съемках не ощущаются. Учитывать эти искажения необходимо при постановке топографических работ указанных масштабов лишь при развитии съемочного обоснования в виде малых триангуляций, теодолитных ходов и т. п. Измеренные длины линий исправляют путем введения поправок, выбираемых из специальных таблиц.

При крупномасштабных съемках, если они к тому же производятся не графическим, а числовым методом, в пределах небольших участков изменение масштаба становится заметным и его нельзя считать постоянным даже при небольших расстояниях (20—50 км) от осевого меридиана. При проектировании по карте или перенесении проектов в натуру графическая точность масштаба карты и установленные допуски требуют учета размеров искажения. Значительно больший объем непосредственных измерений, требующих учета искажений с большой точностью, не позволяет применять шестиградусную зону для съемок крупного масштаба без того, чтобы не осложнить производство съемок

и использование их результатов. Поэтому наиболее просто и практически удобно в такого рода работах не применять шестиградусные зоны. Для примера приведем описание применения этой системы координат в городских геодезических работах.

Известно, что городские съемки, ведущиеся, как правило, числовыми методами, включают создание топографических планов масштабов от 1 : 5000 до 1 : 2000 и крупнее. При этом целесообразно применять систему координат в следующем общем плане.

В качестве исходного принимают пункт городской триангуляции 1 класса, расположенный, по возможности, посередине города и являющийся в то же время пунктом государственной триангуляции или имеющий с последней наиболее надежную и короткую связь. Меридиан, проходящий через этот пункт, принимается за осевой. Этим достигается то, что все пункты городской опорной геодезической сети располагаются в непосредственной близости от осевого меридиана, поэтому искажения проекции, а следовательно, и поправки малы; это позволяет пренебрегать ими, а в особо точных работах учитывать не по полным формулам. Следовательно, опорная сеть при таком выборе осевого меридиана будет редуцирована на плоскость с минимальными искажениями, в большинстве случаев пренебрегаемыми. Для обеспечения близости в значениях координат между этой местной системой координат и общегосударственной шестиградусной системой, для окончательного вычисления координат пунктов следует брать те координаты начального пункта, которые заданы из государственной триангуляции. С этой же целью следует ориентировать городскую триангуляцию по дирекционному углу одного из направлений с местного исходного пункта, но отнесенному к осевому меридиану общегосударственной шестиградусной зоны. Различия в значениях координат, вычисленных в общегосударственной и местной системах, будут независимо от порядка их вычислений, так как базисы городских триангуляций приходится редуцировать на среднюю уровенную поверхность города. Но при таком выборе и порядке вычисления координат, который описан, неизбежные различия между значениями координат, вычисленными в общегосударственной и местной системах, будут минимальными, а материалы топографических съемок масштаба 1 : 5000 легко могут быть использованы для государственного картографирования.

Этот пример показывает, как можно применить проекцию Гаусса — Крюгера на отдельном участке территории, на котором производят точные съемки крупного масштаба и который используется под строительство разнообразных инженерных сооружений.

Целесообразно применять шестиградусные зоны для вычисления координат государственных триангуляций, если сплошные топографические съемки государственного значения ставятся в масштабе 1 : 100 000 и 1 : 50 000. В настоящее время приступили к сплошным аэрофототопографическим съемкам в масштабах 1 : 25 000, 1 : 10 000 и 1 : 5000. Для съемок в этих масштабах искажения при применении шестиградусных зон получаются значительными. Для районов этих съемок целесообразно применять трехградусные зоны.

### § 37. Основные формулы

Перейдем к выводу основных формул проекции Гаусса — Крюгера. Задача заключается в определении функций  $f_1$  и  $f_2$  из уравнений (35.1)

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \quad (37.1)$$

Исходные условия для получения этих функций: а) конформность проекции, б) выбор зон и осей координат описанным выше способом, в) изображение осевого меридиана и экватора на плоскости прямыми линиями, г) масштаб изображения по осевому меридиану равен единице.

Пусть на рис. 76:  $OE$  — экватор эллипсоида, а  $PO$  — осевой меридиан. Дана точка  $A$ , имеющая геодезические координаты — широту  $B$  и долготу  $L$ ; точка  $A_1$  расположена на бесконечно малом расстоянии от точки  $A$  в произвольном направлении от нее; координатами точки  $A_1$  будут  $B + dB$  и  $L + dL$ . Через  $X$  назовем длину дуги осевого меридиана от экватора до параллели с широтой  $B$ .

Пусть прямые  $Ox$  и  $Oy$  — ось абсцисс и ось ординат соответственно (рис. 77), расположенные перпендикулярно одна к другой, суть изображения экватора

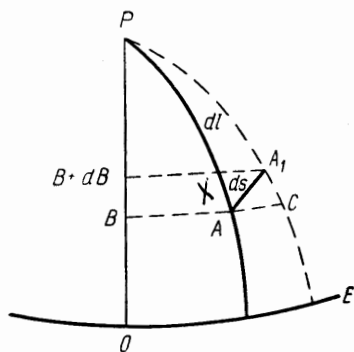


Рис. 76

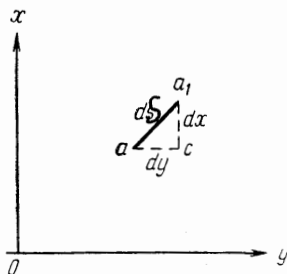


Рис. 77

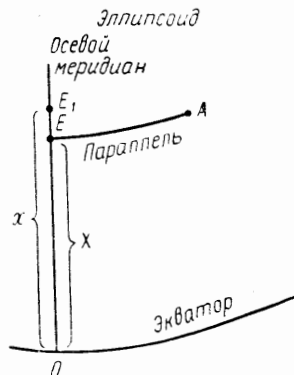


Рис. 78

и осевого меридиана на плоскости. Пусть точка  $a$  — изображение на плоскости точки  $A$ ; точка  $a_1$ , находящаяся на бесконечно малом расстоянии от точки  $a$ , соответствует точке  $A_1$ . Обозначим прямоугольные координаты точки  $a$  на плоскости через  $x$  и  $y$ , а точки  $a_1$  — через  $x + dx$  и  $y + dy$ . Обозначим расстояние  $AA_1$  (рис. 76) на эллипсоиде через  $ds$ , а расстояние  $aa_1$  на плоскости — через  $dS$ . Построим вспомогательный треугольник  $AA_1C$  и будем рассматривать его как элементарный, тогда найдем, что  $A_1C$  равно элементу дуги меридиана  $M dB$ ,  $AC$  — элементу дуги параллели  $N \cos B dL$ .

Отсюда

$$ds = \sqrt{(M dB)^2 + (N \cos B dL)^2},$$

или

$$ds = N \cos B \sqrt{\left(\frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B}\right)^2 + (dL)^2}. \quad (37.2)$$

Введем обозначение

$$\frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B} = dq,$$

тогда

$$ds = N \cos B \sqrt{(dq)^2 + (dL)^2}. \quad (37.3)$$

Для плоскости

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (37.4)$$

Масштаб изображения выразится так:

$$m = \frac{dS}{ds},$$

или

$$m = \frac{V(dx)^2 + (dy)^2}{N \cos B V(dq)^2 + (dl)^2}. \quad (37.5)$$

Перепишем уравнение (37.5) в виде

$$m^2 = \frac{(dx + i dy)(dx - i dy)}{N^2 \cos^2 B (dq + i dl)(dq - i dl)}, \quad (37.6)$$

где

$$i = \sqrt{-1}.$$

Уравнение (37.6) выражает масштаб изображения для произвольного закона изображения. Для обеспечения конформности изображения масштаб  $m$  по всем направлениям должен быть одинаков и зависеть только от координат данной точки, но не от направления элемента  $ds$ . Следовательно, вид функции, определяющий зависимость между координатами на плоскости и геодезическими координатами на эллипсоиде, должен быть таков, чтобы выражение (37.6) для масштаба не зависело от отношения дифференциалов  $\frac{dy}{dx}$  или  $\frac{dq}{dl}$ , которые определяют направление отрезков  $dS$  или  $ds$ .

В теории функции комплексного переменного доказывается, что  $P + iQ$  только тогда является аналитической функцией комплексного переменного  $p + iq$ , когда  $\frac{d(P + iQ)}{d(p + iq)}$  не зависит от  $\frac{dp}{dq}$ ; наоборот, чтобы  $\frac{d(P + iQ)}{d(p + iq)}$  не зависело от  $\frac{dp}{dq}$ , необходимо, чтобы  $P + iQ$  было аналитической функцией комплексного переменного  $p + iq$ . Имея это в виду, переписываем уравнение (37.6) так:

$$m^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 B} \frac{d(x + iy)}{d(q + il)} \frac{d(x - iy)}{d(q - il)}. \quad (37.7)$$

Согласно изложенному выше свойству функций комплексного переменного, для того чтобы масштаб изображения не зависел от направления отрезка  $ds$  или от  $\frac{dq}{dl}$ , необходимо, чтобы  $x + iy$  было некоторой аналитической функцией от  $q + il$  или  $x - iy$  — аналитической функцией от  $(q - il)$ , т. е. чтобы

$$x + iy = f(q + il). \quad (37.8)$$

Справедливость и достаточность последнего условия можно еще доказать следующим образом. Если имеет место условие (37.8), то

$$\frac{d(x + iy)}{d(q + il)} = f'(q + il). \quad (37.9)$$

Заменяя в (37.8)  $+i$  на  $-i$ , получим:

$$x - iy = f(q - il) \quad (37.10)$$

и

$$\frac{d(x - iy)}{d(q - il)} = f'(q - il). \quad (37.11)$$

Следовательно, выражение (37.11) имеет место, если поставлено условие (37.8). На основании формул (37.9) и (37.11) выражение (37.7) примет вид

$$m^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 B} = f'(q + il) f'(q - il). \quad (37.12)$$



Производные  $f'(q + il)$  и  $f'(q - il)$  при наличии условий (37.8) и (37.10) зависят только от координат  $x, y$  или  $q, l$ , но не зависят от их дифференциалов, поэтому не зависят от них и выражения (37.12) и (37.7), что и требовалось доказать.

Условие (37.8) обеспечит конформность изображения при любом произвольном виде аналитической функции  $f$ .

Для получения конформного изображения эллипсоида на плоскости по Гауссу вид функции  $f$  определяют путем введения следующих дополнительных условий:

1) осевой меридиан  $OP$  (рис. 78) эллипсоида изображается на плоскости прямой, являющейся осью абсцисс; следовательно, в уравнении (37.8) при  $l = 0$  ординаты  $y$  должны быть равны нулю;

2) для точек осевого меридиана абсциссы  $x$  должны быть равны соответствующим дугам  $X$ , т. е. дугам меридиана от экватора до данной точки с широтой  $B$ .

Отсюда в уравнении (37.8) при  $y = 0$

$$x = f(q) = X. \quad (37.13)$$

Разложим  $f(q + il)$  в ряд Тейлора, предполагая, что величина  $il$  сравнительно невелика. Будем иметь

$$f(q + il) = f(q) + il \frac{df(q)}{dq} + \frac{1}{2} (il)^2 \frac{d^2f(q)}{dq^2} + \frac{1}{6} (il)^3 \frac{d^3f(q)}{dq^3} + \dots$$

или

$$\begin{aligned} x + iy = X + il \frac{df(q)}{dq} - \frac{1}{2} l^2 \frac{d^2f(q)}{dq^2} - \frac{1}{6} il^3 \frac{d^3f(q)}{dq^3} + \\ + \frac{1}{24} l^4 \frac{d^4f(q)}{dq^4} + \frac{1}{120} il^5 \frac{d^5f(q)}{dq^5} - \frac{1}{720} l^6 \frac{d^6f(q)}{dq^6} + \dots \end{aligned} \quad (37.14)$$

Производные в этом ряде должны быть вычислены при  $l = 0$ , вследствие чего они обращаются в производные

$$\frac{dX}{dq}; \quad \frac{d^2X}{dq^2}; \quad \frac{d^3X}{dq^3}; \dots,$$

поэтому

$$\begin{aligned} x + iy = X + il \frac{dX}{dq} - \frac{l^2}{2} \frac{d^2X}{dq^2} - \frac{il^3}{6} \frac{d^3X}{dq^3} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4X}{dq^4} + \\ + \frac{il^5}{120} \frac{d^5X}{dq^5} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6X}{dq^6} + \dots \end{aligned} \quad (37.15)$$

Приравнявая порознь действительные и мнимые части в полученном выражении, находим в общем виде основные уравнения, определяющие закон изображения точек эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса:

$$x = X - \frac{l^2}{2} \frac{d^2X}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4X}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6X}{dq^6} + \dots, \quad (37.16)$$

$$y = l \frac{dX}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3X}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5X}{dq^5} - \dots \quad (37.17)$$

Очевидно, чем больше  $l$ , тем больше должно быть удержано членов в уравнениях (37.16) и (37.17), т. е. чем больше будут искажения на краях зоны, тем учет этих искажений сложнее.

Как указывалось выше, в настоящее время наибольшая протяженность зон по долготе принята  $6^\circ$ . Таким образом, удаление пунктов от осевого меридиана по долготе не превосходит  $3^\circ$ , поэтому следующие рабочие формулы для вычислений при применении проекции Гаусса — Крюгера и рассчитаны на интервал в долготе  $l \leq 3^\circ$ .

### § 38. Формулы для определения конформных плоских координат $x$ и $y$ по геодезическим координатам $B$ и $L$

Вывод рабочих формул для вычисления координат Гаусса — Крюгера по геодезическим координатам, очевидно, сводится к нахождению производных  $\frac{d^2 X}{dq^2}$  и подстановке найденных их значений в уравнения (37.16) и (37.17).

Введем обозначения:

$$c = \frac{a^2}{b}; \quad \operatorname{tg} B = t; \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B; \quad 1 + \eta^2 = V^2. \quad (38.1)$$

Так как  $dX$  — дифференциал дуги меридиана, то

$$dX = M dB,$$

или, согласно (5.9),

$$dX = \frac{c}{V^3} dB. \quad (38.2)$$

При выводе основных формул проекции мы обозначили

$$dq = \frac{M}{N} \frac{dB}{\cos B},$$

или, учитывая формулы (5.9) и (5.10), можно написать

$$dq = \frac{dB}{V^2 \cos B}. \quad (38.3)$$

Получаем выражение для первой производной

$$\frac{dX}{dq} = \frac{c}{V} \cos B. \quad (38.4)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, пишем в общем виде выражение для второй производной

$$\frac{d^2 X}{dq^2} = \frac{d^2 X}{dq dB} \frac{dB}{dq}. \quad (38.5)$$

Дифференцируем (38.4) по  $B$ , имея в виду, что  $V$  есть функция  $B$ ,

$$\frac{d^2 X}{dq dB} = -\frac{c}{V^2} \frac{dV}{dB} \cos B - \frac{c}{V} \sin B. \quad (38.6)$$

Для нахождения  $\frac{dV}{dB}$  дифференцируем формулу  $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B$ :

$$2V dV = -2e'^2 \cos B \sin B dB,$$

$$V dV = -e'^2 \cos^2 B \operatorname{tg} B dB,$$

или

$$\frac{dV}{dB} = -\frac{\eta^2}{V} t. \quad (38.7)$$

Подставляя последнее выражение в (38.6), получаем

$$\frac{d^2 X}{dq dB} = \frac{c}{V^3} \eta^2 t \cos B - \frac{c}{V} \sin B = -\frac{c}{V^3} \sin B.$$

Так как из формулы (38.3)  $\frac{dB}{dq} = V^2 \cos B$ , то на основании формулы (38.5) получаем вторую производную

$$\frac{d^2 X}{dq^2} = -\frac{c}{2} \frac{\sin 2B}{V}. \quad (38.8)$$

Имея в виду, что  $\frac{c}{V} = N$ , значения первой и второй производных напомним так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dq} &= N \cos B \\ \frac{d^2 X}{dq^2} &= -\frac{N}{2} \sin 2B \end{aligned} \right\}. \quad (38.9)$$

Пользуясь формулами (37.16), (37.17) и (38.9), находим главные члены выражений для  $x$  и  $y$  как функций геодезических координат:

$$\left. \begin{aligned} x &= X + \frac{N}{2\rho''^2} l''^2 \sin B \cos B + \dots \\ y &= \frac{l''}{\rho''} N \cos B + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (38.10)$$

Выражения (38.10) для  $x$  и  $y$ , полученные без учета второго и последующих членов рядов (37.16) и (37.17), для точных вычислений непригодны. Для получения формул, позволяющих вести вычисления требуемой в триангуляции точности, необходимо вычислить производные  $\frac{d^n X}{dq^n}$  до шестого порядка включительно и после подстановки их значений в формулы (37.16) и (37.17) получить выражения для  $x$  и  $y$ .

Не приводя выкладок, связанных с получением указанных производных высшего порядка, и последующих преобразований при подстановке этих производных в (37.16) и (37.17), напомним окончательный результат

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \sin B \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{12\rho''^2} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{360\rho''^4} (61 - 58t^2 + t^4) \right\}, \end{aligned} \quad (38.11)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{l''}{\rho''} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l''^2 \cos^2 B}{6\rho''^2} (1 - t^2 + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l''^4 \cos^4 B}{120\rho''^4} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) \right\}. \end{aligned} \quad (38.12)$$

### § 39. Формулы для вычисления геодезических координат по координатам Гаусса — Крюгера

Вывод настоящих формул дадим по методу, предложенному Г. В. Багратуни\*.

Решая уравнения в общем виде относительно  $q + il$  и  $q - il$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} q + il &= F(x + iy) \\ q - il &= F(x - iy) \end{aligned} \right\} \quad (39.1)$$

Применяя ряд Тейлора к (39.1), находим

$$\begin{aligned} q + il &= F(x + iy) = F(x) + iyF^{\text{I}}(x) - \frac{y^2}{2}F^{\text{II}}(x) - \\ &\quad - \frac{iy^3}{6}F^{\text{III}}(x) + \frac{y^4}{24}F^{\text{IV}}(x) + \dots \\ q - il &= F(x - iy) = F(x) - iyF^{\text{I}}(x) - \frac{y^2}{2}F^{\text{II}}(x) + \\ &\quad + \frac{iy^3}{6}F^{\text{III}}(x) + \frac{y^4}{24}F^{\text{IV}}(x) + \dots \end{aligned} \quad (39.2)$$

Беря полусумму и полуразность выражений (39.2), получаем

$$q = F(x) - \frac{y^2}{2}F^{\text{II}}(x) + \frac{y^4}{24}F^{\text{IV}}(x) - \dots, \quad (39.3)$$

$$l = yF^{\text{I}}(x) - \frac{y^3}{6}F^{\text{III}}(x) + \dots \quad (39.4)$$

Выражения (39.3) и (39.4) вытекают из условия конформности проекции с эллипсоида на плоскость.

Для вычисления рядов (39.3) и (39.4) по-прежнему вводим условия проекции Гаусса — Крюгера плоскости на эллипсоид:

1) при  $y = 0$  должно быть  $l = 0$  и 2)  $F(x) = q_1$ .

На рис. 79 заданная абсцисса  $x$  точки  $a$  определяется прямой  $Oe_1$ , которая, согласно данному условию, должна равняться длине дуги меридиана от экватора до некоторой точки  $E_1$  (рис. 78), широту которой обозначим через  $B_1$ ; следовательно, при  $y = 0$  и  $l = 0$  выражение (39.4) должно обратиться в равенство

$$F(x) = q_1, \quad (39.5)$$

где  $q_1$  вычисляется как функция широты  $B_1$ ; широта  $B_1$  может быть сразу легко получена по  $x$  из таблиц длин дуг меридианов.

Таким образом, формула (39.5) выражает рассматриваемое второе условие проекции Гаусса — Крюгера.



Рис. 79

\* Труды МИИГАиК. Вып. 24, стр. 57—59.

С учетом поставленных условий уравнения (39.3) и (39.4) примут вид:

$$q = q_1 - \frac{y^2}{2} \left( \frac{d^2 q}{dx^2} \right)_1 + \frac{y^4}{24} \left( \frac{d^4 q}{dx^4} \right)_1, \quad (39.6)$$

$$l = y \left( \frac{dq}{dx} \right)_1 - \frac{y^3}{6} \left( \frac{d^3 q}{dx^3} \right)_1. \quad (39.7)$$

Далее вспомним, что

$$dq = \frac{M dB}{N \cos B}$$

и

$$q = \int \frac{M dB}{N \cos B}.$$

На основании последнего в общем виде можем написать

$$B = \varphi(q) = \varphi[q_1 + (q - q_1)], \quad (39.8)$$

$$B_1 = \varphi(q_1).$$

Применяя ряд Тейлора и заменяя  $(q - q_1)$ , на основании (39.6) получаем

$$B = B_1 - \left[ \frac{y^2}{2} \left( \frac{d^2 q}{dx^2} \right)_1 - \frac{y^4}{24} \left( \frac{d^4 q}{dx^4} \right)_1 \right] \frac{dB}{dq} \quad (39.9)$$

(при этом учтено, что всегда  $B_1 > B$ ).

Формулы (39.4) и (39.9) в общем виде решают задачу перехода от прямоугольных координат Гаусса — Крюгера к геодезическим.

Для получения рабочих формул находим необходимые производные.

Имеем

$$dq = \frac{M dB}{N \cos B}. \quad (39.10)$$

Имея в виду, что  $dx = M dB$ , получаем

$$\left( \frac{dq}{dx} \right) = \frac{1}{N \cos B}; \quad \left( \frac{dq}{dx} \right)_1 = \frac{1}{N_1 \cos B_1} \quad (39.11)$$

или

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{r}; \quad (39.12)$$

из (39.10)

$$\left( \frac{dB}{dq} \right)_1 = \frac{N_1 \cos B_1}{M_1}. \quad (39.13)$$

Переходим к вычислению вторых производных

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = \frac{d}{dB} \left( \frac{dq}{dx} \right) \frac{dB}{dx} = \frac{d^2 q}{dB dx} \frac{dB}{dx}, \quad (39.14)$$

$$\frac{d}{dB} \left( \frac{dq}{dx} \right) = \frac{d}{dB} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dB}. \quad (39.15)$$

Вычисляем  $\frac{dr}{dB}$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dB} &= \frac{d}{dB} (N \cos B) = -N \sin B + \cos B \frac{d}{dB} [a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}] = \\ &= -N \sin B + \cos B \left[ \frac{ae^2 \sin B \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \right], \end{aligned}$$

откуда после простых преобразований получаем

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B. \quad (39.16)$$

Следовательно,

$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{1}{r^2} M \sin B \frac{1}{M} - \frac{\sin B}{r^2}$$

или

$$\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right)_1 = \frac{\sin B_1}{r_1^2} = \frac{\sin B_1}{N_1^2 \cos^2 B_1} = \frac{t_1}{N_1^2 \cos B_1}$$

Принимая во внимание (39.14), (39.13) и (39.16), искомые выражения (39.7), (39.9) для координат  $B$  и  $l$  приближенно напишем так:

$$l = \frac{y}{N_1 \cos B_1} - \dots$$

$$B = B_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1 M_1} + \dots \quad (39.17)$$

Вычисляя в выражениях (39.7) и (39.9) производные высшего порядка, получаем формулы, удовлетворяющие по точности все случаи практики.

Опустив вычисления этих производных и последующие преобразования, напишем точные формулы в окончательном виде:

$$l'' = \frac{y}{N_1 \cos B_1} \rho'' \left[ 1 - \frac{y^2}{6 N_1^2} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{y^4}{120 N_1^4} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) \right], \quad (39.18)$$

$$B = B_1 - \frac{y^2}{2 M_1 N_1} t_1 \rho'' \left[ 1 - \frac{y^2}{12 N_1^2} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{y^4}{360 N_1^4} (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) \right]. \quad (39.19)$$

#### § 40. Формулы для вычисления сближения меридианов на плоскости

Сближение меридианов может быть выражено в функции геодезических координат и в функции прямоугольных координат.

1. Сближение меридианов на плоскости в функции геодезических координат. Пусть точка  $a$  (рис. 80) — изображение на плоскости точки  $A$  эллипсоида;  $ns$  — изображение на плоскости меридиана, проходящего через точку  $A$ ;  $aw$  — изображение на плоскости параллели, проходящей через ту же точку  $A$ ;  $ab$  — прямая на плоскости, параллельная оси абсцисс;  $ae$  — прямая, параллельная оси ординат;  $\gamma$  — сближение меридианов на плоскости, равное углу при точке  $a$  между прямой  $ab$  и кривой  $an$ .

Очевидно, угол равен также углу между изображением параллели  $aw$  и прямой  $ae$ . Возьмем на изображении параллели  $aw$  точку  $a_1$ , бесконечно

близкую к точке  $a$ . Разности координат точек  $a$  и  $a_1$  будут равны  $dx$  и  $dy$ . Из элементарного треугольника  $aa_1a_2$  (рис. 81) имеем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy}, \quad (40.1)$$

причем  $\frac{dx}{dy}$  находится из уравнения кривой  $aw$ , для которой, как для дуги параллели, широта  $B$  должна быть принята постоянной величиной (можно взять элементарный треугольник, используя элементы кривой  $an$  и прямой  $ab$ ; однако это невыгодно, так как в этом случае широту  $B$  нельзя считать постоянной величиной, что усложнило бы последующее дифференцирование).

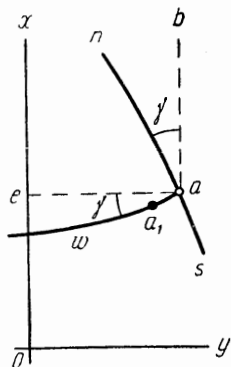


Рис. 80

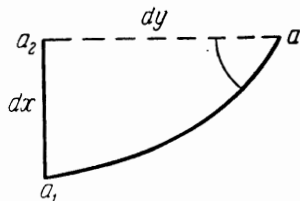


Рис. 81

Уравнение (40.1) можно переписать так:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{dx}{dl}}{\frac{dy}{dl}}. \quad (40.2)$$

Производные  $\frac{dx}{dl}$  и  $\frac{dy}{dl}$  найдем путем дифференцирования выражений (38.11) и (38.12). Из (38.11) с ошибками на величины второго порядка имеем

$$\frac{dx}{dl} = \frac{l'' N \sin B \cos B}{\rho''^2}$$

и из (38.12)

$$\frac{dy}{dl} = \frac{N \cos B}{\rho}.$$

На основании (40.2) с ошибкой на величину третьего порядка

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{l''}{\rho''} \sin B. \quad (40.3)$$

В результате дифференцирования формул (38.11) и (38.12) по  $l$  с учетом всех членов и после подстановки в (40.2) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = & \frac{l'' \sin B}{\rho''} + \frac{l'^3}{3\rho''^3} \sin B \cos^2 B (1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \\ & + \frac{l'^5}{15\rho''^5} \sin B \cos^4 B (2 + 4t^2 + 2t^4). \end{aligned} \quad (40.4)$$

Так как

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 \gamma,$$

то из (40.4) имеем окончательно

$$\gamma'' = l'' \sin B + \frac{l^3}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^5}{15\rho^4} \sin B \cos^4 B (2 - t^2). \quad (40.5)$$

2. Сближение меридианов на плоскости в функции плоских координат. Выражение для сближения меридианов в функции плоских координат получится путем замены в (40.5)  $l$  через прямоугольные координаты и замены аргумента  $B$  через  $B_1$ . Последняя замена осуществляется путем предварительного разложения по строке Тейлора выражений:

$$\begin{aligned} \sin B \quad \sin \{B_1 - (B_1 - B)\} &= \sin B_1 - (B_1 - B) \cos B_1 - \frac{\sin B_1 (B_1 - B)^2}{2} \\ \sin B &= \sin B_1 - \frac{y^2}{2N_1^2} \sin B_1 (1 + \eta_1^2) + \frac{5y^4}{24N_1^4} \sin B_1 \\ \cos^2 B &= \cos^2 B_1 \left(1 + \frac{y^2}{N_1^2} t_1^2\right) \end{aligned} \quad (40.6)$$

После указанных подстановок получим окончательно

$$\gamma'' = \frac{y}{N_1} \rho'' t_1 \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N_1^2} (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4) + \frac{y^4}{N_1^4} \frac{2 + 5t_1^2 + 3t_1^4}{15} \right\} \quad (40.7)$$

или в логарифмическом виде

$$\begin{aligned} \lg \gamma'' &= \lg \frac{y}{N_1} \rho'' t_1 - \frac{\mu y^2}{3N_1^2 \cos^2 B_1} (1 - \eta_1^2 \cos^2 B_1 - 2\eta_1^4 \cos^2 B_1) + \\ &+ \frac{\mu y^4}{90N_1^4 \cos^4 B_1} (13 - 6 \cos^2 B_1). \end{aligned} \quad (40.7')$$

Нетрудно видеть, что главные члены для  $\gamma$  соответствуют разности прямого и обратного азимутов в главной геодезической задаче, если  $y$  заменить через  $\sin A_{1,2}$ .

#### § 41. Формулы для вычисления масштаба изображения

Для получения формул масштаба изображения в функции геодезических координат согласно формулам (37.2) и (37.4) напомним

$$m^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dl^2} = \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{N^2 \cos^2 B \left\{ 1 + \left(\frac{M dB}{N \cos B dl}\right)^2 \right\}}. \quad (41.1)$$

На основании (40.1) будем иметь

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma = \sec^2 \gamma.$$



Для параллели  $\frac{dB}{dl} = 0$ , поэтому (41.1) примет вид

$$m = \frac{dy}{dl} \frac{1}{N \cos B} \sec \gamma. \quad (41.2)$$

Вычисляя производную по  $l$  от выражения (38.12), получаем

$$\frac{dy}{dl} = N \cos B + \frac{N l'^2}{2\rho'^2} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{N l'^4}{24\rho'^4} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4), \quad (41.3)$$

далее

$$\sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5}{24} \gamma^4$$

и

$$\gamma = l'' \sin B + \frac{l'^3 \sin B \cos^2 B}{3\rho'^2} (1 + 3\eta^2). \quad (41.4)$$

После подстановки (41.3), (41.4) в формулу (41.2) получим окончательно

$$m = 1 + \frac{l'^2}{2\rho'^2} \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{l'^4 \cos^4 B}{24\rho'^4} (5 - 4t^2). \quad (41.5)$$

Для выражения масштаба в функции плоских координат подставим в формулу (41.5) значения  $l$  и  $\cos^2 B$  согласно (39.13) и (40.6), тогда получим

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N_1^2} (1 + \eta_1^2) + \frac{y^4}{24N_1^4}. \quad (41.6)$$

Так как  $\frac{1 + \eta_1^2}{N_1^2} = \frac{V_1^2}{N_1^2} = \frac{1}{R_1^2}$ , то формула (41.6) может быть представлена в виде

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R_1^2} + \frac{y^4}{24R_1^4}. \quad (41.7)$$

Имея в виду, что  $\lg(1 + x) = \mu x - \frac{\mu x^2}{2}$ , переписываем в логарифмическом виде формулу (41.7)

$$\lg m = \frac{\mu y^2}{2R_1^2} - \frac{\mu y^4}{12R_1^4}. \quad (41.8)$$

где  $\mu$  — модуль десятичных логарифмов.

#### § 42. Формулы для перехода от расстояний на эллипсоиде к расстояниям на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера

Пусть на плоскости расстояние по прямой между точками  $a$  и  $b$  равно  $S$  (рис. 82), а расстояние между соответственными точками на эллипсоиде, считаемое по геодезической линии, равно  $s$ . Кривая  $ab'b$  есть изображение геодезической линии  $AB$  на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера. Через  $\sigma$  обозначим длину этой кривой, а через  $\nu$  — угол между некоторым элементом  $d\sigma$  кривой  $ab'b$  и хордой  $ab$ . Будем иметь

$$S = \int_0^\sigma \cos \nu d\sigma.$$

Величина  $v$ , как увидим дальше, выше второго порядка; пренебрегая в разложении  $\cos v$  в ряд вторым членом  $-\frac{v^2}{2}$ , допускаем погрешность в  $S-\sigma$  на малую величину выше четвертого порядка, поэтому можем считать

$$S = \sigma. \quad (42.1)$$

Для масштаба изображения имеем

$$m = \frac{dS}{ds}. \quad (42.2)$$

откуда

$$s = \int_0^S \frac{dS}{m}.$$

Имея в виду, что

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{4R^4}.$$

получаем

$$s = \int_0^S \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{4R^4}\right)^{-1} dS. \quad (42.3)$$

Пренебрежем в подынтегральной функции членом  $\frac{y^4}{4R^4}$ ; при значении  $y = 100$  км, т. е. при положении точки на краю трехградусной зоны, это даст погрешность в переносе длины с эллипсоида на плоскость меньше, чем  $\frac{1}{2} \times 10^{-8}$ , поэтому примем

$$s = \int_0^S \left(1 - \frac{y^2}{2R_m^2}\right) dS, \quad (42.4)$$

где  $R_m$  — средний радиус кривизны для средней точки линии  $ab$ , который при интегрировании уравнения (42.4) будем считать постоянным.

Обозначив через  $p$  расстояние элемента  $dS$  от  $a$ , через  $y_1$  — ординату точки  $a$ , а через  $T$  — дирекционный угол линии  $ab$ , будем иметь

$$y = y_1 + p \sin T, \quad (42.5)$$

следовательно,

$$s = \int_{p=0}^{p=S} \left[1 - \frac{(y_1 + p \sin T)^2}{2R_m^2}\right] dp,$$

$$s = \int_0^S \left(1 - \frac{y_1^2 + 2y_1 p \sin T + p^2 \sin^2 T}{2R_m^2}\right) dp,$$

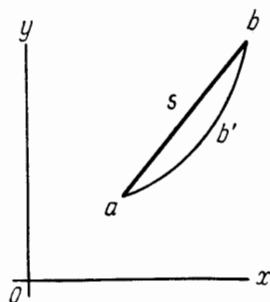


Рис. 82

$$s = \int_0^S \left( p - \frac{y_1^2}{2R_m^2} p - \frac{2y_1 \sin T p^2}{2 \cdot 2R_m^2} - \frac{p^3 \sin^2 T}{6R_m^2} \right), \quad (42.6)$$

$$s = S \left( 1 - \frac{y_1^2}{2R_m^2} - \frac{y_1 \sin TS}{2R_m^2} - \frac{S^2 \sin^2 T}{6R_m^2} \right).$$

Имея в виду, что

$$y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2},$$

где

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ и } \Delta y = y_2 - y_1, \text{ а } \Delta y = S \sin T,$$

получаем

$$s = S \left[ 1 - \frac{\left( y_m - \frac{\Delta y}{2} \right)^2}{2R_m^2} - \frac{\left( y_m - \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta y}{2R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{6R_m^2} \right],$$

$$s = S \left[ 1 - \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{8R_m^2} - \frac{(\Delta y)^2}{6R_m^2} \right].$$

Решая последнее выражение относительно  $S$ , получаем

$$S = s \left( 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2} \right). \quad (42.7)$$

#### § 43. Формулы для вычисления поправок в направления за кривизну изображения геодезической линии на плоскости

В конформной проекции углы и направления переносятся с эллипсоида на плоскость без искажений, но геодезическая линия изображается на плоскости не прямой, а некоторой кривой. Пусть, например, на рис. 83:  $o, i, k$  — изо-

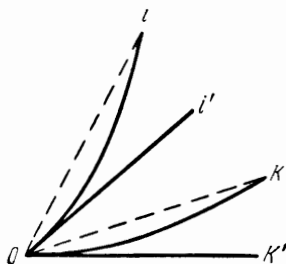


Рис. 83

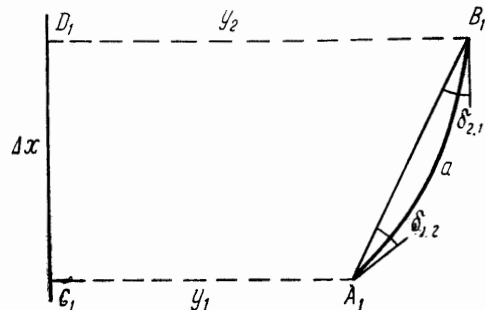


Рис. 84

бражения на плоскости точек  $O, I, K$  поверхности эллипсоида; геодезические линии, соединяющие точку  $o$  с  $i$  и  $k$ , изобразятся кривыми  $oi$  и  $ok$ ; угол между касательными  $ok'$  и  $oi'$  к этим кривым в точке  $o$  будет в точности равен углу между геодезическими линиями  $OK$  и  $OI$  на эллипсоиде. Однако для прак-

тических вычислений необходимо перейти от кривых  $oi$ ,  $ok$ , ... к прямым, соединяющим конечные точки этих кривых. В направления  $ok'$  и  $oi'$  следует ввести поправки, равные углам между касательными к кривым, изображающим геодезические линии на плоскости, и прямыми, соединяющими конечные точки этих кривых. Эти поправки на рис. 83 изображаются углами  $ioi'$  и  $kok'$  и называются поправками за кривизну изображения геодезической линии на плоскости. Они обозначаются через  $\delta_{oi}$ ,  $\delta_{ok}$  и т. д.

Дадим первоначально упрощенный вывод формул для вычисления этих поправок. Пусть на плоскости имеется изображение геодезической линии в виде кривой  $A_1aB_1$  (рис. 84). Углы в точках  $A_1$  и  $B_1$  между касательными к кривой и хордой  $A_1B_1$  обозначим через  $\delta_{1.2}$  и  $\delta_{2.1}$ .

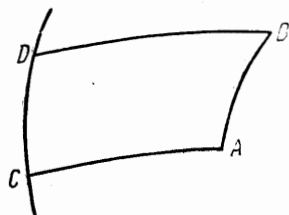


Рис. 85

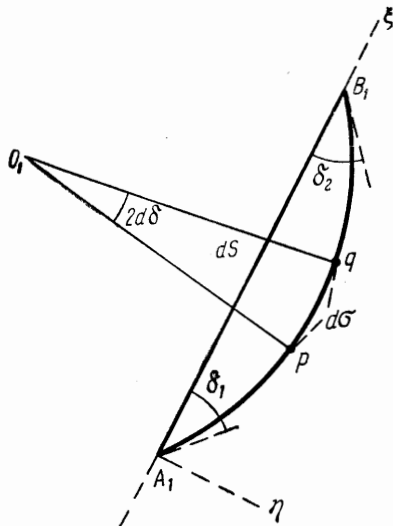


Рис. 86

Координаты точек  $A_1$  и  $B_1$  обозначим через  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ . Если линия  $C_1D_1$  — изображение осевого меридиана, то

$$A_1C_1 = y_1,$$

$$B_1D_1 = y_2.$$

Фигуре  $ABCD$  на эллипсоиде (рис. 85) соответствует фигура  $A_1aB_1C_1D_1$  на плоскости. Сумма углов в фигуре  $ABCD$  на эллипсоиде равна  $360^\circ + \epsilon$ . Сумма углов в фигуре  $A_1aB_1C_1D_1$  на плоскости равна  $360^\circ + \delta_{1.2} + \delta_{2.1}$ .

Вследствие конформности изображения суммы углов обеих фигур должны быть равны, т. е.

$$360^\circ + \epsilon = 360^\circ + \delta_{1.2} + \delta_{2.1},$$

или

$$\epsilon = \delta_{1.2} + \delta_{2.1}.$$

Полагая  $\delta_{1.2} = \delta_{2.1}$  и принимая во внимание, что

$$\epsilon'' = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2R^2} \rho'',$$

\* Выражение  $\frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}$  — площадь трапеции  $A_1B_1C_1D_1$ .

получаем

$$\delta''_{1.2} = \delta''_{2.1} = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4R^2} \rho''.$$

Обозначив

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_m,$$

получим окончательно

$$\delta''_{1.2} = \delta''_{2.1} = \frac{(x_2 - x_1) y_m}{2R^2} \rho'' \quad (43.1)$$

(не принимая во внимание знаков величин  $\delta_{1.2}$ ,  $\delta_{2.1}$  как поправок).

Дадим вывод более точных формул. Пусть  $A_1 a B_1$  (рис. 86) — изображение на плоскости геодезической линии  $AB$ . Возьмем на кривой  $A_1 a B_1$  две точки  $p$  и  $q$ , расположенные на бесконечно малом расстоянии одна от другой и ограничивающие участок  $d\sigma$ . Для этого бесконечно малого участка разность  $x_2 - x_1$  обратится в  $dx$ , а

$$\delta_{1.2} - \delta_{2.1} = d\delta.$$

Пусть  $O_1$  — центр кривизны для участка  $d\sigma$ . Угол  $pO_1q$  будет равен  $2d\delta$ . На основании (43.1) имеем

$$2d\delta = \frac{y dx}{R^2}.$$

Обозначив радиус кривизны кривой  $A_1 a B_1$  через  $\rho$ , напомним из треугольника  $pO_1q$

$$2d\delta\rho = d\sigma,$$

или на основании (42.1)

$$2d\delta\rho = dS, \quad (43.2)$$

где  $dS$  — элемент хорды  $A_1 B_1$ .

Из (43.2) получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2d\delta}{dS} = \frac{y}{R^2} \frac{dx}{dS}. \quad (43.3)$$

Возьмем систему координат с началом в точке  $A_1$ ; ось  $\xi$  направим по хорде  $A_1 B_1$ , а ось  $\eta$  — по направлению, перпендикулярному к ней. Напишем выражение, известное из дифференциальной геометрии, для радиуса кривизны

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (43.4)$$

Величина  $\frac{d\eta}{d\xi}$  — тангенс малого угла между кривой  $A_1 a B_1$  и хордой  $A_1 B_1$ ; квадрат этой величины будет ничтожен по сравнению с единицей, с которой он складывается в выражении для  $\frac{1}{\rho}$ . Поэтому приближенно можно написать

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{d^2\eta}{d\xi^2}. \quad (43.5)$$

На основании формул (43.3) и (43.5) напомним равенство

$$- \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{y dx}{R^2 dS}.$$

Так как ось  $\xi$  направлена по хорде  $A_1B_1$ , то

$$dS = d\xi.$$

Обозначив координаты точек  $A_1$  и  $B_1$  через  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ , а дирекционный угол хорды  $A_1B_1$  — через  $T$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \xi \cos T; & y &= y_1 + \xi \sin T \\ dx &= d\xi \cos T \end{aligned} \right\}. \quad (43.6)$$

Принимая во внимание последние выражения, получаем

$$-\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{y_1 + \xi \sin T}{R^2} \cos T.$$

Интегрируя последнее уравнение и считая  $R$  постоянным, равным  $R_m$ , получаем:

$$-\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{y_1 \cos T}{R_m^2} \xi + \frac{\xi^2}{2R_m^2} \sin T \cos T + C_1, \quad (43.7)$$

$$-\eta = \frac{y_1 \cos T}{2R_m^2} \xi^2 + \frac{\xi^3}{6R_m^2} \sin T \cos T + C_1 \xi + C_2. \quad (43.7')$$

В написанных выражениях  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Определим их. Так как в точке  $A_1$

$$\xi = 0, \quad \eta = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \delta_{1.2} = \delta_{1.2},$$

то из (43.7) находим

$$C_1 = -\delta_{1.2},$$

а из (43.7')

$$C_2 = 0.$$

В точке  $B_1$  ордината  $\eta = 0$ ,  $\xi = S = A_1B_1$ , поэтому из формулы (43.7') имеем

$$0 = \frac{y_1 \cos T}{R_m^2} \frac{S}{2} + \frac{S^2}{6R_m^2} \sin T \cos T - \delta_{1.2},$$

откуда

$$\delta_{1.2} = \frac{y_1 \cos T}{2R_m^2} S + \frac{S^2}{6R_m^2} \sin T \cos T,$$

или, учитывая (43.6), получаем:

$$\delta_{1.2} = \frac{y_1(x_2 - x_1)}{2R_m^2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6R_m^2},$$

$$\delta_{1.2} = \frac{(x_2 - x_1)}{2R_m^2} \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} \right),$$

$$\delta_{1.2}'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} (x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} \right), \quad (43.8)$$

$$\delta_{1.2}'' = \frac{\rho''}{6R_m^2} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2). \quad (43.9)$$

Полученные формулы (43.8) и (43.9) пригодны для вычисления редукций в триангуляции 2 класса.

Для триангуляции 1 класса, при вычислении в системе шестиградусных зон, более точная формула имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1.2}'' &= + \frac{x_2 - x_1}{2R_m^2} \rho'' \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} \right) - \\ &- \frac{\rho''}{6R_m^4} y_m^3 (x_2 - x_1) + \frac{\rho''}{R_m^3} y_m^2 (y_2 - y_1) \eta_m^2 t_m \\ \delta_{2.1}'' &= - \frac{x_2 - x_1}{2R_m^2} \rho'' \left( y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} \right) + \\ &+ \frac{\rho''}{6R_m^4} y_m^3 (x_2 - x_1) - \frac{\rho''}{R_m^3} y_m^2 (y_2 - y_1) \eta_m^2 t_m \end{aligned} \right\}. \quad (43.10)$$

Для триангуляции 3 класса и ниже можно пользоваться формулой

$$\delta_{1.2}'' = - \delta_{2.1}'' = \frac{(x_2 - x_1) y_m}{2R_m^2} \rho''. \quad (43.11)$$

Поправки, получаемые по формулам (43.10) и (43.11), следует вычитать из измеренных направлений (рис. 86).

Для вычисления поправок  $\delta$  координаты пунктов достаточно знать приближенно. Дифференцируя формулу (43.11), находим

$$\Delta \delta'' = \frac{(x_2 - x_1)}{2R_m^2} \rho'' \Delta y_m + \frac{y_m}{2R_m^2} \rho'' \Delta (x_2 - x_1).$$

Обозначив  $\Delta (x_2 - x_1) = \Delta y_m$  через  $\Delta p$ , найдем

$$\Delta \delta'' = \frac{\Delta p}{2R_m^2} \rho'' [y_m + (x_2 - x_1)],$$

откуда

$$\Delta p = \frac{\Delta \delta 2R_m^2}{y_m + (x_2 - x_1)} \frac{1}{\rho''}.$$

Полагая для триангуляции 1 класса  $\Delta \delta = 0,001''$ ;  $y_m = 250$  км;  $x_2 - x_1 = 50$  км, находим, что  $\Delta p \approx 1$  м.

Для триангуляции 2 класса, для которой  $\Delta \delta = 0,01''$ , получим  $\Delta p \approx 10$  м.

Следовательно, приближенное вычисление координат для редуцирования геодезической линии на плоскость необходимо вести с удержанием 0,1 м для триангуляции 1 класса и 1 м — для триангуляции 2 класса. Для триангуляции 3 и 4 классов приближенные координаты достаточно вычислять с округлением до десятков метров; в этом случае приближенные координаты можно определять графически — по точной схеме триангуляции.

#### § 44. Формулы и таблицы для вычисления плоских прямоугольных координат Гаусса — Крюгера

Полученные основные формулы проекции Гаусса — Крюгера для числового решения задач, возникающих при применении этой проекции в геодезии, громоздки и сложны. Непосредственное их использование без применения

вспомогательных вычислительных средств в виде специальных таблиц потребовало бы выполнения больших и сложных вычислений. Поэтому наличие рационально составленных таблиц, соответствующих удобным для вычислений формулам, имеет исключительно важное значение для практики геодезических вычислений вообще и для вычисления координат Гаусса — Крюгера в частности.

Одни и те же по существу формулы могут быть путем преобразований приведены к разнообразной внешней форме, поэтому для решения одной и той же задачи с заданной точностью можно предложить различные формулы и различные таблицы.

При преобразовании формул для практических вычислений и составлении таблиц стремятся обеспечить заданную точность вычислений при минимальном количестве вычислительных действий, простоте и удобстве вычислений. После введения в СССР системы координат Гаусса — Крюгера (1930 г.) были предложены формулы различного вида для вычисления и составлены соответствующие таблицы. Наибольшее распространение получили таблицы, составленные инженерами Д. А. Лариным и В. И. Звоновым под руководством проф. Ф. Н. Красовского.

В связи с переходом в 1942 г. в геодезических работах СССР от эллипсоида Бесселя к эллипсоиду Красовского все ранее составленные таблицы потеряли практическое значение. Главным управлением геодезии и картографии были составлены и изданы новые таблицы для вычисления координат Гаусса — Крюгера с использованием размеров эллипсоида Красовского:

1) Ф. Н. Красовский и А. А. Изотов — «Таблицы для логарифмического вычисления координат Гаусса — Крюгера для широт от 30 до 80°» (М., Геодезиздат, 1946);

2) «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°», составленные под руководством Д. А. Ларина (М., Геодезиздат, 1958);

3) «Таблицы координат Гаусса — Крюгера для широт от 32 до 80° через 5' и для долгот от 0 до 3 $\frac{1}{2}$ ° через 7 $\frac{1}{2}$ ' и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок», составленные под руководством проф. А. М. Вировца (М., Геодезиздат, 1947).

При составлении перечисленных таблиц исходными служили формулы, полученные в предыдущих параграфах. Однако рекомендуемые в этих таблицах рабочие формулы, метод и порядок вычислений различны, поэтому рассмотрим указанные таблицы.

Таблицы Ф. Н. Красовского и А. А. Изотова предназначены для вычислений при помощи логарифмов. В этих таблицах рекомендуется два вида формул: для вычисления координат точки, удаленной от осевого меридиана по долготе менее чем на 1°30', и формулы для вычисления координат точки, удаленной от осевого меридиана по долготе в пределах от 1°30' до 3°30'.

При помощи таблиц вычисляют:

а) плоские прямоугольные координаты, сближение меридианов и масштаб изображения по геодезическим координатам;

б) геодезические координаты, сближение меридианов и масштаб изображения по данным прямоугольным координатам;

в) редукции горизонтальных направлений за кривизну изображения геодезической линии на плоскости;

г) редукции расстояний за переход с эллипсоида на плоскость.



II. «Таблицы для вычислений плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°», составленные на Предприятии № 7 под руководством инж. Д. А. Ларина, предназначены для нелогарифмического вычисления координат Гаусса (в дальнейшем для краткости будем называть их таблицами Ларина).

Таблицы содержат натуральные значения коэффициентов рядов, полученных в § 38, 39, 40, 41 и представляющих разложения величин  $(x - X)$ ;  $y$ ;  $\gamma$ ;  $B_1 - B$  и  $l$  по степеням  $l$  и  $y$ , а также вспомогательные табличные величины, необходимые для вычисления поправок в расстояния и направления при переходе с эллипсоида на плоскость.

1. Для вычисления прямоугольных координат по геодезическим служат формулы (38.11) и (38.12)

$$\left. \begin{aligned} (x - X) &= \frac{N}{2\rho'^2} \sin B \cos Bl''^2 + \frac{N}{24\rho'^4} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + \\ &+ 9\eta^2 - 4\eta^4) l''^4 + \frac{N}{720\rho'^6} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4) \eta^6 \\ y &= \frac{N}{\rho''} \cos Bl'' + \frac{N}{6\rho'^3} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2) l''^3 + \\ &+ \frac{N}{120\rho'^5} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) l''^5 \end{aligned} \right\}. \quad (44.1)$$

При составлении таблиц приняты следующие обозначения величин, которые даются как функции  $B$  или  $B$  и  $l''$ :

$$l = l'' \times 10^{-4};$$

$$a_2 = \frac{N}{2\rho'^2} 10^8 \sin B \cos B;$$

$$a_4 = \frac{N}{24\rho'^4} 10^{16} \sin B \cos^3 B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$b_1 = 10^4 \frac{N}{\rho''} \cos B; \quad b_3 = \frac{N}{6\rho'^3} 10^{12} \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2);$$

$$a_6 = \frac{N}{720\rho'^6} \sin B \cos^5 B (61 - 58t^2 + t^4);$$

$$b_5 = \frac{N}{120\rho'^5} \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2).$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  — функции широты; значения  $a_6$  и  $b_5$  — функции широты  $B$  и долготы  $l$ . С этими обозначениями формулы (44.1) окончательно перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} (x - X) &= a_2 l^2 + a_4 l^4 + a' k_6 \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b' k_5 \\ k_5 &= \frac{l^5}{(4 \times 3600)^5}; \quad a' = a_6 (4 \times 3600)^6 \\ k_6 &= \frac{l^6}{(4 \times 3600)^6}; \quad b' = b_5 (4 \times 3600)^5 \end{aligned} \right\}. \quad (44.2)$$

2. Для вычисления сближения меридианов применяют формулу (40.5), т. е.

$$\gamma = l \sin B + \frac{\sin B}{3\rho''^2} \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) l^3 + \frac{\sin B}{15\rho''^4} \cos^4 B (2 - t^2) l^5. \quad (44.3)$$

Обозначим:

$$c_1 = \sin B; \quad c_3 = \frac{\sin B}{3\rho''^2} 10^{12} \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4);$$

$$c_5 = \frac{\sin B}{15\rho''^4} \cos^4 B (2 - t^2),$$

тогда формула (44.3) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= c_1 l + c_3 l^3 + c_5 l^5 \\ c' &= c_5 (4 \times 3600)^5 \end{aligned} \right\}. \quad (44.4)$$

3. Для вычисления геодезических координат по прямоугольным используют формулы (39.18) и (39.19), которые перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} B_1 - B &= \frac{\rho'' \operatorname{tg} B_1}{2M_1 N_1} y^2 - \frac{\rho'' \operatorname{tg} B_1}{24M_1 N_1^3} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) y^4 + \\ &\quad + \frac{\rho'' \operatorname{tg} B_1}{720M_1 N_1^5} (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) y^6 \\ l &= \frac{\rho''}{N_1 \cos B_1} y - \frac{\rho''}{6N_1^3 \cos B_1} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) y^3 + \\ &\quad + \frac{\rho''}{120N_1^5 \cos B_1} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) y^5 \end{aligned} \right\}. \quad (44.5)$$

Последняя формула после преобразования принимает вид

$$\left. \begin{aligned} l &= y : \left\{ \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} + \frac{(1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \cos B_1}{6N_1 \rho''} y^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\rho}{360N_1^5 \cos B_1} (5 + 44t_1^2 + 32t_1^4 - 2\eta_1^2 - 16\eta_1^2 t_1^2) y^5. \end{aligned} \right\}. \quad (44.6)$$

В таблицах приняты обозначения:

$$y' = y \cdot 10^{-5}; \quad A_2 = \frac{\rho \operatorname{tg} B_1}{2M_1 N_1} 10^{10},$$

$$A_4 = \frac{\rho \operatorname{tg} B_1}{24M_1 N_1^3} 10^{15} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2),$$

$$B_3 = \frac{(1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \cos B_1}{6N_1 \rho} 10^{14}.$$

Формулы (44.5) с этими обозначениями и с учетом формулы (44.6) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} B_1 - B &= A_2 y^2 + A_4 y^4 + A' k_6 \\ l &= y : (b_1 + B_3 y^2) 10^5 + B' k_5 \\ A' &= A_6 (4 \times 3600)^6 \frac{N^6 \cos^6 B}{\rho^6} \\ B' &= B_5 (4 \times 3600)^5 \frac{N^5 \cos^5 B}{\rho^5} \end{aligned} \right\}. \quad (44.7)$$

4. Для вычисления редукций горизонтальных направлений за кривизну изображения геодезической линии на плоскости используют формулы (43.10) в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1.2} &= -\frac{\rho}{2R_m^2} (x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) - \frac{\eta^2 t (y_2 - y_1)}{R^3} y_m^2 \rho \\ \delta_{2.1} &= +\frac{\rho}{2R_m^2} (x_2 - x_1) \left( y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{\eta^2 t (y_2 - y_1)}{R^3} y_m^2 \rho \end{aligned} \right\}. \quad (44.8)$$

Обозначая:

$$\frac{\rho}{2R_m^2} = f_m; \quad \frac{y_m^3}{3R_m^2} = III_\delta; \quad \frac{\eta^2 t (y_2 - y_1)}{R^3} y_m^2 \rho = \delta';$$

$$y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} - III_\delta = \sigma_1; \quad y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} - III_\delta = \sigma_2,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1.2} &= -f_m (x_2 - x_1) \sigma_1 + \delta' \\ \delta_{2.1} &= +f_m (x_2 - x_1) \sigma_2 - \delta' \end{aligned} \right\}. \quad (44.9)$$

Это точные формулы, применяемые для вычислений в триангуляции 1 класса. Для триангуляции 2 класса употребляют формулы в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1.2} &= -f_m (x_2 - x_1) \left( y_m - \frac{y_2 - y_1}{6} \right) \\ \delta_{2.1} &= +f_m (x_2 - x_1) \left( y_m + \frac{y_2 - y_1}{6} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (44.10)$$

а для триангуляции 3 и 4 классов

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1.2} &= -f_m (x_2 - x_1) y_m \\ \delta_{2.1} &= +f_m (x_2 - x_1) y_m \end{aligned} \right\}. \quad (44.11)$$

Вычисляемые по приведенным формулам поправки алгебраически суммируются со значениями соответствующих направлений.

5. Для вычисления редукций расстояний в рассматриваемых таблицах рекомендуется применение формулы

$$(\lg d - \lg s) 10^8 = f'_m \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} - \frac{y_m^4}{6R_m^2} \right), \quad (44.12)$$

$$\text{где } f'_m = \frac{\mu \cdot 10^8}{2R_m^2}.$$

В таблицах Ларина приведены величины

$$\frac{\Delta y^2}{12} = II_s, \quad \frac{y_m^4}{6R_m^2} = III_s.$$

Обозначим

$$y_m^2 + II_s - III_s = \sigma_3.$$

Тогда (44.12) примет вид

$$(\lg d - \lg s) 10^8 = f_m' \sigma_3. \quad (44.13)$$

Для триангуляции 2 класса формула (44.13) упрощается так:

$$10^7 (\lg d - \lg s) = \frac{1}{10} f_m' \left( y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} \right). \quad (44.14)$$

Для триангуляции 3 класса

$$10^6 (\lg d - \lg s) = \frac{1}{100} f_m' y_m^2. \quad (44.15)$$

При помощи величин, приведенных в рассматриваемых таблицах, вычисления, связанные с применением координат Гаусса — Крюгера, выполняются просто и требуют сравнительно небольшого количества вычислительных действий; в этом легко убедиться, рассмотрев формулы (44.2), (44.4), (44.7) и др.

Рассмотренные таблицы обеспечивают по точности вычисления триангуляции 1 класса в пределах шестиградусных зон. Табличные величины дают в вычислении каждого отдельного члена ошибки, не превышающие 0,0005 м в прямоугольных координатах; 0,0005" — в сближении меридианов и 0,00005" — в геодезических координатах.

III. «Таблицы координат Гаусса — Крюгера», составленные бригадой инженеров под руководством проф. А. М. Вировца (будем называть их для краткости таблицами Вировца), содержат прямоугольные плоские координаты углов съемочных трапеций масштаба 1 : 25 000, необходи-

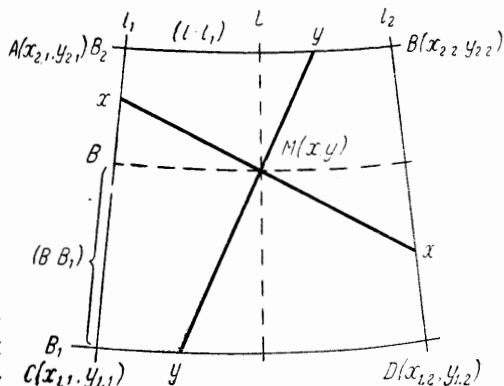


Рис. 87

мые для построения рамок трапеций топографических планов и нанесения километровых линий на них. В этом основное назначение таблиц. Кроме того, они позволяют вычислить прямоугольные координаты по геодезическим. Вычисление прямоугольных координат при помощи этих таблиц весьма простое. Пусть требуется вычислить прямоугольные координаты пункта  $M$  (рис. 87), геодезические координаты которого  $B$  и  $L$  даны. Находим трапецию масштаба 1 : 25 000, на которой расположен пункт  $M$ . Для вершин данной трапеции геодезические координаты известны; прямоугольные координаты вершин трапеции приведены в таблицах. Искомые прямоугольные координаты  $x, y$  точки  $M$  находят интерполированием. На рис. 87 пунктиром показаны линии меридиана и параллели, проходящие через точку  $M$ . Сплошные прямые, проходящие через точку  $M$ , являются линиями, параллельными осям абсцисс и ординат.

Искомые координаты  $x$ ,  $y$  точки  $M$  определяются путем интерполирования следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{1.1} + \frac{x_{2.1} - x_{1.1}}{B_2 - B_1} (B - B_1) + \frac{x_{1.2} - x_{1.1}}{l_2 - l_1} (l - l_1) - \delta x = \\ &= x_{1.1} + I_x + II_x - \delta x \\ y &= y_{1.1} + \frac{y_{2.1} - y_{1.1}}{B_2 - B_1} (B - B_1) + \frac{y_{1.2} - y_{1.1}}{l_2 - l_1} (l - l_1) - \delta y = \\ &= y_{1.1} + I_y + II_y - \delta y \end{aligned} \right\}, \quad (44.16)$$

где члены I и II — поправки, получающиеся из линейного интерполирования; величины  $\delta x$  и  $\delta y$  — поправки за нелинейное изменение абсцисс и ординат в зависимости от изменения  $B$  и  $l$ .

	$l_1$	$l$	$l_2$
$B_2$	$y_{2.1}$		$y_{2.2}$
$B$		$y$	
$B_1$	$y_{1.1}$		$y_{1.2}$

Рис. 88

	$l_1$	$l$	$l_2$
$B_2$	$x_{2.1}$		$x_{2.2}$
$B$		$x$	
$B_1$	$x_{1.1}$		$x_{1.2}$

Рис. 89

Эти поправочные члены даны в таблицах; они вычислены по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{4\rho^2} N \sin 2B (l - l_1)^* [7,5^\circ - (l - l_1)^*] = \\ &= 0,135 \sin 2B (l - l_1)^* [7,5^\circ - (l - l_1)^*] \\ \delta y &= [(y_{1.2} - y_{2.2}) - (y_{1.1} - y_{2.1})] \left( \frac{B - B_1}{B_2 - B_1} \right) \left( \frac{l - l_1}{l_2 - l_1} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (44.17)$$

Долгота  $l$  от осевого меридиана по-прежнему получится  $l = L - L_0$ . Координаты вершин трапеции рекомендуется выписывать в схемы, показанные на рис. 88 и 89.

Плоские прямоугольные координаты по таблицам Вировца вычисляют с точностью порядка 0,2 м. Этими таблицами, обеспечивающими наибольшую простоту вычислений, и следует пользоваться во всех случаях, где точность 0,2 м достаточна.

#### § 45. Преобразование координат Гаусса — Крюгера из одной зоны в другую

На практике нередко возникает задача перевычисления (преобразования) координат из одной зоны в другую. Эта задача заключается в том, что координаты какого-либо пункта или многих пунктов, отнесенные к осевому меридиану с долготой  $L'_0$  одной зоны, требуется перевычислить с отнесением к осевому меридиану другой зоны, имеющему долготу  $L''_0$ . Такая задача может возникать в следующих случаях:

1) если триангуляционная сеть расположена на стыке двух смежных зон (исходные данные в восточной и западной частях триангуляции отнесены к разным осевым меридианам этих зон), то для уравнивания такой триангуляции в системе одной зоны необходимо преобразовать координаты исходных пунктов из одной зоны в другую;

2) в связи с переходом на систему трехградусных зон в районах, где намечено исполнение топографических съемок в крупных масштабах (1 : 10 000, 1 : 5000), при наличии координат опорной сети, вычисленных в шестиградусной зоне, возникает задача перевычисления координат из шестиградусных зон в трехградусные или в зону с частным значением долготы осевого меридиана;

3) при обработке ходов съёмочного обоснования аэрофотосъемки на границе зон необходимо координаты опорных пунктов государственной триангуляции иметь в одной системе; если эти пункты расположены в разных зонах и координаты их отнесены к разным осевым меридианам, то возникает необходимость перевычисления координат из одной зоны в другую;

4) если выполнены съёмочные работы для составления специальных крупномасштабных планов и район работ оказался на стыке двух зон, или даже в одной зоне, но на ее краю, то возникает необходимость перевычисления координат имеющихся опорных пунктов при некотором другом осевом меридиане, проходящем через территорию данной съемки. Это оказывается необходимым в связи с недопустимой величиной искажений на краю зоны при использовании в специальных целях съёмочных материалов.

При окончательном вычислении координат пунктов государственной триангуляции и составлении каталогов принято за правило проводить «перекрытие» зон, т. е. для точек, лежащих вблизи раздельного меридиана, давать координаты в двух смежных зонах. Эта мера в значительной степени приводит к сокращению случаев необходимости преобразования координат пунктов из одной зоны в другую, но не исключает их.

Способов перевычисления координат пунктов из зоны в зону существует несколько. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если возникает необходимость преобразования координат из одной зоны в другую для одного-двух пунктов, то можно применить следующий способ.

Пусть даны координаты  $x_I, y_I$  пункта  $P$  в зоне I; требуется перевычислить эти координаты в зону II. Поступаем следующим образом:

а) от известных координат  $x_I, y_I$  пункта  $P$  переходим к геодезическим координатам его  $B$  и  $L$ :

б) по найденным таким образом геодезическим координатам пункта  $P$ , принимая осевой меридиан зоны II, вычисляем искомые прямоугольные координаты  $x_{II}$  и  $y_{II}$ .

Задача решается принципиально просто и точно, но для перевычисления координат значительного числа пунктов этот способ не может быть рекомендован вследствие большого объема вычислительной работы.

2. Второй способ преобразования координат, который целесообразно применять для значительного числа пунктов, основан на переходе от редуцированных направлений и сторон в системе зоны I к направлениям и сторонам на сфероиде, а от них — к редуцированным направлениям и сторонам в системе зоны II и вычислению искомых координат пунктов в этой зоне по обычным формулам. Могут быть некоторые варианты в применении этого способа в зависимости от конкретных условий задачи. Рассмотрим более детально один из типовых случаев.

На рис. 90 изображена триангуляция в виде ряда между твердыми сторонами  $AB$  и  $CD$ . Координаты исходных пунктов  $A$  и  $B$  даны в системе зоны I, а пунктов  $C$  и  $D$  — в системе зоны II. Уравнивание ряда должно быть выполнено в одной зоне. После уравнивания координаты пунктов 1—7 должны быть окончательно даны в системе зоны I, а координаты пунктов 4—9 — в системе зоны II, что обеспечит взаимное перекрытие смежных зон. Так как большая часть ряда расположена в зоне I, то уравнивание следует вести в системе этой зоны. Задача решается в следующем порядке:

а) от координат пунктов  $D$  и  $C$ , данных в системе зоны II, переходят к координатам в системе зоны I описанным выше способом;

б) вычисляют приближенные координаты всех пунктов ряда, начиная от пунктов  $A$  и  $B$  в системе зоны I; при помощи этих координат определяют редукции направлений и вводят их в измеренные направления. В результате этих вычислений все элементы ряда получаются отнесенными к системе зоны I;

в) производят уравнивание ряда;

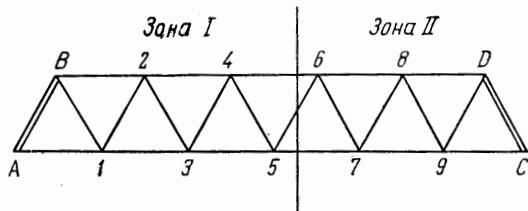


Рис. 90

г) из уравненных направлений с пунктов 4—9 вычитают вычисленные редукции направлений и получают таким образом уравненные направления на эллипсоиде;

д) по координатам пунктов  $C$  и  $D$ , отнесенным к зоне II, определяют приближенные координаты пунктов 4—9 и вычисляют редукции направлений с этих пунктов; после введения этих редукций в уравненные сферические направления получают уравненные направления на плоскости с указанных пунктов в системе зоны II;

е) вычисляют окончательно координаты пунктов 1—7 при помощи исходных координат пунктов  $A$  и  $B$  и уравненных направлений на плоскости, полученных после выполнения п. «в», и координаты пунктов 4—9 при помощи координат пунктов  $C$  и  $D$ , отнесенных к системе зоны II, и уравненных направлений на плоскости, полученных в результате выполнения п. «д».

Таким образом, поставленная задача решена. При этом в связи с расположением ряда в двух зонах дополнительной работой явилось приближенное вычисление координат пунктов и редукций направлений для меньшей половины ряда (не считая преобразования координат пунктов  $D$  и  $C$  по первому способу).

Применение настоящего способа обеспечивает получение преобразованных координат с полной точностью, соответствующей данному классу триангуляции.

3. Большинство других способов основано на применении различного рода таблиц. Из них отметим таблицы, составленные А. М. Вировцем и Б. Н. Рабиновичем \*. При применении этих таблиц на вычисление отдельного

\* А. М. Вировец и Б. Н. Рабинович. Таблицы для преобразования прямоугольных координат. М., Геодезиздат, 1952.

пункта требуется 10—15 мин. Преобразованные координаты получаются с ошибкой до 2 см. Укажем также таблицы, составленные В. Л. Каганом \*, Е. Е. Бирюковым \*\*.

Рассматриваемая задача может быть решена при помощи ранее упоминавшихся таблиц А. М. Вировца («Таблицы координат Гаусса — Крюгера для широт от 32 до 80° через 5', для долгот от 0 до 3½° через 7½' и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок»). Как указывалось, основное их назначение — построение в проекции Гаусса — Крюгера рамок трапеций топографических съемок. Эти таблицы содержат также некоторые вспомогательные данные, позволяющие преобразовывать координаты из зоны в зону с ошибкой порядка 0,2 м.

Формулы для преобразования координат при помощи указанных таблиц получаются следующим образом.

Пусть требуется перевычислить координаты пункта  $A$  из зоны I в зону II. Обозначим через  $x_1, y_1$  данные координаты пункта  $A$  в зоне I, а через  $x_2, y_2$  — искомые координаты в зоне II. Находим трапецию масштаба 1 : 25 000, в пределах которой расположен пункт  $A$ . На рис. 91 и 92 показано изображение рамок этой трапеции в I и II зонах и изображение пункта  $A$ .

Пусть  $O_1x$  и  $O_2x$  — изображения прямых, проходящих через юго-западную вершину трапеции и соответственно параллельных осям абсцисс в I и II зонах. От этих прямых отсчитываются дирекционные углы линий. Обозначим координаты вершин трапеции  $O_2$  в зоне II, известные из таблиц, через  $(x_0)_2$  и  $(y_0)_2$ . Однако разности координат точек  $O$  и  $A$  известны только в системе зоны I; обозначим их  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$ . Очевидно, несовпадение разностей координат точек  $O_2$  и  $A_2$  с разностями координат точек  $O_1$  и  $A_1$  вызывается различием дирекционных углов и разными значениями масштабов линий  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$ . Отсюда следует, что разности координат  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$  зоны I могут быть преобразованы в зону II путем учета изменения дирекционного угла линии  $O_1A_1$ , которое можно считать вызванным поворотом координатных осей на угол  $\Delta\alpha$ . Затем полученные выражения должны быть исправлены за изменение масштаба  $\Delta m$  при переходе из зоны I в зону II. Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 &= (\Delta x_1 \cos \Delta\alpha - \Delta y_1 \sin \Delta\alpha) \Delta m \\ \Delta y_2 &= (\Delta x_1 \sin \Delta\alpha + \Delta y_1 \cos \Delta\alpha) \Delta m \end{aligned} \right\}, \quad (45.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_0)_2 + \Delta x_2 \\ y_2 &= (y_0)_2 + \Delta y_2 \end{aligned} \right\}. \quad (45.2)$$

Дадим вывод формул для вычисления  $\Delta\alpha$  и  $\Delta m$ . Введем обозначения:

- $\alpha_1$  — дирекционный угол линии  $O_1A_1$  в зоне I;
  - $(\gamma_0)_1$  — сближение меридианов на плоскости в точке  $O_1$  в зоне I;
  - $\delta_1$  — поправка за кривизну изображения линии  $O_1A_1$  на плоскости в зоне I;
  - $d_1$  — расстояние между точками  $O_1$  и  $A_1$  на плоскости зоны I.
- Для аналогичных элементов в зоне II имеем обозначения:

$$\alpha_2; (\gamma_0)_2; \delta_2 \text{ и } d_2.$$

\* В. Л. Каган. Таблицы для преобразования координат Гаусса — Крюгера из шестиградусной зоны в смежную шестиградусную зону. М., ВТУ Генштаба ВС СССР, 1948.

\*\* Е. Е. Бирюков. Таблицы для перевычисления прямоугольных координат Гаусса — Крюгера из одной шестиградусной зоны в другую шестиградусную зону. М., ВТУ Генштаба ВС СССР, 1947.



Обозначив через  $A$  геодезический азимут линии на эллипсоиде соответствующей прямой  $O_1A_1$  (или  $O_2A_2$ ) на плоскости, напишем:

$$\text{для зоны I } \alpha_1 = A - (\gamma_0)_1 - \delta_1,$$

$$\text{для зоны II } \alpha_2 = A - (\gamma_0)_2 - \delta_2,$$

откуда

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = [(\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2] + (\delta_1 - \delta_2). \quad (45.3)$$

Имеем

$$\delta_1 = \frac{\rho''}{2R^2} \Delta x_1 (y_m)_1 \quad \text{и} \quad \delta_2 = \frac{\rho''}{2R^2} \Delta x_2 (y_m)_2,$$

отсюда, пренебрегая различием между  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ , напишем

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{\rho''}{2R^2} \Delta x_1 [(y_m)_1 - (y_m)_2].$$

Полагая

$$[(y_m)_1 - (y_m)_2] = \Delta y_m = (y_0)_2 - (y_0)_1,$$

получаем

$$\Delta\delta = \frac{\rho''}{2R^2} \Delta x \Delta y_m. \quad (45.4)$$

Построение формулы (45.4) позволяет для  $\Delta\delta$  составить табличку, которая и приведена в таблицах Вировца. Величину  $\Delta\delta$  выбирают по аргументам  $\Delta x$

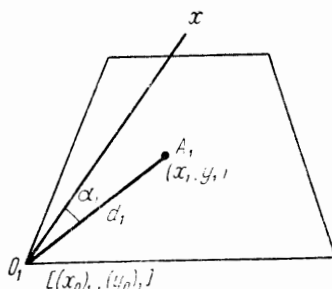


Рис. 91

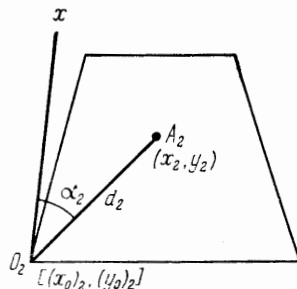


Рис. 92

и  $\Delta y_m$ . Значения  $\gamma$  тоже выбирают из таблиц. Следовательно, окончательно

$$\Delta\alpha = (\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2 + \Delta\delta. \quad (45.5)$$

Далее находим изменение масштаба  $\Delta m$ , т. е.

$$d_1 = sm_1 \quad \text{и} \quad d_2 = sm_2, \quad (45.6)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — масштабы изображения для точек  $O_1$  и  $O_2$  в зонах I и II, а  $s$  — расстояние на эллипсоиде, соответствующее расстоянию на плоскости  $O_1A_1$  (или  $O_2A_2$ ). Из формулы (45.6) получим

$$\frac{d_1}{m_1} = \frac{d_2}{m_2}.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{d_2 - d_1}{m_2 - m_1} = \frac{d_1}{m_1},$$

$$(d_2 - d_1) = (m_2 - m_1) \frac{d_1}{m_1} = (m_2 - m_1) \frac{d_1}{1 + \frac{y^2}{2R^2}} = (m_2 - m_1) d_1 \left(1 - \frac{y^2}{2R^2}\right).$$

Таблица 16

Элементы формул	Пункт Р	
	от юго-западной вершины трапеции	от юго-восточной вершины трапеции
<i>B</i>	47° 15'	
<i>l</i> <sub>1</sub> *	3 15	3° 22' 30"
<i>l</i> <sub>2</sub> **	— 2 45	— 2 37 30
<i>x</i> <sub>1</sub>	5 241 750,0	5 241 750,0
( <i>x</i> <sub>0</sub> ) <sub>1</sub>	5 240 258,9	5 240 661,1
Δ <i>x</i> <sub>1</sub>	+ 1491,1	+ 1089,9
<i>y</i> <sub>1</sub>	+252 000,0	+ 252 000,0
( <i>y</i> <sub>0</sub> ) <sub>1</sub>	246 020,5	255 482,0
Δ <i>y</i> <sub>1</sub>	+ 5979,5	— 3482 0
( <i>γ</i> <sub>0</sub> ) <sub>1</sub>	2° 23' 16"	2° 28' 47"
( <i>γ</i> <sub>0</sub> ) <sub>2</sub>	— 2 01 12	— 1 55 42
( <i>γ</i> <sub>0</sub> ) <sub>1</sub> —( <i>γ</i> <sub>0</sub> ) <sub>2</sub>	4 24 28	4 24 29
Δδ	— 1	— 1
Δα	+ 4° 24' 27"	+4° 24' 28"
sin Δα	0,07 685	0,07 685
cos Δα	0,99 704	0,99 704
( <i>m</i> —1) <sub>2</sub>	517	495
( <i>m</i> —1) <sub>1</sub>	762	791
Δ <i>m</i> = 1 + ( <i>m</i> —1) <sub>2</sub> —( <i>m</i> —1) <sub>1</sub>	0,999 755	0,999 704
+ Δ <i>x</i> <sub>1</sub> cos Δα—Δ <i>y</i> <sub>1</sub> sin Δα	+ 1027,2	+ 1353,3
+ Δ <i>x</i> <sub>1</sub> sin Δα+Δ <i>y</i> <sub>1</sub> cos Δα	+ 6076,4	+ 3388,0
( <i>x</i> <sub>0</sub> ) <sub>2</sub>	5 238 802,4	5 238 476,3
Δ <i>x</i> <sub>2</sub>	+ 1026,9	+ 1352,9
<i>x</i> <sub>2</sub>	5 239 829,3	5 239 829,2
( <i>y</i> <sub>0</sub> ) <sub>2</sub>	— 208 173,7	—198 711,8
Δ <i>y</i> <sub>2</sub>	+ 6074,9	— 3387,0
<i>y</i> <sub>2</sub>	— 202 098,8	—202 098,8

\* Долгота вершины трапеции относительно осевого меридиана зоны № 8.

\*\* То же, относительно осевого меридиана зоны № 9.

Пренебрегая малым членом  $(m_2 - m_1) d_1 \frac{y^2}{2R^2}$ , получаем

$$(d_2 - d_1) = (m_2 - m_1) d_1,$$

$$\frac{d_2}{d_1} = 1 + (m_2 - m_1). \quad (45.7)$$

Отношение  $\frac{d_2}{d_1}$  и характеризует изменение масштаба при переходе из зоны I в зону II для линии OA.

Чтобы при вычислении иметь дело с меньшим количеством знаков, формулу (45.7) перепишем окончательно

$$\Delta m = 1 + (m - 1)_2 - (m - 1)_1. \quad (45.8)$$

Величины  $(m - 1)_2$  и  $(m - 1)_1$  выбирают из вспомогательной таблицы. Формулы (45.1), (45.2), (45.5) и (45.8) решают задачу.

В табл. 16 приведен пример перевода координат из зоны в зону при помощи указанных таблиц.

Пункт  $P$  задан в зоне № 8 координатами:

$$x_1 = 5\,241\,750,0;$$

$$y_1 = 8\,752\,000,0$$

или

$$y_1 = +252\,000,0.$$

Требуется перевычислить эти координаты в систему зоны № 9.

Таблицы А. М. Вировца и Б. Н. Рабиновича служат для преобразования прямоугольных координат из трехградусной в смежную трехградусную, из трехградусной — в шестиградусную и обратно и из шестиградусной зоны — в смежную шестиградусную. Переводы, связанные с шестиградусными зонами, возможны для пунктов, удаление которых от осевого меридиана не превышает  $3^\circ 30'$  долготы. При переводе из шестиградусной в шестиградусную зону приходится решать последовательно две задачи:

- 1) переход в смежную трехградусную зону и
- 2) переход из последней в смежную шестиградусную.

Т а б л и ц а 17

Вычисления Формулы	Переход из западной 6-градусной зоны в 3-градусную восточную	Переход из 3-гра- дусной западной зоны в восточную 6-градусную
$x_1$	5 728 374,55	5 724 004,82
$y_1$	+ 210 198,20	+ 2 559,92
$y_0$	207 634,75	207 814,29
$\Delta y$	+ 2 563,45	— 205 254,37
$(a_1 + b_1 \Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y$	— 3,53	+ 174,32
$c_1$	0,00	+ 0,08
$y_2$	+ 2 559,92	— 205 079,97
$x_0$	5 724 110,03	5 719 738,92
$(a + b \Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y$	— 105,21	+ 8 423,81
$c$	0,00	+ 1,47
$x_2$	+ 5 724 004,82	5 728 164,20
$a$	— 0,041 04 176	— 0 041 01,948
$b \Delta y \cdot 10^{-10}$	+ 26	— 2,135
$a + b \Delta y \cdot 10^{-10}$	— 0,041 04 150	— 0,041 04 083
$a_1$	— 0,001 37 183	— 0,001 37 184
$b_1 \Delta y \cdot 10^{-10}$	— 652	+ 52 254
$a_1 + b_1 \Delta y \cdot 10^{-10}$	— 0,001 37 835	— 0,000 84 930

Формулы для перевода координат из зоны в зону, используемые при применении таблиц А. М. Вировца и Б. Н. Рабиновича, следующие:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_1 - y_0, \\ \left. \begin{aligned} x_2 &= x_0 + (a + b \Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y + c \\ y_2 &= \Delta y + (a_1 + b_1 \Delta y \cdot 10^{-10}) \Delta y + c \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (45.9)$$

где  $y_0$  — ордината вспомогательной точки  $P_0$  в системе первой зоны, лежащей на изображении осевого меридиана второй зоны и имеющей абсциссу, равную абсциссе  $x$  данной точки;  $x_0$  — дуга меридиана от экватора до параллели вспомогательной точки  $P_0$ .

Значения величин  $x_0$  и  $y_0$ , коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ , поправки  $c$  и  $c_1$  приводятся в таблицах в метрах и выбираются по значению  $x_1$ .

Погрешность перевода из зоны в зону по данным таблиц не превышает 0,02 м.

Пример на переход из шестиградусной зоны в шестиградусную по таблицам А. М. Вировца и Б. Н. Рабиновича приводится в табл. 17. Даны: координаты пункта 1 —  $x_1$ ,  $y_1$  в 4-ой шестиградусной зоне ( $L_0 = 21^\circ$ ). Вычислить координаты этого пункта  $x_2$ ,  $y_2$  в пятой (восточной) зоне ( $L_0 = 27^\circ$ ).

Контрольным вычислением может служить обратный переход из пятой зоны в четвертую.

#### § 46. Нанесение километровых линий на планшеты топографической съемки. Вставка географической сетки в прямоугольную

В настоящее время в практике топографических и картографических работ в СССР принято топографические планы масштаба до 1 : 2000 включительно ограничивать линиями меридианов и параллелей.

Вершины углов листов топографических планов и карт и опорные пункты наносят в проекции Гаусса — Крюгера. Таким образом, съемочные и составительские листы карты получаются сразу в проекции Гаусса — Крюгера.

Для удобства пользования топографическими планами и картами принято показывать на них километровую сетку с установленными интервалами (1; 2 км и т. д.) в зависимости от масштаба съемки.

При съемке или составлении карты в проекции построение рамок и нанесение опорных пунктов производят путем предварительного нанесения на чертежный лист километровой сетки в данном масштабе. Затем относительно километровой сетки наносят при помощи таблиц Вировца вершины углов трапеции и опорные пункты по их координатам. Положение километровых линий определяется уже при построении рамок.

До 1950 г. планшеты топографической съемки в масштабе 1 : 5000 и 1 : 2000 ограничивались линиями абсцисс и ординат; топографические планы масштаба 1 : 1000 и в настоящее время ограничивают линиями абсцисс и ординат; может возникнуть обратная задача — вставка географической сетки в прямоугольную. Пусть съемочный планшет изображается квадратом (рис. 93) с вершинами  $A(x_1, y_1)$ ;  $B(x_1, y_2)$ ;  $C(x_2, y_1)$ ;  $D(x_2, y_2)$ . Требуется

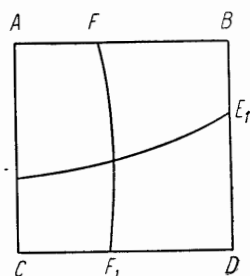


Рис. 93

определить положение меридиана  $FF_1$  и параллели  $EE_1$ . Очевидно, задача сводится к определению положения точек  $F, F_1, E, E_1$ .

Для определения точки  $F$  имеем абсциссу линии  $AB$  и заданную долготу  $l$  меридиана, который должен быть нанесен на планшет. Требуется определить ординату  $y_F$  точки  $F$ . Не различая широт точек  $A$  и  $B$ , по  $x_1$ , как по дуге меридиана от экватора до данной точки, находим из таблиц широту  $B_1$ . Далее, на основании формулы (39.13) пишем, опуская члены с  $\frac{y^4}{N^4}$  и  $\eta^2$ ,

$$y_F = \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} l \left\{ 1 + \frac{y^2}{6N_1^2} (1 + 2t_1^2) \right\}. \quad (46.1)$$

Заменяя в поправочном члене  $y^2$  через  $\frac{l^2}{\rho''^2} N_1^2 \cos^2 B_1$ , получаем окончательно

$$y_F = \frac{N_1 \cos B_1 l}{\rho''} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B_1}{6\rho''^2} (1 + 2t_1^2) \right\}. \quad (46.2)$$

Так же вычислится и ордината точки  $F_1$ , но в этом случае широта  $B_1$  должна быть вычислена по абсциссе  $x_2$ .

Положение параллели  $EE_1$  определится, если найдем абсциссу точки  $E$ , а затем аналогично — точки  $E_1$ . Для вычисления абсциссы  $x_E$  точки  $E$  имеем ординату  $y$  западной рамки планшета и широту  $B$  параллели  $EE_1$ . На основании формулы (39.12) находим широту  $B_1$  точки пересечения ординатной линии точки  $E$  с осевым меридианом

$$B_1 = B + \frac{y^2}{2MN} \rho'' t, \quad (46.3)$$

где  $M_1, N_1$  и  $t_1$  заменены через  $M, N$  и  $t$  без заметной для графических построений ошибки.

Искомую абсциссу  $x_E$  вычисляют по таблицам как дугу меридиана от экватора до широты  $B_1$ . Аналогично вычисляют абсциссу точки  $E_1$ ; при этом вместо ординаты западной рамки должна быть взята ордината восточной рамки.

#### § 47. Понятие о некоторых других проекциях и системах плоских координат

В предыдущих параграфах было сказано о теории и практике применения системы прямоугольных плоских координат Гаусса — Крюгера, применяющейся в настоящее время в СССР и других странах.

До перехода к проекции Гаусса — Крюгера в СССР и в ряде других стран использовались другие проекции, причем в некоторых странах они применяются и по настоящее время.

Рассмотрим эти проекции и соответствующие системы плоских прямоугольных координат. Некоторые из них имеют историческое и в то же время методическое значение. При сравнении с ними проекции Гаусса — Крюгера наглядно выявляются преимущества последней.

Приведем краткие сведения о сущности этих проекций

##### 1. Сферические прямоугольные координаты Зольднера

В этой системе координат земная поверхность считается сферической.

Пусть на сфере (рис. 94) точка  $O$  на осевом меридиане принята за начало координат. Меридиан  $POP_1$ , проходящий через выбранное начало координат, принимается за ось  $x$ .

Возьмем некоторую точку  $A$  и определим ее положение на сфере в системе координат Зольднера. Для этого проведем из точки  $A$  большой круг  $AA_0$ , перпендикулярный к начальному меридиану — оси абсцисс  $PP_1$ . Координатами точки  $A$  будут:  $x$  — длина дуги  $OA_0$ ,  $y$  — длина дуги  $AA_0$ .

Возьмем вторую точку  $B$ ; ее координатами соответственно пусть будут  $x_2$  и  $y_2$ . Расстояние между точками  $A$  и  $B$  определяется длиной дуги большого круга  $s$ . Если отложить по дуге большого круга от точки  $B_0$  расстояние  $AA_0 = y_1 = B_0B_1$ , то отрезок дуги  $B_1B$  будет  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

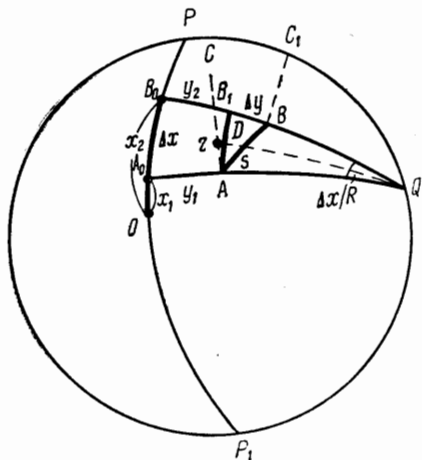


Рис. 94

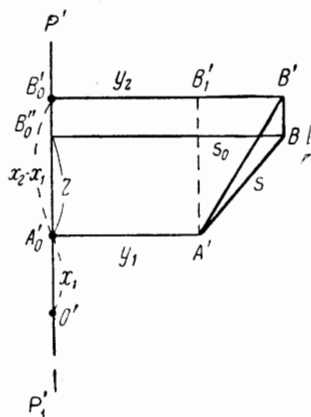


Рис. 95

Проведем в  $A$  и  $B$  большие круги  $AC$  и  $BC_1$ , составляющие с дугами  $AA_0$  и  $BB_0$  прямой угол. Тогда угол в точке  $A$  между дугами  $AC$  и  $AB$  будет дирекционным углом  $\alpha_{2,1}$  направления  $AB$ ; аналогично угол между  $BC_1$  и  $BA$  — дирекционным углом  $\alpha_{1,2}$  направления  $BA$ .

Далее обозначим:  $R$  — радиус сферы,  $z$  — длину дуги  $AB_1$ ,  $Q$  — полюс большого круга  $POP_1$ .

Применение описанной системы сферических координат на плоскости заключается в следующем:

1. Осевой меридиан  $POP_1$  изображается на плоскости прямой  $P'O'P_1'$  (рис. 95).

2. Большие круги  $OA_0$  и  $OB_0$  изображаются прямыми, перпендикулярными к прямой  $P'O'P_1'$  и расположенными на расстоянии, равном разности абсцисс точек  $A$  и  $B$ .

3. Малый круг сферы, параллельный осевому меридиану, изображается прямой, параллельной изображению осевого меридиана  $P'O'P_1'$  и расположенной от него на расстоянии, равном ординате этого малого круга. Описанные условия изображения сферических элементов системы на плоскости вполне определяют положение точек  $A$  и  $B$  на плоскости. Они изображаются точками  $A'$  и  $B'$  и будут иметь плоские координаты, равные сферическим\*.

Но, конечно, взаимное положение этих точек на плоскости иное, чем на сфере. Это легко усматривается из сопоставления рис. 94 и 95.

\* Сферические координаты как плоские использовал французский геодезист Кассини, поэтому описываемые плоские координаты называются также Кассини — Зольднера.

Допущение, что Земля — шар, а не эллипсоид, может быть практически оправдано только в пределах некоторой зоны как с севера на юг, так и с востока на запад. Если воспользоваться теорией Гаусса конформного изображения эллипсоида на шаре, то можно сделать вывод, что без практически заметных линейных и угловых искажений можно не различать эллипсоида от шара в пределах зоны, ограниченной параллелями, отступающими одна от другой до  $2\frac{1}{2}^\circ$  и меридианами — до  $2^\circ$  (для средних широт). Соответствующие ограничения, притом значительно более жесткие на размер этой зоны, накладывают допустимые размеры искажений при переходе со сферы на плоскость. Конечно, в зависимости от точности геодезических сетей и их назначения размер таких участков, определяющих, по существу, самостоятельные (частные) системы координат, будет меняться. Здесь важно отметить следующий основной вывод: использование проекции Зольднера, т. е. системы сферических координат, как плоских на значительной территории, вызвало бы необходимость образования множества зон, ограниченных как меридианами, так и параллелями. К этому следует добавить, что для вычислений в каждой зоне было бы необходимо принимать разные постоянные, например частные начала координат (отличающиеся не только долготами, как в проекции Гаусса — Крюгера, но и широтами). Это привело бы к образованию значительно большего числа смежных границ зон, чем в проекции Гаусса — Крюгера. Все это делает проекцию Зольднера значительно менее удобной для использования как системы плоских прямоугольных координат на большой территории.

К этому следует добавить, что учет искажений в проекции Зольднера более громоздок и сложен, чем в проекции Гаусса — Крюгера: при учете линейных искажений необходимо принимать во внимание ориентировку линий; учет угловых искажений необходимо вести с несравненно большей тщательностью и подробностью независимо от протяженности направления.

Все вместе взятое дает основание сделать вывод, что проекция Зольднера по многим и весьма существенным моментам уступает проекции Гаусса — Крюгера.

Давая краткое описание проекции Зольднера, следует отметить, что математически вопрос о замене сфероида сферой может быть решен, причем строго, следующими двумя путями, если размер зоны не позволяет пренебречь сфероидичностью Земли:

1. Двойным переходом с эллипсоида на плоскость: первоначально осуществляется переход с эллипсоида на шар, пользуясь тем или иным законом изображения, например конформным Гаусса, а затем с шара на плоскость — описанным выше.

2. Введением сразу не сферических, а сфероидических прямоугольных координат; в этом случае  $y$  измеряется как длина геодезической линии, составляющая с осевым меридианом  $90^\circ$ , а  $x$  — соответствующая дуга меридиана (дуга эллипса).

Эти дополнительные сведения, конечно, не меняют сделанного заключения о практическом применении проекции Зольднера в геодезии.

Система прямоугольных плоских координат Зольднера впервые начала применяться в начале прошлого столетия в Германии, при кадастре и землеустройстве; она начала применяться и в СССР в двадцатых годах, главным образом в землеустройстве. Но когда в начале тридцатых годов в связи с большим развитием геодезических работ в СССР встал вопрос о выборе и переходе к единой системе плоских прямоугольных координат, то по указанным выше соображениям проекцию Зольднера отвергли и приняли проекцию Гаусса — Крюгера.

## 2. Стереографическая проекция

Напомним, что стереографическая проекция шара на плоскость представляет собой частный случай перспективных проекций, когда точка зрения находится на поверхности шара; картинная плоскость перпендикулярна диаметру шара, на котором располагается точка зрения.

Рис. 96 дает геометрическое представление о стереографической проекции шара на плоскость.

Эта проекция обладает двумя важными свойствами: 1) она конформна; 2) большие и малые круги на шаре изображаются также соответствующими кругами.

Перспектива эллипсоида на плоскость не обладает этими свойствами.

Стереографической проекцией эллипсоида на плоскость называют такую, которая обладает указанными двумя свойствами проекции шара на плоскость и превращается в нее при сжатии, равном нулю. Этим условиям могут удовлетворять многие проекции. Наиболее известны стереографические проекции Гаусса, Русселя и так называемая Голландская.

Для последующей характеристики проекций применительно к геодезическим целям приведем без вывода основные формулы проекции в определении Гаусса.

Основное уравнение проекции

$$-x + iy = k \frac{ge^{il} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi_0}{1 + ge^{il} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi}, \quad (47.1)$$

где

$$k = 2N_0,$$

$$\Phi = 90^\circ - B,$$

$$\Phi_0 = 90^\circ - B_0,$$

$$l = L - L_0,$$

$N_0$  — радиус кривизны первого вертикала в точке зрения,

$$g = \frac{\left( \frac{1+e \cos \Phi}{1-e \cos \Phi} \right)^{1/2e}}{\left( \frac{1+e \cos \Phi_0}{1-e \cos \Phi_0} \right)^{1/2e}},$$

$B_0$  и  $L_0$  — геодезические координаты центра проекции ( $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ).

Далее приведем формулы, характеризующие искажения проекции.

Масштаб изображения выражается формулой

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{k^2}, \quad (47.2)$$

Из формулы (47.2) следует, что искажение одинаковое в радиальных направлениях от центра проекции. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию целесообразно применять для изображения частей поверхности эллипсоида, имеющих круглые очертания.

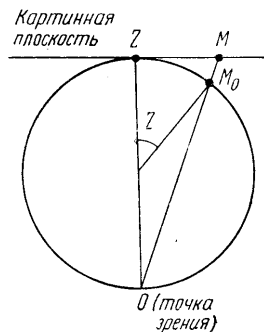


Рис. 96



Формула (47.2) дает главный член поправки за переход с эллипсоида на плоскость в стереографической проекции, если для  $x$  и  $y$  взять их значения для средней точки линии, т. е.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

тогда главный член формулы для указанной поправки будет

$$d - s = d \frac{x_m^2 + y_m^2}{k^2}. \quad (47.3)$$

Из сравнения (47.3) с формулой (42.7) можно сделать вывод, что размер искажений в стереографической проекции будет при одинаковом удалении от осевого меридиана несколько меньше, чем в проекции Гаусса — Крюгера.

Поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости выражается формулой

$$\delta_{1.2}'' = \delta_{2.1}'' = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{k^2} \rho''. \quad (47.4)$$

Величина поправок  $\delta$  в стереографической проекции будет примерно в два раза меньше, чем в проекции Гаусса — Крюгера.

Из формулы масштаба изображения

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{k^2}$$

следует, что масштаб изображения возрастает от центральной точки по всем направлениям. Поэтому применение стереографической проекции на большой территории вызывает необходимость введения зон, ограниченных как меридианами, так и параллелями. Вследствие наличия частных начал координат, расположенных под разными широтами, вычисления не будут единообразными в разных зонах. Следовательно, если говорить о применении проекции на значительной территории, то за проекцией Гаусса — Крюгера сохраняется безусловное преимущество. Масштаб изображения в проекции Гаусса — Крюгера зависит только от ординаты, следовательно, каждая зона в этой проекции охватывает полосу поверхности эллипсоида от северного полюса до южного. Огромное достоинство этой проекции — полное однообразие и стандартизация вычислений независимо от зоны.

Тем не менее стереографическая проекция имеет некоторые преимущества, которые в частных случаях могут быть использованы. К этим преимуществам можно отнести:

1. Искажения возрастают равномерно от центральной зоны проекции, тогда как в проекции Гаусса — Крюгера такой равномерности нет.

2. При одинаковом удалении от осевого меридиана искажения в длинах линий в стереографической проекции в два раза меньше, чем в проекции Гаусса — Крюгера.

Можно высказать предположение, что в частных случаях стереографическая проекция может найти практическое применение в геодезических работах. Очевидно, это может быть в тех случаях, когда размер искажений в проекции Гаусса — Крюгера в принятой системе зон недопустим и возникает необходимость перехода к частной системе координат; это может случиться при использовании координат для достаточно точных числовых расчетов при проектиро-

вании и строительстве комплекса инженерных сооружений, при известном удалении их от осевого меридиана. Как уже указывалось, стереографическая проекция наиболее удобна для изображения территорий, имеющих круглое очертание.

#### § 48. Общее заключение по применению координат Гаусса — Крюгера в геодезических работах СССР

Система координат Гаусса — Крюгера отвечает требованиям, указанным в § 35; переход с эллипсоида на плоскость осуществляется с точностью, удовлетворяющей самым строгим практическим требованиям. Полученные формулы хотя и не очень просты, все же не представляют существенных затруднений при вычислении, если имеются вспомогательные таблицы. Проекция конформна, поэтому редукции направлений за кривизну изображения геодезической линии на плоскости малы и их легко вычислить; линейные искажения учитывать просто.

Основное достоинство проекции Гаусса — Крюгера для построения системы плоских прямоугольных координат на значительных и больших территориях — деление на зоны, простирающиеся полосами от северного полюса до южного. Такое деление на зоны равного протяжения по долготе и однородного по широте обеспечивает единообразие методов и средств вычислений во всех зонах. Разные зоны отличаются от нулевого меридиана только номерами, не участвующими в вычислениях и определяющими географическое положение той или иной зоны на поверхности земного эллипсоида.

Таким образом, проекция Гаусса — Крюгера имеет универсальный характер и наряду с геодезической системой координат может применяться для всех стран и континентов.

Достоинство проекции Гаусса — Крюгера заключается в том, что в работах малой точности, например при развитии съемочного обоснования — продолжении теодолитных ходов, развитии аналитических сетей, можно не учитывать редукиций направлений. Действительно, в неблагоприятном случае (на краю шестиградусной зоны при  $y_m = 250$  км,  $x_2 - x_1 = 1$  км) значение редукиции будет меньше  $1''$ , т. е. пренебрегаемо мало по сравнению с ошибками измерения углов.

При продолжении теодолитных ходов между пунктами триангуляции, координаты которых даны в системе Гаусса — Крюгера, в измеренные длины сторон ходов необходимо вводить поправки за переход на плоскость. На краю шестиградусной зоны при  $y = 250$  км эти поправки достигают величины порядка  $\frac{1}{1200}$ , поэтому не могут считаться пренебрегаемыми. Таким образом, в геодезических работах малой точности надо учитывать только линейные искажения.

Конечно, при всяком законе изображения эллипсоида на плоскости для большой территории неизбежно разделение территории на зоны. В связи с этим возникают неудобства главным образом на стыке двух смежных зон, когда смежные геодезические пункты оказываются отнесенными к различным системам координат. Однако для большинства случаев эти неудобства устраняются взаимным перекрытием зон при вычислении координат пунктов. Эти перекрытия в настоящее время в СССР установлены на  $1^\circ$  по долготе; западная

и восточная зоны перекрываются по  $30'$  по долготе. Схематически это перекрытие показано на рис. 97.

Интервалы зон по долготе в  $6^\circ$  следует считать максимальными; при увеличении этого интервала возникла бы необходимость учета дополнительных

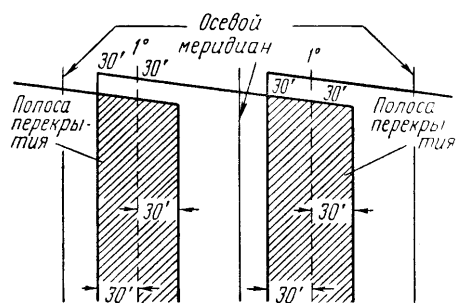


Рис. 97

сложных членов в формулах перехода от геодезических к прямоугольным координатам и в формулах редукций длин и направлений. При использовании топографо-геодезических материалов, отнесенных к системе прямоугольных плоских координат, важно, чтобы в пределах известной зоны, порядка  $(y - 5)$  км и  $(y + 5)$  км, масштаб  $m$  можно было считать постоянным. На краю шестиградусной зоны, т. е. при  $l = 3^\circ$ , изменение масштаба на линии, перпендикулярной оси абсцисс, длиной 10 км будет около  $1 : 17\,000$ , или три единицы пятого знака логарифма. Так как вычисление сетей съемочного обоснования ведется при помощи пятизначных таблиц логарифмов, то, очевидно, увеличивать протяженность зоны по долготе свыше  $6^\circ$  нельзя.

Приходится также иметь в виду, что геодезические и топографические данные, вычисленные в проекции, отличаются от соответствующих данных в натуре. Но нельзя требовать, чтобы инженер-проектировщик при использовании топографо-геодезических данных для составления проекта или при перенесении его в натуру имел дело с какими-либо редукциями. Это приводило бы к различным недоразумениям и ошибкам. Линейные искажения на краю шестиградусной зоны достигают величины порядка  $1 : 1200$ ; для проектирования различных инженерных сооружений такое масштабное искажение на плане или в геодезических данных не может считаться допустимым. С применением трехградусных зон ( $l = 1^\circ 30'$ ) линейные искажения приблизительно равны  $1 : 5000$ . Этой величиной уже во многих случаях можно пренебрегать. Поэтому в районах крупномасштабных съемок, результаты которых будут использоваться для проектирования и инженерных расчетов, координаты пунктов следует вычислять в трехградусной зоне с применением в отдельных случаях частных осевых меридианов.

В издаваемых в настоящее время каталогах геодезических пунктов, помимо прямоугольных координат  $x$  и  $y$ , приводятся, как правило, сближения меридианов и масштаб изображения.

Для всей территории СССР абсциссы  $x$  положительны, поэтому знак плюс обычно не ставится. Ординаты  $y$  могут иметь и положительные, и отрицательные значения. Чтобы избежать ошибок, которые могут возникнуть вследствие неправильного учета знака ординат, начало счета последних сдвигают на запад на 500 км, т. е. к значениям ординат алгебраически прибавляют 500 км и впереди полученной суммы ставят номер зоны, к которой отнесены координаты данного пункта. Если, например, данная точка расположена в зоне № 7 и ее ордината  $y = -74,24$  км, то преобразованное указанным образом значение ординаты будет 7 425,76.

Координаты Гаусса — Крюгера прочно вошли в практику геодезических работ в СССР, они обеспечивают простое использование результатов этих работ в различных целях, о которых было сказано в начале главы. В настоя-

щее время полностью ликвидирована бессистемность в применении прямоугольных координат.

Успех введения и применения единой системы прямоугольных координат в СССР объясняется научным подходом к решению этого важного вопроса.

Регламентированная система применения координат Гаусса — Крюгера, изложенная выше, вполне отвечает требованиям постановки топографических работ в масштабе до 1 : 25 000 и в масштабе 1 : 10 000. При более крупных масштабах (1 : 5000, 1 : 2000 и 1 : 1000) съемок, если они захватывают небольшие территории и имеют местный характер и искажения при использовании трехградусных зон недопустимы, вполне возможны частные решения в виде применения произвольных начал координат.

По мере развития промышленного, энергетического, городского строительства, выполнения работ по сооружению комплексов научно-технических сооружений и проведения других мероприятий объем крупномасштабных съемок будет возрастать. Этот рост будет происходить как путем увеличения числа массивов, требующих крупномасштабных съемок, так и путем расширения площадей этих съемок в отдельных массивах. Естественно, что будет возрастать и роль числовых геодезических данных, необходимых в процессе проектирования, осуществления и эксплуатации тех или иных сооружений. Во всех этих случаях искажения, возникающие на краях зон, даже трехградусных, могут быть недопустимыми. И если на мелких участках съемок возможны упоминавшиеся выше частные решения, то на больших территориях крупномасштабных съемок, когда искажения проекции в трехградусной зоне превышают допустимые ошибки требуемых геодезических данных, должно быть найдено общее научно обоснованное решение. Возможен переход в соответствующих районах к зонам по долготе в  $1,5^\circ$ ; его, вероятно, нельзя признать вполне удачным, так как увеличение числа зон представляет собой определенные неудобства. Следует думать, что дальнейшая разработка вопроса о системе или системах координат, применение которых обеспечивало бы большее соответствие между числовыми значениями координат и натурой, представляет достаточно актуальную научно-техническую задачу.

## II. ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

### Глава VII ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### § 49. Предмет физической геодезии

Физическая геодезия — часть высшей геодезии, в которой рассматриваются методы изучения фигуры Земли как физического и геометрического тела на основе законов механики и опытных данных — результатов геодезических, гравиметрических и астрономических измерений. Если в сфероидической геодезии устанавливаются математические зависимости между элементами поверхности эллипсоида, считая его параметры известными, то физическая геодезия рассматривает методы определения параметров земного эллипсоида и методы изучения действительной фигуры Земли обычно относительно выбранного эллипсоида как поверхности относимости или сравнения.

Изучение фигуры Земли основано на определении действительного внешнего гравитационного поля Земли, поэтому в физической геодезии значительное внимание уделяется теории потенциала силы тяжести Земли и его определению по результатам упомянутых измерений. К физической геодезии относится также редукционная проблема высшей геодезии, под которой обычно понимается совокупность задач по вычислению поправок в непосредственно измеренные значения углов, линий и других элементов за переход к поверхности относимости.

К физической геодезии отнесем вопросы использования геодезических данных для изучения деформации земной поверхности и внутреннего строения Земли как физического тела.

Через физическую геодезию, в первую очередь, геодезия в целом входит в состав науки о Земле как совокупности знаний, даваемых геофизикой, геологией и другими науками.

Под общей фигурой Земли практически понимается эллипсоид вращения, максимально приближающийся к общему земному эллипсоиду.

Под действительной фигурой Земли будем понимать физическую поверхность на суше и невозмущенную поверхность воды океанов и морей. При необходимости, из измерений глубин дна в океанах и морях всегда легко можно определить поверхность океанического и морского дна.

Действительная фигура Земли — физическая земная поверхность — определяется координатами каждой ее точки в выбранной системе. Однако практически такого определения положения всех точек поверхности Земли методами высшей геодезии не требуется. Достаточно определять пространственные

координаты  $X, Y, Z$  или геодезические —  $B, L$  и  $H$  отдельных точек, равномерно расположенных на земной поверхности. Такими точками на суше могут быть пункты астрономо-геодезической сети 1 и 2 классов и реперы нивелирования I и II классов. Координаты других точек можно получить с необходимой точностью путем развития геодезических сетей следующих по точности классов, а также методами топографии. Изучение действительной фигуры Земли на водной поверхности заключается в определении высот ее точек относительно эллипсоида. Выбор этих точек, их густота вытекают из требований к точности и подробности изучения формы данной водной поверхности.

## § 50. Краткий очерк развития знаний о фигуре Земли и методах ее изучения

Вопрос о том, какую форму имеет Земля, привлекал внимание многих мыслителей еще в глубокой древности. К мысли о том, что фигура Земли представляет собой тело, близкое по форме к шару, и, далее, к эллипсоиду, пришли, конечно, не сразу.

Известно, что первым, кто пришел к выводу о шарообразности Земли, был знаменитый греческий философ и математик Пифагор (VI в. до нашей эры). Попытки определить размеры земного шара относятся к временам глубокой древности.

Измерения на земной поверхности для определения радиуса Земли с давних пор называют градусными измерениями. Это название происходит от того, что в то время Земля принималась за шар и определение ее размеров заключалось в выводе отрезка дуги большого круга земного шара, соответствующего одному градусу.

Допустим, что из непосредственных измерений на поверхности Земли получена длина некоторой дуги меридиана  $AB$ , равная  $s$  (рис. 98). Пусть определены из астрономических наблюдений широты конечных точек этой дуги  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , причем  $\varphi_2 > \varphi_1$ ; тогда, принимая Землю за шар, имеем

$$\frac{s}{s_{1^\circ}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1^\circ}, \quad (50.1)$$

где  $s_{1^\circ}$  — длина дуги в  $1^\circ$ .

Из последнего выражения получаем

$$s_{1^\circ} = \frac{s}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (50.2)$$

$$R = s_{1^\circ} \rho^\circ = s_{1^\circ} \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} s_{1^\circ}, \quad (50.3)$$

где  $R$  — радиус Земли.

Рассмотрим основные этапы развития знаний о форме и размерах Земли. Последовательное, более подробное изложение истории градусных измерений и вообще работ по определению формы и размеров Земли дано в ряде сочинений

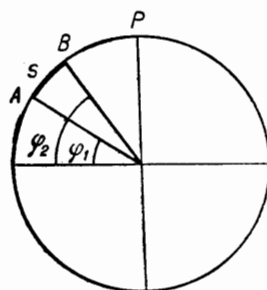


Рис. 98

ний по высшей геодезии [27], [32], [28] и других, куда мы и отсылаем читателей, желающих более детально ознакомиться с этим вопросом.

Заметим лишь, что история развития градусных измерений — важнейшая часть истории геодезии как одной из областей естествознания. Проблемой изучения фигуры Земли, начиная с древних времен, занимались гениальные ученые и мыслители, обогатившие науку замечательными открытиями и выдающимися исследованиями в разных ее областях. Постановка и выполнение градусных измерений непрерывно сопровождалась разработкой новых теорий, методов точных геодезических измерений и математической обработки их результатов, использованием достижений смежных областей знания — математики, механики, физики, инструментостроения и т. д.

Первое исторически достоверное определение размеров Земли принадлежит Эратосфену (III в. до нашей эры). В первом столетии нашей эры греки и арабы дали еще несколько определений размеров Земли. В средние века сведения о шарообразности Земли и ее размерах были почти забыты и лишь в XVI в., ознаменовавшемся выдающимися морскими путешествиями и открытиями, начинаются новые работы по определению размеров и формы Земли. К этому же времени относится и применение метода триангуляции в геодезических работах, которое составило эпоху в развитии и постановке градусных измерений. Трудности, связанные с преодолением естественных препятствий при непосредственных измерениях дуг на земной поверхности, отпали, резко повысилась точность измерений; появилась возможность измерения больших расстояний на земной поверхности. В Голландии и Франции в XVII в. были проведены первые градусные измерения с применением метода триангуляции. Изобретателем этого метода был голландский ученый Снеллиус (1615 г.).

Важно отметить, что постановка и исполнение градусных измерений до конца XVII в. исходили из предпосылки, что Земля — шар и, следовательно, задача сводилась к определению радиуса земного шара. Для этого периода изучения формы Земли характерен также чисто геометрический путь решения задачи, т. е. определение радиуса Земли на основании простейших геометрических зависимостей между радиусом и измеряемыми непосредственно на земной поверхности дугами.

Помимо изложенной выше схемы вывода радиуса Земли, применялись и другие пути решения задачи, также основанные на чисто геометрических построениях, как, например: на основании измерения «угла понижения горизонта», измерения зенитных расстояний на концах дуги известной длины, при помощи определяемых из измерений сферических избытков замкнутых фигур, образованных на поверхности Земли. Однако эти методы не получили и не могли получить применения, так как они уступали по точности способу, изложенному в начале параграфа.

Новая эпоха в изучении фигуры Земли началась после открытия гениальным Ньютоном закона всемирного тяготения. Исходя из предположения, что наша планета была некогда в огненно-жидком состоянии, Ньютон теоретически пришел к выводу, что Земля должна иметь форму эллипсоида, сплюснутаго по направлению полюсов\*.

Рассуждения Ньютона были таковы: если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то все частицы ее, будучи подвержены взаимному притяжению,

---

\* В настоящее время большинство геофизиков не разделяют предположение о первоначальном огненно-жидком состоянии Земли, подробнее см. § 51.

должны образовать тело, имеющее форму шара. Вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси в каждой точке возникает центробежная сила, действующая перпендикулярно к оси вращения и стремящаяся растянуть Землю по направлению экватора. Очевидно, эта сила будет наибольшей во всех точках экватора, а на полюсах равна нулю. Отсюда следует, по Ньютону, что Земля вследствие суточного вращения должна принять форму, близкую к фигуре эллипсоида вращения, сплюснутого у полюсов.

Для проверки теории Ньютона следовало определить длину дуги меридиана в один градус под разными широтами. Если бы длина градуса меридиана под северной широтой получилась больше, чем под южной, то это доказывало бы сплюснутость Земли у полюсов.

Первая попытка подтвердить теорию Ньютона не увенчалась успехом. Выполненное под руководством Кассини градусное измерение во Франции, вследствие ошибок измерений и методических недочетов в постановке работ, привело к противоположным результатам, т. е. из этого измерения получился вывод, что Земля представляет собой фигуру, вытянутую в направлении полюсов.

Для окончательной проверки теории Ньютона Французская академия наук организовала две экспедиции: одну — в Перу (1735—1742 гг.), где была измерена дуга, пересекающая экватор; другую — в Лапландию (1736—1737 гг.), где были выполнены градусные измерения под широтой около  $66^\circ$ . Результаты обработки материалов этих экспедиций полностью подтвердили теорию Ньютона.

Вопрос о фигуре Земли привлекал в это время чрезвычайно большое внимание ученых всего мира.

Проф. Красовский в своем «Руководстве по высшей геодезии» [31] пишет: «...в эту эпоху успехи геодезии были необходимыми обоснованием больших движений мысли в области физики, механики и астрономии».

С подтверждением теории Ньютона об эллипсоидальности Земли начался новый этап в развитии знаний о фигуре Земли.

Этот этап характерен тем, что в основу научных изысканий были положены два метода изучения фигуры Земли — геометрический и физический.

В принципе геометрический метод остался прежним, за исключением того, что для вывода земного эллипсоида возникла необходимость определять числовые значения двух его параметров, например большой полуоси  $a$  и сжатия  $\alpha$ ; следовательно, минимально необходимое число уравнений градусных измерений стало равным двум.

Геометрический метод определения фигуры Земли иллюстрируется формулой (50.3). Входящий в нее угол — разность широт  $\varphi_2 - \varphi_1$  — представляет собой разность направлений отвесных линий в точках  $A$  и  $B$  или, иначе, направлений силы тяжести. Следовательно, в геометрическом методе используются направления силы тяжести. В физическом методе используется напряжение силы тяжести, выражающееся в сообщаемом ему телом ускорении.

С открытием Ньютоном закона всемирного тяготения стало возможным рассматривать вопрос о форме Земли в целом как физическую задачу равновесия жидкого или вязкого вращающегося тела, все частицы которого взаимно притягиваются по этому закону. Из элементарных рассуждений следует, что в этом случае внешняя фигура Земли должна определяться функцией величины



силы тяжести как равнодействующей силы притяжения и центробежной силы.

Центробежная сила зависит от скорости вращения Земли и расстояния от данной точки до оси вращения; следовательно, при постоянной скорости вращения она закономерно убывает от некоторого максимума на экваторе до нуля на полюсах пропорционально радиусу параллели.

Если бы центробежной силы не было, то при однородной массе Земли сила тяжести во всех ее точках была бы постоянной. Таким образом, изменение силы тяжести зависит от изменения действия центробежной силы. Чем дальше земная поверхность отстоит от оси вращения, тем сильнее влияние центробежной силы, тем больше изменение силы тяжести соответственно изменяется форма поверхности. Отсюда мы приходим к выводу о зависимости фигуры Земли от значений силы тяжести на ее поверхности. Сила же притяжения, являющаяся главной составляющей силы тяжести, зависит и от распределения масс в теле Земли, т. е. от распределения плотности вещества внутри Земли. Поясним это обстоятельство несколько подробнее.

Закон тяготения гласит, что две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними; направление этой силы совпадает с прямой, соединяющей эти точки. В случае тел конечных размеров закон сохраняет свою силу, тогда взаимодействуют все точки гравитирующих тел. Равнодействующая притяжения складывается из притяжения всех элементарных частиц, составляющих тела, а направление совпадает с прямой, соединяющей центры масс.

Совокупность сил притяжения элементарными частицами тела в окружающем его пространстве образует поле тяготения данного тела.

Суммарное действие поля тяготения Земли и центробежной силы образует поле силы тяжести.

Изложенные соображения и сведения позволяют сделать важный вывод, что сила тяжести на земной поверхности—ее величина и направление—зависит от распределения масс внутри Земли; следовательно, и фигура Земли зависит от распределения плотностей вещества, составляющего Землю.

Отсюда следует и другой весьма важный вывод, что теоретически нельзя определить фигуру Земли как планеты; необходимо наличие опытных данных, в той или иной форме определяющих гравитационное поле Земли.

Ньютон, не располагая данными о внутреннем строении Земли, для определения фигуры Земли, т. е. сжатия земного эллипсоида, сделал допущение, что Земля однородна, т. е. плотность ее во всех точках одинакова. Приняв вычисленное им отношение центробежной силы к силе притяжения на экваторе

$$q = \frac{1}{288}, \text{ он для однородной Земли получил сжатие } \alpha \text{ равным } \frac{5}{4} q, \text{ т. е. } \alpha = \frac{1}{230}.$$

Голландский ученый — физик Гюйгенс получал значение сжатия Земли, применяя в общем тот же путь рассуждений, что и Ньютон. Однако, в отличие от вывода Ньютона, Гюйгенсом был рассмотрен случай крайне неоднородной плотности Земли; именно он принял, что вся масса Земли сосредоточена в ее

центре. Иначе говоря, если Ньютон полагал, что притяжение Земли складывается из действия всех частиц, то Гюйгенс положил, что сила притяжения во всех точках поверхности Земли постоянна и направлена к центру планеты, к точке, имеющей массу всей Земли. При этом условии Гюйгенс получил выражение для сжатия  $\alpha = \frac{1}{2}q$ , т. е.  $\alpha = \frac{1}{576}$ .

В обоих выводах сжатия Земли в качестве исходных условий взяты крайние гипотезы о ее внутреннем строении. В действительности, плотность Земли в целом возрастает от поверхности к ее центру. Следовательно, и действительное значение сжатия должно лежать где-то между полученными Ньютоном и Гюйгенсом значениями.

После окончательного установления факта эллипсоидальной формы Земли во многих странах получили большое развитие работы по градусным измерениям и выводам размеров земного эллипсоида. Так, например, в XIX в. было сделано более 20 выводов размеров земного эллипсоида. Этому способствовали, с одной стороны, большой интерес, проявлявшийся учеными всех стран к проблеме фигуры Земли, новые возможности измерения больших дуг, открывшиеся в результате применения метода триангуляции, совершенствование методов геодезической астрономии и, с другой стороны, возраставшие требования к развитию геодезических работ в целях картографирования территорий, одновременно доставлявших данные для определения размеров и формы Земли.

Определения размеров и формы Земли из градусных измерений и после открытия сфероидичности Земли долгое время основывались на чисто геометрическом решении задачи.

Как уже отмечалось, если для определения радиуса Земли, принимаемой за шар, необходимо измерить одну дугу и определить астрономические координаты ее концов, то для вывода фигуры Земли, принимаемой за эллипсоид, нужно измерить две дуги по числу параметров.

Если обозначить длины таких дуг через  $s_1$  и  $s_2$ , то, считая их проложенными по меридиану, на основании (7.1) и (7.11) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = a \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^n}{\rho^n} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right] e^2 - \dots \right\} \\ s_2 &= \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} M d\varphi = a \frac{(\varphi_4 - \varphi_3)^n}{\rho^n} \left\{ 1 - \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_3 + \varphi_4) \right] e^2 - \dots \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (50.4)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  — измеренные астрономические широты концов обеих дуг меридиана.

Решая совместно уравнения (50.4), находим искомые  $a$  и  $e^2$ , определяющие фигуру эллипсоида.

С XIX в. уравнения (50.4) при наличии больше двух дуг решались по способу наименьших квадратов.

При этом считалось, что точность вывода  $a$  и  $e$  зависит от точности измерения длин дуг  $s$  и широт  $\varphi$ , характеризующихся их ошибками, как случайными величинами. Иначе говоря, забегая несколько вперед, влияние уклонений отвесных линий на астрономические широты как бы принималось за случайные ошибки. Но сравнение результатов различных выводов размеров эллипсоида,

полученных из градусных измерений в разных районах и странах, показало, что получающиеся расхождения превосходят величины, которые могли бы быть объяснены ошибками собственно измерений. Анализ полученных выводов привел к заключению, что если бы фигура Земли представляла собой точно эллипсоид вращения, то таких расхождений не должно было бы быть. Отсюда логически вытекало заключение, что если эллипсоид вращения и есть весьма существенное приближение к фигуре Земли по сравнению с шаром, то он все же не представляет собой точно ее фигуру. Дальнейшее изучение результатов градусных измерений привело к заключению, что каждое из них определяет параметры эллипсоида в пределах точности измерений наилучшим образом подходящего к фигуре Земли для той части земной поверхности, на которой выполнены градусные измерения.

Поскольку параметры таких эллипсоидов различались на величины, не объясняемые ошибками измерений, то, естественно, следовал вывод, что фигура Земли может быть представлена эллипсоидом лишь с некоторой степенью приближения и как геометрически более сложная, она не выражается ни одной из поверхностей, рассматриваемых в математике. Таким образом, стало ясно, что определение фигуры Земли — более трудная задача, чем это представлялось ранее, и началась эпоха следующего приближения в изучении Земли как планеты.

Выше показано, что, используя закон всемирного тяготения и другие законы механики, можно при известном условии определить фигуру Земли.

Из рассмотрения работ Ньютона и Гюйгенса вытекало, что для этого нужно знать распределение плотностей в теле Земли. Эти данные, конечно, могут получаться только эмпирически, т. е. из соответствующих видов измерений; они не были известны во времена Ньютона, неизвестны с достаточной подробностью и до сих пор. Но масса Земли и ее строение, зависящие от внутреннего распределения плотностей, определяют однозначно земное притяжение; это взаимосвязанные величины. Отсюда следует, что, зная силу тяжести во всех точках поверхности Земли (ее величину и направление), можно определить ее фигуру.

Иначе говоря, вместо опытных данных, характеризующих распределение и величину плотности масс Земли, можно воспользоваться другими опытными данными — значениями силы тяжести и ее распределением на поверхности Земли. И если мы и до сих пор пока не имеем средств для непосредственного измерения плотности Земли в каждой ее точке, то для измерения силы тяжести на поверхности Земли такие методы существуют и некоторые из них известны еще со времен Галилея. Однако надо иметь в виду, что если известно распределение массы данного тела, то поле тяготения на его поверхности определяется однозначно; наоборот, данному полю тяготения могут соответствовать различные распределения масс. Поэтому гравитационному полю Земли могут соответствовать различные распределения плотностей в ее теле; иначе говоря, значение силы тяжести на земной поверхности однозначно не определяет внутреннего строения Земли.

Основа теории определения формы Земли по результатам измерения силы тяжести была заложена французским математиком Клеро — участником лапландской экспедиции Французской академии наук, который доказал замечательную теорему, устанавливающую изменение силы тяжести на поверхности сфероида в зависимости от широты места и сжатия Земли.

Эта теорема выражается двумя уравнениями, которые мы приводим, удер-

живая малые величины порядка сжатия

$$g_{\varphi} = g_0 + (g_{90} - g_0) \sin^2 \varphi \quad (50.5)$$

и

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} q - \alpha, \quad (50.6)$$

где  $g_{\varphi}$ ,  $g_0$ ,  $g_{90}$  — ускорения силы тяжести под широтой  $\varphi$ , на экваторе и полюсе соответственно;

$q = \frac{\omega^2 a}{g_0}$  — отношение центробежной силы к ускорению силы тяжести на экваторе;

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли;

$\alpha$  — сжатие эллипсоида.

Из предыдущих соображений следует, что для получения (50.5) и (50.6) Клеро должен был задаться некоторым предположением о распределении масс внутри Земли. Он принял следующее: тело состоит из слоев различной плотности, но разграниченных эллипсоидальными поверхностями с малым сжатием; все эти сфероиды имеют общий центр и единую ось вращения; изменение плотностей при переходе от слоя к слою — произвольное; внешняя сфероидическая поверхность тела является поверхностью равновесия, т. е. уровенной поверхностью; вне внешней сфероидической поверхности не имеется никаких притягивающих масс\*.

Позднейшие исследования показали, что несоответствие гипотезы, принятой Клеро о строении Земли, действительному строению относится к наружному слою Земли, к так называемой земной коре, толщина которой, как увидим далее, по современным данным колеблется от 6 до 70 км. Известные сейчас изменения плотностей в слое земной коры вполне объясняют расхождения в значениях силы тяжести, получаемых фактически из измерений и вычисляемых по формуле Клеро (50.5).

Как видно из поставленных условий и из вывода теоремы Клеро, написанные уравнения (50.5) и (50.6) относятся к телу, имеющему форму эллипсоида вращения. Поэтому несовпадение значений ускорений силы тяжести, вычисленных по формуле (50.5) и наблюдаемых, подтверждает отступление фигуры Земли от формы эллипсоида.

Таким образом, по двум независимым путям определения формы Земли — геометрическому, основанному на использовании результатов измерения геометрических элементов поверхности Земли (длин линий, углов и направлений), и физическому, основанному на измерении ускорения силы тяжести на земной поверхности, получено единое заключение, что фигура Земли по форме весьма близка к эллипсоиду вращения, но не совпадает с ним. Применяя описанные методы определения фигуры Земли, следует сделать вывод, что она незначительно, но не пренебрегаемо мало отступает от эллипсоида вращения и имеет, с математической точки зрения, весьма сложную поверхность.

Поскольку и в первом случае и во втором все наблюдения приводились к уровенной поверхности силы тяжести, совпадающей с невозмущенным уров-

---

\* Как показал позднее английский ученый Стокс, эти условия необязательны; достаточно поставить условие, что Земля представляет собой уровенную поверхность.



шении можно было бы говорить о соответствии точности линейных и астрономических измерений и ошибки последних рассматривать как случайные величины. В действительности же ошибка в расстоянии  $s$ , выведенная по астрономическим широтам как  $\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)'' M}{\rho''}$ , получается из вычислений в 5—10 раз больше.

Поясним эти соображения геометрически. Пусть на рис. 99 изображено сечение Земли вдоль некоторого меридиана; в верхнем слое Земли расположено некоторое тело  $T$ , имеющее большую плотность, чем окружающее его вещество. Сечение, показанное сплошной линией, будет сечением эллипсоида, а прямые  $an_a$  и  $bn_b$  — нормальными к поверхности эллипсоида в точках  $a$  и  $b$ .

Под действием избыточного притяжения тела  $T$  отвесные линии окажутся смещенными в направлении к телу  $T$ ; проекции отвесной линии в плоскости меридиана изображены пунктирными прямыми  $an'_a$  и  $bn'_b$ . Пусть  $ab$  — одна из дуг меридиана, взятая для составления уравнения градусного измерения. Углы  $\xi_1$  и  $\xi_2$  между нормальными к эллипсоиду и проекциями отвесных линий на меридианную плоскость называются составляющими уклонения отвесной линии в меридиане.

Обозначая через  $\varphi$  астрономические широты, а через  $B$  геодезические (рис. 99), имеем

$$\varphi - \varphi_1 = (B_2 - B_1) - (\xi_1 + \xi_2).$$

Следовательно, используя в уравнениях (50.4) астрономические широты, мы влияние уклонений отвесных линий, выраженное в нашем случае членом  $(\xi_1 + \xi_2)$ , полагаем как бы вызванным случайными ошибками определения астрономических широт, что, конечно, совершенно неправильно. Как указывалось, ошибки в определении широт характеризуются величиной порядка  $\pm 0,5''$ ; среднее же значение величин  $\xi$  составляет около 3—4".

Естественно, на первый взгляд, было положить, что указанные несоответствия вызываются рельефом местности — избытком масс в горных районах и недостатком в океанических впадинах. Это предположение основывается на гипотезе одинаковой плотности вещества в земной коре, при которой уклонения отвесной линии зависели бы только от рельефа, т. е. от объемов воздействующих масс. Однако это не подтвердилось. Вычисленные на основе этого предположения поправки в астрономические координаты оказались в некоторых случаях во много раз больше расхождений до введения поправок. Тогда в начале XIX в. была выдвинута гипотеза изостатической компенсации, или просто изостазии, согласно которой уже принимался иной закон распределения масс в земной коре. Не останавливаясь на описании гипотезы изостазии, что будет сделано в § 70, отметим, что уже в XIX в. геометрический метод определения фигуры Земли в первоначальном виде постепенно перестает применяться; при обработке градусных измерений начинают принимать во внимание факторы, связанные с физикой Земли, путем вычисления и введения так называемых изостатических поправок в астрономические координаты. Использование гипотезы изостатической компенсации во многих случаях устранило или существенно уменьшило аномальные влияния неравномерного распределения масс в земной коре, но не всегда применение теории изостазии давало удовлетворительные результаты.

Изостатическая компенсация остается предположением, справедливым в той или иной степени. Использование этой теории при обработке астрономо-геодезических сетей показало, что она в какой-то мере и при известных условиях справедлива; но несомненно и то, что ее применение во всех случаях давало возможность учитывать влияние неравномерностей в строении земной коры всегда приближенно, причем степень достоверности и точности вывода изостатических редукций оставалась неизвестной.

При таких условиях математическая обработка результатов астрономо-геодезических измерений не могла осуществляться с необходимой строгостью и точностью.

В связи с этим следует отметить, что даже в первой четверти XX в. высшая геодезия еще не располагала строгой математической теорией обработки всех видов геодезических сетей высокой точности (астрономо-геодезических, нивелирных и гравиметрических) и решения главных научных и научно-технических задач.

Такая строгая теория была создана советской научной школой.

Переходя к краткому описанию научных и научно-технических работ в области высшей геодезии начиная со второй четверти XX в., следует, во-первых, отметить получение в 1928 г. голландским ученым Венинг-Мейнесом формул для вычисления уклонений отвесных линий как функции аномалий силы тяжести. Эти формулы были получены принципиально просто путем нахождения соответствующих производных от формулы Стокса для расстояния от геоида до эллипсоида.

Этим самым был сделан серьезный шаг в области теории изучения фигуры Земли. Но вопросы практического использования этих формул автором не были решены. Для вычисления уклонений отвесной линии по формулам Венинг-Мейнеса необходимо знать аномалии силы тяжести для всей поверхности Земли. Следует заметить, что выполнение работ по измерению силы тяжести на Земле существенно отставало от успехов теории. В СССР, в соответствии с постановлением Совета Труда и Оборона, с 1932 г. началась планомерная общая гравиметрическая съемка на территории страны. Гравиметрические работы на море в начале второй четверти XX в., по существу, имели опытный характер.

Кроме того, поскольку формулы Венинг-Мейнеса получены из формул Стокса, то условие, поставленное при выводе формулы Стокса, что сила тяжести должна быть измерена на поверхности геоида и что вне поверхности геоида нет внешних притягивающих масс, остается и для формул Венинг-Мейнеса. Поскольку для реальной земной поверхности это не соблюдается, то применение формул Венинг-Мейнеса, так же как и формул Стокса для определения фигуры геоида, продолжало оставаться недостаточно строгим.

В связи с большим развитием геодезических работ на такой огромной территории, какой обладает СССР, перед советскими учеными-геодезистами встала задача разработки теории и методов точной математической обработки результатов геодезических измерений. Эллипсоид Бесселя, оказавшийся не подходящим для территории СССР, заменен в 1944 г. эллипсоидом Красовского, вывод числовых параметров которого осуществлен на основании наиболее обширных материалов геодезических измерений. Обстоятельно получены координаты исходного геодезического пункта в Пулково, что определило положение эллипсоида в теле Земли.

Для обеспечения строгости обработки триангуляции проф. Красовский предложил все результаты измерений на местности точно проектировать на поверхность референц-эллипсоида. В связи с этим возникла необходимость точ-

ного решения редуционной проблемы, в которой наиболее сложным, нерешенным вопросом было нахождение величин, определяющих редукции за переход от непосредственных измерений на земной поверхности к соответствующим элементам на поверхности референц-эллипсоида. Этими величинами являются: расстояния от точек земной поверхности до поверхности эллипсоида по нормальям к последнему и уклонения отвесной линии в каждом геодезическом пункте. Для решения этой задачи М. С. Молоденский, по идее Ф. Н. Красовского, разработал метод астрономо-гравиметрического нивелирования, позволяющий с заданной точностью вычислять названные величины на основе совместного использования результатов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и без знания аномалий силы тяжести для всей поверхности Земли. Этим самым, казалось бы, непреодолимые трудности, вызванные отсутствием мировой гравиметрической съемки, были устранены.

Научные работы Молоденского определили новый этап в развитии теории фигуры Земли. Он показал, что определение фигуры геоида только по одним астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным без применения гипотез о строении Земли невозможно. Следовательно, невозможно и точное решение редуционной проблемы путем проектирования на геоид, а с геоида на референц-эллипсоид, тогда как такой путь решения задачи до работ Молоденского считался единственно возможным. Молоденский по-новому поставил и решил проблему изучения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля. Разработанная теория определяет непосредственно фигуру физической поверхности Земли и внешнее гравитационное поле Земли. Изучение фигуры геоида, считавшееся ранее одной из основных задач высшей геодезии, становится необязательным.



Ф. Н. Красовский

Разработанное Молоденским строгое построение теории изучения фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля обеспечивает строгое решение научных и практических задач высшей геодезии без привлечения каких-либо гипотез. Как следствие этого, точность и достоверность решения геодезических задач стали зависеть только от ошибок и полноты непосредственных геодезических измерений, но не от приближенности и слабых мест теории, как это было до работ Молоденского.

Теория Молоденского и разработанные на ее основе конкретные методы изучения фигуры Земли предусматривают совместное использование в качестве опытных данных всех видов наземных измерений: угловых, линейных нивелирных, гравиметрических и астрономических. Каждый из указанных видов измерений стал обязательной составной частью комплекса основных геодезических работ. В последние годы сюда присоединились методы космической геодезии. Таким образом, современный этап научных исследований и практических работ по определению фигуры Земли характеризуется органическим сочетанием и взаимосвязью геометрического и физического методов решения всех геодезических задач на основе общей математически строгой теории.



## § 51. Некоторые сведения о строении Земли

Выше, в § 50, показано, что фигура Земли зависит от внутреннего строения и распределения масс, составляющих нашу планету.

Изложим некоторые весьма краткие сведения о внутреннем строении Земли.

Строгой теории, основанной на непосредственных экспериментальных данных о внутреннем строении Земли, ее происхождении, еще нет, а имеющиеся суждения носят характер гипотез, основанных на изучении факторов, связанных со строением Земли и различно объясняющих наблюдаемые явления и факты. Можно сказать, что почти все гипотезы по этому вопросу основаны на использовании и анализе косвенных данных, к которым относятся гравитационное и магнитное поля Земли, скорость распространения сейсмических волн, колебания земных полюсов, приливные деформации земной поверхности, изучение тепловых потоков Земли, электропроводность и многие другие.

Эти косвенные данные допускают различные толкования, позволяют иметь по различным вопросам различные точки зрения, вплоть до диаметрально противоположных. Поэтому дальнейшие исследования могут внести существенные коррективы в современные представления о строении Земли и приводимые ниже сведения. Дополнительно отметим, что многое в отношении наружной части Земли — земной коры может быть окончательно установлено в результате сверхглубокого бурения, проекты которого находятся в стадии разработки и осуществления.

Отметим характеристики Земли, достаточно хорошо согласующиеся с наблюдениями.

1. С точностью до малых величин порядка сжатия Земля в целом имеет эллипсоидальную форму, совпадающую с фигурой равновесия тела, состоящего из вещества, по своим свойствам близкого к вязкой жидкости.

2. Результаты обработки наблюдений искусственных спутников Земли показали, что сжатие Земли не вполне соответствует фигуре равновесия вращающегося тела. Это означает, что в теле Земли существуют долговременные напряжения, вызывающие отклонения от равновесного состояния. Отсюда следует, что земное вещество обладает прочностью, отличающей его по свойствам от жидких и вязких тел. В то же время на основе изучения ряда явлений (приливы, колебания полюса) следует, что земное вещество довольно близко по своим свойствам к идеально упругому телу. Общий вывод, который делают геофизики, заключается в том, что вещество Земли обладает и вязкостью, и твердостью и, следовательно, оно не может быть признано ни идеальной жидкостью, ни идеально упругим телом. Такое вещество называют **упруго-вязким**. Тело из такого вещества обладает тем свойством, что при воздействии на него силы оно в течение некоторого времени реагирует как упругое; если же действие силы происходит в течение времени, значительно большего  $\tau$ , то тело начинает реагировать как вязкое. Время  $\tau$  называется периодом **релаксации** вещества. Земное вещество, вероятно, обладает этим интересным свойством.

3. Некоторые постоянные Земли, установленные в настоящее время, имеют значения (размеры эллипсоида Красовского, см. § 2):

- а) масса —  $6 \cdot 10^{27}$  г;
- б) средняя плотность —  $5,52$  г/см<sup>3</sup>;
- в) момент инерции —  $0,331$  М·а<sup>2</sup>;
- г) объем —  $1\,083\,320$  млн. км<sup>3</sup>;

- д) длина экватора — 40 076 км;
- е) длина меридиана — 40 008 км;
- ж) поверхность Земли — 510 млн. км<sup>2</sup>;
- з) поверхность Мирового океана — 361 млн. км<sup>2</sup>;
- и) поверхность суши — 149 млн. км<sup>2</sup>;
- к) ускорение силы тяжести на экваторе — 978 500 мгал.

Известный интерес в плане настоящего учебника могут представлять и следующие характеристики Земли как планеты:

- среднее расстояние от Земли до Солнца — 149 509 000 км;
- длина земной орбиты — 939 120 000 км;
- средняя скорость движения Земли по орбите — 29,76 км/с;
- скорость движения точки экватора вследствие суточного вращения Земли — 465 м/с;
- среднее расстояние от Земли до Луны — 384 395 км.

4. Плотность вещества в теле Земли возрастает от поверхности к центру, что подтверждается (§ 50) величиной сжатия. Этот вывод определенно вытекает из приведенных выше значений моментов инерции, полученных из обработки наблюдений за движением искусственных спутников Земли. Это, наконец, следует из приведенного значения средней плотности Земли. Наибольшая плотность горных пород, находящихся на земной поверхности (в верхнем ее слое, доступном для человека), не превышает 3,3 г/см<sup>3</sup>. Поэтому превышение более чем в полтора раза средней плотности Земли над плотностью самых твердых поверхностных горных пород свидетельствует о значительном увеличении плотности ее в центре.

5. Долгое время, вплоть до начала XX в., господствовала гипотеза о том, что Земля некогда была в огненно-жидком состоянии. Например, Ф. Н. Красовский пишет [37]: «Предположение, что в крайне отдаленные времена Земля была огненно-жидкой, является очень вероятным».

В настоящее время большинством геофизиков и геологов эта гипотеза отрицается. В результате новых научных исследований большинство ученых считают, что Земля возникла из газопылевого облака относительно невысокой температуры. Но независимо от той или другой гипотезы можно считать, что, кроме самой верхней оболочки Земли — земной коры, тело нашей планеты состоит из слоев, по форме близких к уровенным, причем плотность этих слоев возрастает по направлению к центру и находится в состоянии гидростатического равновесия. Это подтверждается и многими косвенными данными (например, скорость распространения сейсмических волн и др.). Однако переход плотностей от слоя к слою неравномерный.

6. По современным данным, внутреннее строение Земли таково: верхняя часть Земли, называемая земной корой (рис. 100), имеет неодинаковую толщину — под материками она равна в среднем 30—40 км и, как правило, не выходит за пределы 20—70 км, а в океанах толщина земной коры около 6 км. Нижнюю границу земной коры называют границей Мохорови-

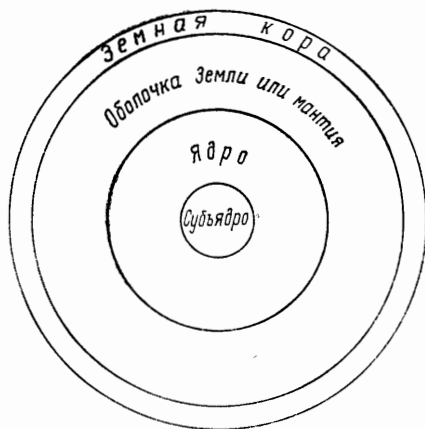
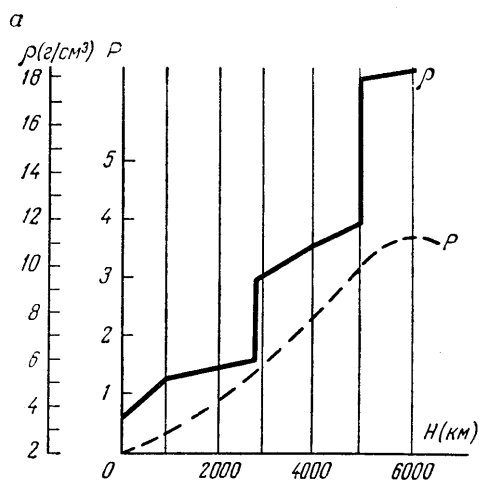


Рис. 100

чича, по фамилии югославского геофизика, впервые установившего ее в начале XX в.

Следующий слой Земли, расположенный ниже земной коры, — оболочка или мантия Земли. Ее толщина определяется слоем от подкоровой поверхности до глубины 2900 км.



Часть земного шара, расположенная ниже мантии, т. е. на глубине от 2900 до 5100 км, называется ядром Земли.

Самая внутренняя часть Земли, лежащая ниже глубины 5100 км, называется внутренним ядром, или субъядром.

Как уже отмечалось, слои, расположенные ниже земной коры на одинаковых глубинах, имеют одинаковую плотность, образующую их вещество; однако изменение плотностей при переходе от слоя к слою неравномерно и на отдельных глубинах имеет скачкообразный характер. Конечно, точных данных о распределении плотностей внутри Земли ниже подкорового вещества нет, но имеющиеся косвенные наблюдения позволяют с некоторой степенью приближения установить эти изменения, в общих чертах соответствующие описанному выше строению.

На рис. 101, а приведен один из графиков вероятных изменений плотности  $\rho$  и давления  $P$  внутри Земли.

В толще земной коры плотность составляющих ее пород на одинаковых глубинах резко различается; кроме того, сама физическая поверхность имеет неправильную форму, вызывающую в разных частях избытки и недостатки

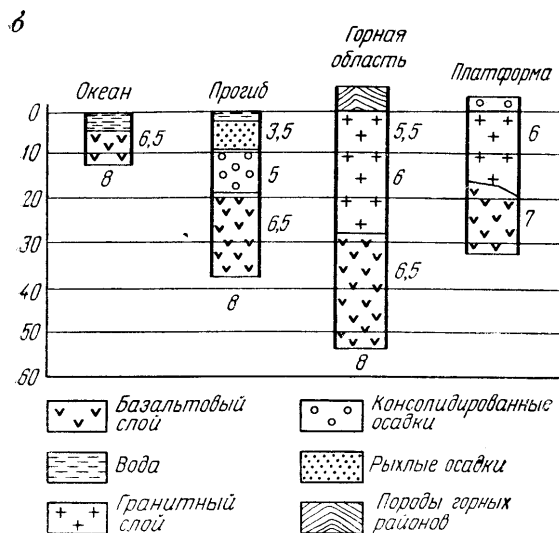


Рис. 101

масс. В этом смысле приходится говорить о неравномерном распределении масс внутри земной коры. Если бы не было этих неравномерностей, то фигура Земли совпала бы с эллипсоидом с точностью до первой степени сжатия. Очевидно, в этом случае и направления отвесной линии совпали бы с направлениями нормалей к эллипсоиду при условии, конечно, правильных его размеров и ориентировки в теле Земли.

Сжатие Земли в целом, как мы видели, зависит от распределения масс внутри всей Земли; отступления от общей фигуры Земли, которой является

эллипсоид вращения, вызываются неравномерностями размещения масс внутри земной коры. Учитывая это обстоятельство, сообщим некоторые дополнительные сведения о строении земной коры.

Земная кора отличается сложным строением вследствие того, что она представляет собой граничную область между твердой Землей, гидросферой и атмосферой; она принимает на себя энергию, поступающую от Солнца. Без каких-либо внешних препятствий на ней могут происходить перемещения пород как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Происходящие процессы внутри Земли непрерывно воздействуют на строение земной коры, изменяя ее; само вещество земной коры непрерывно пополняется за счет недр Земли.

Земная кора по структуре делится на два вида: континентальный и океанический.

Континентальный вид имеет, как указывалось, толщину в среднем 30—40 км. Земную кору на континентах разделяют на три основных слоя: верхний слой — осадочный, средний — гранитный, нижний слой, называемый базальтовым (рис. 101, б). Плотность гранитного слоя  $\rho_m \approx 2,7$  г/см<sup>3</sup>, плотность базальтового  $\rho_m \approx 3,0$  г/см<sup>3</sup>. Океаническая кора характерна значительно меньшей толщиной; она по составу и свойствам ближе к веществу базальтового слоя континентальной коры. Как правило, чем больше внешний рельеф Земли (горные районы), тем глубже нижняя граница земной коры. Описанный выше континентальный тип строения коры наиболее ярко проявляется именно в горных областях. Обратная картина наблюдается в океаническом типе. В платформенных областях и в районах прогиба земной коры толщина ее имеет некоторое среднее значение. Самые верхние слои земной коры состоят преимущественно из пластов осадочных горных пород. Толщина этих пластов в редких случаях достигает 15—20 км, а в отдельных районах их нет совсем.

Таким образом, можно говорить о наличии трех слоев земной коры: осадочного, гранитного и базальтового.

Если допустить, что плотность земной коры примерно одинакова, то следует сделать вывод о том, что значения силы тяжести должны соответствовать толщине земной коры и, в частности, внешнему рельефу местности. В местах перехода от материков к океанам уклонения отвесных линий должны быть наибольшими и достигать значительных величин, но этого не наблюдается. Последнее дало основание выдвинуть уже упоминавшуюся гипотезу изостатического равновесия, согласно которой видимые избыточные массы (континенты и горы) компенсируются на некоторой глубине недостатком массы таким образом, что суммарная масса на единицу площади до глубины компенсации остается одинаковой. Эта гипотеза согласуется с показанным на рис. 101, б схематическим изображением главных типов строения коры.

Наконец отметим, что земная кора находится в непрерывном движении. Часть этих движений имеет ясно выраженный периодический характер, например приливные деформации. Другая часть движений земной коры отличается однообразием в течение длительного периода времени. Установлено, что любая часть земной коры испытывала или испытывает вертикальные движения, имеющие колебательный характер.

Различают два типа колебательных движений, характерных для платформенных и геосинклинальных областей земной поверхности.

Платформенным свойственны медленные вертикальные движения, охватывающие территории протяженностью в сотни и тысячи километров; геосинклинальным — большой размах и большая скорость движений, происходящих как на

значительных, так и на коротких расстояниях. Наряду с вертикальными перемещениями, разрывами, складками и другими изменениями вертикального направления в геосинклинальных областях выявляются горизонтальные перемещения вещества земной коры, надвиги одних пород на другие и т. п. Большинство этих явлений связано с процессами, происходящими внутри Земли. Поэтому изучение и правильная научная интерпретация этих явлений имеет чрезвычайно важное значение для познания строения, развития, структуры и состава недр Земли, являющихся богатейшей сокровищницей человечества.

Выше приведено весьма схематическое и очень обобщенное описание внутреннего строения Земли; существует огромное число промежуточных состояний ее внутреннего строения и, конечно, других физических и геометрических характеристик как материального тела. Это естественно; за миллиарды лет существования нашей планеты она непрерывно испытывала воздействие многообразных внешних и внутренних влияний, вызывающих непрерывный процесс различных по характеру и интенсивности изменений. Это и определяет сложность внутреннего состояния Земли и невозможность представления ее строения простой схемой без существенных обобщений.

Геодезия играет важную роль в решении проблемы изучения строения Земли; ее задача — точнейшие измерения для количественной фиксации и характеристики происходящих деформаций на земной поверхности по особым программам, учитывающим современные взгляды и знания о строении коры и происходящих в ней процессах.

Чрезвычайно важным обстоятельством, благоприятным для решения основной научной задачи геодезии, является то, что земная кора, в которой сосредоточены неправильности в распределении масс, непосредственно определяющие отступления реального гравитационного поля от нормального, составляет около 1% объема Земли и по массе — около 0,5% массы Земли. Отсюда следует, что вызываемые неправильностями земной коры отступления геоида от земного эллипсоида и соответственно отклонения отвесных линий являются малыми величинами. Это, конечно, облегчает их изучение как при теоретических исследованиях, так и при постановке и выполнении измерений на земной поверхности.

# Глава VIII

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

### § 52. Некоторые сведения о силе тяжести.

#### Понятие о методах измерения силы тяжести

Рассмотрим на поверхности Земли некоторую материальную точку  $A$  (рис. 102), на которую действуют две силы: сила земного притяжения  $AF$  и центробежная сила  $AQ$ , направленная перпендикулярно к оси вращения  $PO$ . Равнодействующая этих двух сил называется силой тяжести. Если обозначить через  $F$  силу земного притяжения, через  $Q$  — центробежную силу, возникающую вследствие вращения Земли, и через  $\vec{g}$  — силу тяжести, то последняя выразится векторной суммой

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}. \quad (52.1)$$

Если принять Землю за шар и ввести обозначения:  $m$  — масса точки  $A$ ;  $M$  — масса Земли;  $R$  — радиус Земли;  $f$  — постоянная тяготения, т. е.  $f = 6,7 \cdot 10^{-8}$  в единицах CGS, то, согласно Ньютоновскому закону всемирного тяготения, сила притяжения Земли на некоторую материальную точку  $A$ , находящуюся на поверхности Земли, выразится формулой

$$F = f \frac{mM}{R^2}. \quad (52.2)$$

Центробежная сила  $Q$  выражается формулой

$$Q = \frac{v^2}{\rho}, \quad (52.3)$$

где  $v$  — линейная скорость точки;  $\rho$  — расстояние ее от оси вращения;  $m$  — масса точки  $A$ .

Если через  $\omega$  обозначить угловую скорость вращения Земли, то  $v = \omega \rho$ . Поэтому

$$Q = m\omega^2 \rho.$$

Примем  $m = 1$ , тогда

$$Q = \omega^2 \rho. \quad (52.4)$$

Угловая скорость вращения Земли  $\omega$  определится

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164}, \quad (52.5)$$

где 86 164 — число средних секунд в звездных сутках.

Сила тяжести характеризуется ускорением, которое приобретает свободно падающее тело. За единицу ускорения принимается гал, определяемый соотношением

$$1 \text{ гал} = 1 \text{ см/сек}^2.$$

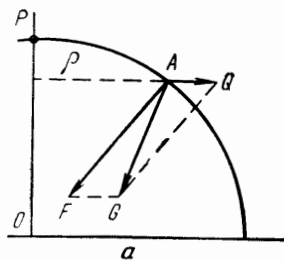


Рис. 102

Это ускорение, которое сообщает массе в один грамм сила в одну дину. Изменение силы тяжести от полюсов до экватора составляет всего около 5 гал.

Измерения ускорения силы тяжести в настоящее время производятся с большой точностью — до тысячных долей гала. Поэтому, для удобства, за единицу ускорения силы тяжести обычно принимают одну тысячную долю гала, которую называют *м и л л и г а л о м*, а в некоторых случаях даже одну миллионную долю гала, называемую *м и к р о г а л о м*. Итак,

$$1 \text{ мгал} = 0,001 \text{ гал},$$

$$1 \text{ мкгал} = 0,000001 \text{ гал}.$$

В последующем для краткости ускорение силы тяжести будем называть силой тяжести.

Знание значений силы тяжести, как и результатов других видов геодезических измерений, необходимо для решения основных задач геодезии.

Основная ориентирная линия при всех видах геодезических измерений — отвесная линия, т. е. направление силы тяжести.

Заметим, что, кроме силы притяжения Земли  $F$  и центробежной силы  $Q$ , на материальную точку  $A$  действуют силы притяжения небесных тел, в первую очередь Солнца и Луны, и притяжение массы атмосферы, окружающей Землю. Эти влияния не постоянны: они малы, зависят от расположения светил относительно точки  $A$  и изменяющегося распределения воздушных масс вокруг земного шара и при необходимости могут учитываться путем введения соответствующих поправок в значения силы тяжести. Поэтому силу тяжести  $g$  можно рассматривать только как равнодействующую двух сил  $F$  и  $Q$  согласно (52.1).

Строго говоря, составляющие силы тяжести  $F$  и  $Q$  не постоянны. Они изменяются вследствие приливо-отливных явлений на материках и океанах, колебаний земных полюсов, перераспределения масс Земли, изменения скорости вращения Земли, упоминавшегося перераспределения воздушных масс и т. д. При современной точности измерения силы тяжести эти влияния следует считать незначительными, но не настолько, чтобы ими пренебрегать. В дальнейшем будем считать Землю абсолютно твердым телом, вращающимся вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью. Тогда в каждой точке поверхности Земли сила тяжести будет постоянной и определяться выражением (52.1), в котором для данной точки силы  $F$  и  $Q$  постоянны.

Внешним гравитационным полем Земли называют совокупность сил тяжести в окружающем Землю пространстве и на ее поверхности. Следовательно, будем полагать внешнее гравитационное поле Земли постоянным.

Значение силы тяжести  $g$  определяется главным образом силой притяжения Земли  $F$ ; даже на экваторе, где центробежная сила, согласно (50.3), достигает максимума, отношение  $\frac{Q_{\text{экв}}}{F_{\text{экв}}}$  равно приблизительно  $\frac{1}{288}$ , т. е. величине порядка сжатия Земли. Кроме того, угловая скорость вращения Земли  $\omega$ , определяющая центробежную силу, весьма точно измерена из астрономических наблюдений. Поэтому изучение гравитационного поля Земли фактически сводится к изучению поля притяжения Земли.

В основе теории изучения гравитационного поля Земли, и в частности поля притяжения, лежат основные законы динамики и закон всемирного тяготения.

Силы взаимного тяготения обладают замечательными свойствами: они действуют всюду, где есть материя. Силы притяжения зависят от массы тел и не зависят от их физических или химических свойств.

Силы взаимного притяжения между отдельными частицами, рассеянными во Вселенной, являются основными в формировании небесных тел; закон всемирного тяготения в свое время был самым совершенным примером научного обобщения, охватывающим одной простой формулой бесчисленное множество фактов и положившим научные основы объяснению бесконечного и многообразного движения тел во Вселенной. Формирование внешнего вида Земли происходило под действием гравитационных сил. Поэтому изучение гравитационного поля Земли и его свойств имеет очень важное научное и практическое значение. В высшей геодезии изучение реального гравитационного поля Земли на основе результатов геодезических измерений позволяет решать основную задачу геодезии — определение фигуры и формы Земли. Знание гравитационного поля Земли необходимо при расчетах, связанных с запуском и вычислением орбит искусственных спутников Земли и траекторий полетов межконтинентальных ракет.

Результаты измерений силы тяжести, совместно с результатами других видов геодезических измерений, широко используются в геологии, астрономии и в некоторых других науках.

Созданная Эйнштейном теория тяготения, основанная на теории относительности, внесла принципиальные изменения во взгляды на силы тяготения. Использование этой теории приводит к поправкам к движениям, рассчитанным на основе закона Ньютона; однако в применении к рассматриваемым далее вопросам высшей геодезии эти поправки столь ничтожны, что практически еще не имеют никакого значения. Поэтому теория изучения гравитационного поля Земли, излагаемая ниже, исходит из законов Ньютона в их первоначальном виде.

Изучение гравитационного поля Земли основывается на одном из разделов математической физики — теории потенциала (§ 53 и далее).

В заключение настоящего параграфа дадим понятие о методах измерения силы тяжести.

Методы измерения силы тяжести основаны на наблюдении и количественной фиксации разнообразных физических явлений, совершающихся под действием силы тяжести. В принципе любое из указанных явлений может быть использовано для измерения силы тяжести; выбор того или иного явления и соответствующего ему метода определяется из условия обеспечения наибольших удобств практики измерений и точности.

Первым произвел определение ускорения силы тяжести итальянский физик и астроном Галилей (XVI—XVII века).

Представим себе свободное падение тела в пространстве с некоторой высоты. Если измерять длину пути, проходимого этим телом в определенные промежутки времени, например в 1 с, то получим непосредственно значение ускорения силы тяжести. Известные опыты Галилея заключались в измерении длины пути, пройденного падающим телом в течение первой секунды падения. Согласно законам равномерно ускоренного движения, этот путь равен  $1/2g$ .

Главное затруднение при использовании этого метода для точного измерения ускорения силы тяжести заключалось в сложности измерения с высокой точностью, необходимой в этом случае, расстояний и малых промежутков времени. В настоящее время указанная трудность преодолена, и этот метод стал практически применим только в последнее время. Для характеристики требо-



ваний к точности измерений достаточно указать, что длину пути падения тела надо знать до 0,1 мкм, а время — до  $2 \cdot 10^{-8}$  с.

Современные методы измерения ускорения силы тяжести делятся на динамические и статические.

Динамические способы основаны на измерении времени движения различных тел. В статических методах тело, участвующее в измерениях, находится в момент измерения, т. е. в момент фиксации соответствующего отсчета, в покое; измеряются смещение тела или давление, вызванное весом тела.

Динамические способы измерения силы тяжести могут заключаться в измерение времени течения процессов движений при различных физических явлениях, например:

а) периода колебаний свободного маятника, качающегося под действием силы тяжести;

б) периода колебания маятника, совершающего колебания под действием силы тяжести и упругой силы подвеса;

в) скорости падения тел;

г) частоты колебания струны, натянутой телом с постоянным весом, и др.

Большое применение на практике получил динамический способ, основанный на измерении периода качания свободного маятника. Устройства, служащие для измерения силы тяжести и основанные на этом принципе, называются маятниковыми приборами.

Статические методы могут быть различные; для примера и иллюстрации укажем на механический метод, основанный на измерении изменений положения физического тела, находящегося в равновесии под действием силы тяжести и упругой силы пружины; основную идею этого метода поясним далее.

Приборы, служащие для измерения силы тяжести статическим методом, называются гравиметрами.

Следует заметить, что измерения ускорения силы тяжести относятся к числу весьма точных измерений, требующих исключительно внимательного подхода при их выполнении и учете воздействия разнообразных факторов, которые могут оказывать влияние на точность результатов наблюдений.

Изложим идею определения силы тяжести из наблюдений колебаний свободного маятника.

Известно, что при малых амплитудах период качания маятника  $S$  выражается следующей зависимостью от длины маятника  $l$  и ускорения силы тяжести  $g$  в данной точке:

$$S = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (52.6)$$

Периодом колебания маятника  $S$  в гравиметрии называется время, за которое маятник из одной крайней точки переместится в другую, или время между двумя последовательными его прохождениями через положение равновесия. Угол отклонения маятника от его положения равновесия  $\alpha$  называется амплитудой качания маятника.

Из формулы (52.6) легко получаем:

$$g = \frac{\pi^2 l}{S^2}. \quad (52.7)$$

Таким образом, зная длину маятника и период качания, можно вычислить искомое ускорение силы тяжести  $g$ . Такое определение ускорения силы тяжести называется «абсолютным», так как оно не зависит от определений силы тяжести в других пунктах.

Формула (52.7) справедлива для математического маятника, т. е. маятника, представляющего собой материальную точку, подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити. В действительности употребляется физический маятник; при использовании формулы (52.7) для физического маятника необходимо определить так называемую приведенную длину маятника, т. е. длину математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический маятник. Определение приведенной длины маятника с необходимой точностью представляет большие практические трудности. Кроме того, для получения силы тяжести указанным выше способом должны быть исключены сложные систематические влияния. Все это, вместе взятое, делает задачу «абсолютного» определения силы тяжести весьма сложной и тонкой. Выполнить ее можно только в стационарных условиях; каждое такое определение представляет собой, по существу, ответственную научно-исследовательскую работу.

Задача сильно упрощается, если поставить целью определение относительного ускорения силы тяжести, т. е. разности ускорений силы тяжести в данном и каком-либо другом пункте, значение силы тяжести для которого известно. Такие пункты, относительно которых определяется сила тяжести в других пунктах, называются сходными. Определение относительного ускорения силы тяжести заключается в следующем: находят период колебания маятника в исходном пункте, для которого ускорение силы тяжести известно, затем измеряют периоды того же маятника в других пунктах, в которых должно быть определено ускорение силы тяжести.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{на исходном пункте —} & S_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \\ \text{на первом определяемом пункте —} & S_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} \\ \text{на втором определяемом пункте —} & S_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_2}} \end{aligned} \right\} \quad (52.8)$$

Отсюда

$$\frac{S_0^2}{S_1^2} = \frac{g_1}{g_0},$$

$$\frac{S_0^2}{S_2^2} = \frac{g_2}{g_0},$$

.....

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{S_0^2}{S_1^2} g_0 \\ g_2 &= \frac{S_0^2}{S_2^2} g_0 \end{aligned} \right\} \quad (52.9)$$

Формулы (52.9) позволяют определять ускорение силы тяжести  $g_1$ ,  $g_2$  и т. д. без знания приведенной длины маятника; тем самым влияние систематической ошибки, зависящей от незнания точной длины маятника, исключается. Важно отметить, что при относительном определении силы тяжести довольно полно исключаются и другие постоянные систематические ошибки, присущие

прибору данной конструкции. Точность определения относительного ускорения силы тяжести в этом случае зависит только от случайных ошибок в определении периода качания маятников и изменений систематических ошибок и постоянных прибора, которые могут произойти после наблюдений на исходном пункте.

Применением соответствующей методики и конструкции прибора ослабляется влияние и этих ошибок.

Точность окончательного вывода периода качания маятника после учета всех поправок характеризуется ошибкой около  $\pm 0,00000004$  с; соответствующая ошибка в определении ускорения силы тяжести равна приблизительно  $\pm 0,2$  мгал.

Для уяснения идеи статического метода изложим принципиальную схему измерения силы тяжести прибором, в котором используется упругая сила пружины.

Пусть мы имеем тело с некоторой постоянной массой; вес этого тела определяется силой тяжести. Определим вес этого тела  $p$  в некотором исходном пункте, для которого известно значение силы тяжести  $g_0$ .

Вес этого тела в другой точке, для которой требуется определить силу тяжести, будет иной; назовем его через  $p_1$ , а искомую силу тяжести в определяемой точке — через  $g_1$ . Очевидно, изменение веса тела  $(p_1 - p) = \Delta p$  является следствием изменения силы тяжести  $(\Delta g) = g_1 - g_0$ . Следовательно, будем иметь:

$$(\Delta g) = f(\Delta p),$$

$$g_1 = g_0 + (\Delta g).$$

Простейшая возможная зависимость между  $(\Delta g)$  и  $(\Delta p)$  имеет вид

$$(\Delta g) = a \Delta p + b.$$

Определение постоянных  $a$  и  $b$  может быть произведено посредством измерения веса тела в трех точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  сила тяжести для которых известна. Если обозначить:

$$g_B - g_A = (\Delta g_1) \text{ и } p_B - p_A = \Delta p_1,$$

$$g_C - g_B = (\Delta g_2) \text{ и } p_C - p_B = \Delta p_2,$$

то

$$(\Delta g_1) = a \Delta p_1 + b,$$

$$(\Delta g_2) = a \Delta p_2 + b,$$

из которых легко находятся неизвестные коэффициенты  $a$  и  $b$ .

Измерение веса тела должно быть произведено при помощи прибора, работа которого не зависит от силы тяжести; таким прибором могут служить пружинные весы, так как упругая сила пружины не зависит от силы тяжести.

Определение силы тяжести при помощи гравиметров занимает мало времени и производится с высокой точностью.

### § 53. Потенциал силы притяжения

Пусть в пространстве имеем две материальные точки  $A$  и  $B$  с координатами  $a, b, c$  и  $x, y, z$  (рис. 103). Обозначим массу точки  $A$  через  $m$ , массу точки  $B$  примем равной единице. Расстояние между точками обозначим через  $r$ .

Согласно закону всемирного тяготения, сила взаимного притяжения точек  $A$  и  $B$  выразится формулой

$$F = f \frac{m}{r^2}. \quad (53.1)$$

Расстояние  $r$  равно

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2. \quad (53.2)$$

Обозначим составляющие силы  $F$  по осям координат через  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , а углы, образуемые вектором  $BA$  с осями координат, —  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Очевидно,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  будут проекциями вектора  $F$  на оси координат  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ .

Из рис. 103

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (53.3)$$

(на рис. 103 для простоты построения начало координат совмещено с одним из концов вектора  $F$  без изменения направления осей).

Но

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a-x}{r} \\ \cos \beta &= \frac{b-y}{r} \\ \cos \gamma &= \frac{c-z}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (53.4)$$

Подставляя (53.4) в (53.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = f_m \frac{a-x}{r^3} \\ F_y &= F \cos \beta = f_m \frac{b-y}{r^3} \\ F_z &= F \cos \gamma = f_m \frac{c-z}{r^3} \end{aligned} \right\}. \quad (53.5)$$

Сила притяжения и создаваемое ею напряжение является вектором, который определяется как величиной, так и направлением в пространстве. Поэтому характеристика силового поля в пространстве выражается тремя уравнениями (53.5).

Однако при определенных условиях поле сил может быть выражено одной функцией от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , как независимых переменных.

Возьмем функцию

$$V = f \frac{m}{r} \quad (53.6)$$

и найдем частные производные ее по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$ , явно входящим в нее через  $r$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -f \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dx}.$$

Производная  $\frac{\partial r}{\partial x}$  вычисляется путем дифференцирования выражения (53.2)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{a-x}{r}, \quad (53.7)$$

следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = fm \frac{a-x}{r^3};$$

аналогично этому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= fm \frac{b-y}{r^3} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= fm \frac{c-z}{r^3} \end{aligned} \right\}. \quad (53.8)$$

Сравнивая (53.8) и (53.5), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z \end{aligned} \right\}. \quad (53.9)$$

Функция  $V$ , частные производные которой по прямоугольным координатам притягиваемой точки равны составляющим силы притяжения по осям координат, называется потенциальной функцией, или просто потенциалом притяжения.

Рассмотрим более общий случай, когда точка притягивается некоторым телом. На рис. 104 изображено тело  $\tau$ ,

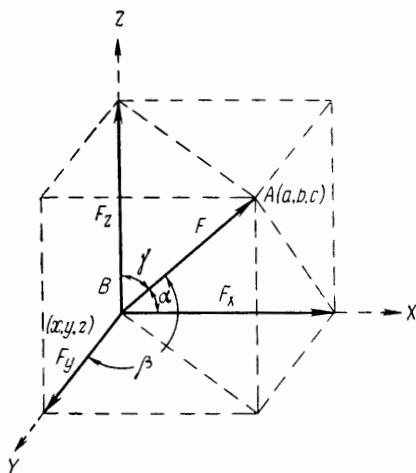


Рис. 103

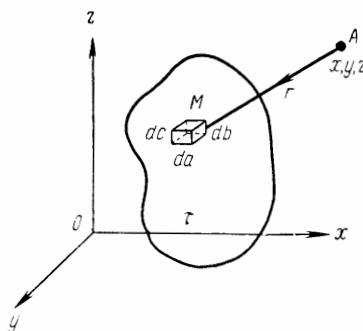


Рис. 104

создающее вокруг себя силовое поле притяжения. Определим напряжение этого поля в точке  $A$ . Разобьем объем тела  $\tau$  на элементарные объемы.

$$d\tau = da db dc. \quad (53.10)$$

Обозначим через  $\delta$  плотность в единице массы текущей точки  $M$ , т. е.

$$\delta = \frac{dm}{d\tau}. \quad (53.11)$$

Тогда будем иметь

$$dm = \delta da db dc. \quad (53.12)$$

Аналогично с (53.5) проекциями силы притяжения элементарной массы в точке  $M$  на точку  $A$  будут:

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= f \frac{(a-x)}{r^3} dm = f \frac{\delta(a-x)}{r^3} da db dc \\ dF_y &= f \frac{(b-y)}{r^3} dm = f \frac{\delta(b-y)}{r^3} da db dc \\ dF_z &= f \frac{(c-z)}{r^3} dm = f \frac{\delta(c-z)}{r^3} da db dc \end{aligned} \right\} \quad (53.13)$$

Суммируя действие элементарных масс по всему объему тела, получаем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= f \iiint \frac{\delta(a-x)}{r^3} da db dc \\ F_y &= f \iiint \frac{\delta(b-y)}{r^3} da db dc \\ F_z &= f \iiint \frac{\delta(c-z)}{r^3} da db dc \end{aligned} \right\} \quad (53.14)$$

Потенциал притяжения тела  $M$  на точку  $A$  выразится формулой

$$V = f \iiint \frac{\delta}{r} da db dc. \quad (53.15)$$

В этом легко убедиться, если вычислить производные  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$  и  $\frac{\partial V}{\partial z}$ , которые будут равны соответственно  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ .

Вводя в последнее выражение массу, можем написать

$$V = f \int \frac{dm}{r}. \quad (53.16)$$

В (53.16) интегрирование выполняется по всему объему тела  $\tau$ . Следовательно, пределы интегрирования определяются в зависимости от формы тела.

Если под телом понимать Землю, то выражение (53.16) будет представлять потенциал притяжения Земли на внешнюю точку; в этом случае интегрирование должно выполняться по всему объему Земли.

При бесконечном удалении тела от притягиваемой точки, т. е. когда расстояние  $r$  неограниченно велико по сравнению с размерами тела, выражения для силы притяжения и потенциальной функции напишутся:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{fM}{r^2} \\ V &= \frac{fM}{r} \end{aligned} \right\} \quad (53.17)$$

где  $M$  — масса тела.

Из последних выражений имеем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| = fM. \quad (53.18)$$

Функции, удовлетворяющие равенствам (53.17), называют регулярными на бесконечности.

До сих пор мы полагали, что притягиваемая точка находится вне притягивающего тела. Допустим теперь, что притягиваемая точка расположена внутри

притягивающего тела. Тогда величина  $r$  в выражении (53.15) может принять малые значения и стремиться к нулю. При  $r$ , стремящемся к нулю, его значение будет становиться величиной первого порядка малости. Следовательно, выражение

$$\frac{da \, db \, dc}{r}$$

будет величиной второго порядка малости. Первые производные от потенциала, содержащие интеграл вида

$$\iiint \delta \frac{a-x}{r^3} da \, db \, dc, \quad (53.19)$$

в этом случае будут конечными и непрерывными, так как, если  $(a-x)$  будет стремиться к нулю, числитель станет величиной четвертого порядка малости, а знаменатель — третьего. Поэтому отношение их будет первого порядка малости.

Отсюда вытекает существенный вывод: потенциал притяжения Земли и его первые производные всюду конечны и однозначны; можно доказать, что они будут также непрерывными.

Введение понятия потенциала приводит к тому, что вместо получения и исследования трех функций, выражающих компоненты силы по осям координат, стало возможным находить и исследовать одну функцию. Выяснилось, что потенциальная функция обладает замечательными свойствами, использование которых оказалось чрезвычайно плодотворным для решения многих научных проблем, в том числе и проблемы изучения фигуры Земли.

#### § 54. Разложение потенциала земного притяжения в ряд

Использование выражения для потенциала силы земного притяжения в виде

$$V = f \int \frac{dm}{r}$$

встречает известные трудности. Более удобное выражение для потенциала  $V$  можно получить путем разложения  $1/r$  в ряд.

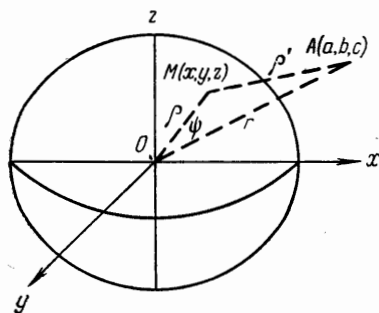


Рис. 105

Примем систему пространственных прямоугольных координат с началом в центре Земли и с осью  $z$ , совпадающей с осью вращения Земли (рис. 105). Тогда плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью земного экватора.

Напишем выражение для потенциала притяжения

$$V = f \int \frac{dm}{\rho'}, \quad (54.1)$$

где  $\rho'$  — расстояние притягиваемой точки  $A(a, b, c)$  от текущей точки  $M(x, y, z)$  с элементарной массой  $dm$ .

Обозначим расстояния от точек  $A$  и  $M$  до начала координат  $O$  соответственно  $r$  и  $\rho$ .

С введенными обозначениями имеем:

$$\rho'^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ax + by + cz) + x^2 + y^2 + z^2, \quad (54.2)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \right\}. \quad (54.3)$$

Тогда

$$\rho'^2 = r^2 - 2r\rho \frac{ax + by + cz}{r\rho} + \rho^2 = r^2 \left( 1 - \frac{2\rho}{r} \frac{ax + by + cz}{r\rho} + \frac{\rho^2}{r^2} \right). \quad (54.4)$$

Из треугольника  $OMA$  (см. рис. 105)

$$\rho'^2 = r^2 - 2r\rho \cos \psi + \rho^2. \quad (54.5)$$

Сравнивая (54.4) с (54.5), находим

$$\frac{ax + by + cz}{r\rho} = \cos \psi. \quad (54.6)$$

Подставляя (54.6) в (54.4), получаем,

$$\rho'^2 = r^2 \left( 1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \psi + \frac{\rho^2}{r^2} \right). \quad (54.7)$$

Для получения выражения  $\frac{1}{\rho'}$ , входящего в (54.1), возведем (54.7) в степень  $-\frac{1}{2}$  и разложим правую часть по биному Ньютона, тогда получим ряд по возрастающим степеням  $\frac{\rho}{r}$ .

Ограничиваясь членом с  $\frac{\rho^2}{r^2}$ , получаем

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\rho}{r} \cos \psi + \frac{\rho^2}{2r^2} (3 \cos^2 \psi - 1) + \dots \right\}. \quad (54.8)$$

Попутно укажем, что коэффициенты при степенях  $\frac{\rho}{r}$  являются так называемыми сферическими функциями, применяемыми в теории потенциала.

Подставляя найденное значение  $\frac{1}{\rho'}$  в (54.1), находим

$$V = \frac{f}{r} \int dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \cos \psi dm + \frac{f}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \psi - 1) dm + \dots \quad (54.9)$$

Первый интеграл, распространенный на весь объем притягивающего тела будет равен его массе  $M$ .

Второй интеграл, принимая во внимание (54.6), можно представить так:

$$\frac{f}{r^2} \int \rho \cos \psi dm = \frac{f}{r^2} \int \rho \frac{ax}{r\rho} dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \frac{by}{r\rho} dm + \frac{f}{r^2} \int \rho \frac{cz}{r\rho} dm. \quad (54.10)$$

Но координаты центра массы тела (центра инерции) определяются формулой

$$x' = \frac{\int x dm}{\int dm}. \quad (54.11)$$



Аналогичные выражения получаются для других осей координат. Так как начало координат нами было принято в центре массы Земли, то  $x' = 0$ . Принимая во внимание, что

$$\int dm = M, \quad (54.12)$$

получаем

$$\int x dm = 0. \quad (54.13)$$

Аналогичные формулы получаются по другим осям координат. Тогда первый интеграл правой части (54.10) будет

$$\frac{f}{r^2} \int \rho \frac{ax}{r\rho} dm = \frac{f}{r^3} \int ax dm = \frac{fa}{r^3} \int x dm = 0.$$

По тем же соображениям будут равны нулю и остальные два интеграла (54.10).

Следовательно,

$$\int \rho \cos \psi dm = 0. \quad (54.14)$$

Таким образом, второй член разложения потенциала силы притяжения в ряд равен нулю.

Рассматривая третий интеграл выражения (54.9)

$$\int \rho^2 (3 \cos^2 \psi - 1) dm = \int \left\{ \frac{3}{r^2} (ax + by + cz)^2 - \rho^2 \right\} dm, \quad (54.15)$$

замечаем, что при возведении в квадрат трехчлена  $(ax + by + cz)$  появится, в частности, интеграл вида

$$\int ax by dm = ab \int xy dm. \quad (54.16)$$

Интегралы вида  $\int xy dm$  называются произведениями инерции. При расположении координатных осей, совпадающих с главными осями инерции, они равны нулю. Поэтому (54.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int \left\{ \frac{3}{r^2} (ax + by + cz)^2 - \rho^2 \right\} dm &= \frac{1}{r^2} \int \{ 3(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - \rho^2 r^2 \} dm = \\ &= \frac{1}{r^2} \int \{ 3(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - \rho^2 (a^2 + b^2 + c^2) \} dm. \end{aligned} \quad (54.17)$$

Соединяя вместе члены, содержащие  $a^2$ , затем  $b^2$  и  $c^2$ , разбиваем интеграл на три части, из которых первую напомним так:

$$\frac{1}{r^2} \int a^2 (3x^2 - \rho^2) dm = \frac{a^2}{r^2} \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm. \quad (54.18)$$

Аналогично две другие части представляются интегралами:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{r^2} \int (2y^2 - x^2 - z^2) dm, \\ \frac{c^2}{r^2} \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm. \end{aligned}$$

Из механики известно, что главные моменты инерции  $A$ ,  $B$ ,  $C$  относительно осей координат выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm; \quad C = \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\}. \quad (54.19)$$

Легко проверить, что

$$\left. \begin{aligned} \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm &= B + C - 2A \\ \int (2y^2 - x^2 - z^2) dm &= C + A - 2B \\ \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm &= A + B - 2C \end{aligned} \right\}. \quad (54.20)$$

Поэтому, принимая во внимание (54.18) и (54.20), интеграл (54.15) примет вид

$$\frac{1}{r^2} [a^2 (B + C - 2A) + b^2 (C + A - 2B) + c^2 (A + B - 2C)]. \quad (54.21)$$

Введем теперь геоцентрические координаты — широту  $\Phi$  и долготу  $L$ , отсчитываемую от плоскости  $xz$ . Тогда на основании (4.15) и (4.32) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \Phi \cos L \\ b &= r \cos \Phi \sin L \\ c &= r \sin \Phi \end{aligned} \right\}. \quad (54.22)$$

Далее, заменяя  $\cos^2 L$  и  $\sin^2 L$  через косинусы кратных дуг, получаем:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \Phi (1 + \cos 2L) \\ b^2 &= \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \Phi (1 - \cos 2L) \\ c^2 &= r^2 \sin^2 \Phi \end{aligned} \right\}. \quad (54.23)$$

Заменяя в (54.21) величины  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  через их выражения (54.23), группируя члены, содержащие  $\cos 2L$ , после некоторых преобразований получаем выражения для третьего интеграла в (54.9)

$$\left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{3}{2} (B - A) \cos^2 \Phi \cos 2L. \quad (54.24)$$

Принимая во внимание (54.24), а также (54.14), получаем разложение потенциала  $V$  в ряд по (54.9) в окончательном виде

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{3f}{4r^3} (B - A) \cos^2 \Phi \cos 2L. \quad (54.25)$$

Первый член полученного выражения (54.25) представляет собой потенциал шара с массой, равной массе Земли.

Второй член, зависящий от широты, представляет собой влияние сжатия Земли или, иначе говоря, влияние возрастания масс от полюса к экватору. Третий член представляет собой влияние неравномерного распределения масс по долготе.

Таким образом, полученная формула (54.25) справедлива и для трехосной Земли.

Если рассматривать Землю как тело вращения и моменты инерции относительно осей, расположенных в плоскости экватора, положить равными между собой, т. е.  $A = B$ , то третий член в формуле (54.25) пропадает; соответственно изменится в этой формуле и второй член, и для данного случая формула (54.25) переписывается

$$V = \frac{fM}{2} + (C - A) (1 - 3 \sin^2 \Phi). \quad (54.25')$$

Выше были упомянуты сферические функции, которые находят себе широкое применение во многих вопросах математической физики, в частности, в теории потенциала и решении основных задач высшей геодезии на основе астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и спутниковых наблюдений.

Перепишем (54.8) так:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\rho}{r} \cos \psi + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \psi) + \dots \right]. \quad (54.26)$$

Ряд (54.26) сходится при  $\rho < r$ .  $P_n(\cos \psi)$  — выражение, являющееся функцией  $\cos \psi$  порядка  $n$ , представляет собой один из видов сферических функций; это многочлены степени  $n$  от  $\cos \psi$ . Они называются многочленами Лежандра.

В более общем виде формула (54.26) перепишется

$$\frac{1}{\rho'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (54.27)$$

Выражение для потенциала притяжения, принимая во внимание (54.1) и (54.27), в общем виде напишется:

$$V = f \int \frac{dm}{r} = f \int \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi) dm \quad (54.28)$$

или, учитывая выражения для первых трех членов ряда, данные формулой (54.8):

$$V = f \int \frac{dm}{r} + f \int \frac{\rho'}{r^2} \cos \psi dm + f \int \frac{\rho^2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) dm + \\ + f \sum_{n=3}^{n=\infty} \int \frac{\rho^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi) dm. \quad (54.29)$$

Интегрируя первые три члена, получим формулу (54.25), конечно, без последнего члена, т. е.

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \cos^2 \Phi) + \\ + \frac{3f}{4r^3} (B - A) \sin^2 \Phi \cos 2L. \quad (54.30)$$

Последовательное изучение вопросов программы данного курса дается без использования сферических функций. Приведенные самые начальные и элементарные понятия об этом виде специальных функций и их применение даются для общего ознакомления, которое может быть полезно при более детальном изучении теоретических вопросов геодезии по первоисточникам и специальным трудам (например, [1], [12]; [39] и многие другие).

## § 55. Основные свойства потенциала притяжения

Пусть задана материальная точка  $B$  с координатами  $x, y, z$ ; на бесконечно малом расстоянии  $ds$  от  $B$  возьмем другую материальную точку  $B_1$  с координатами  $x + dx, y + dy$  и  $z + dz$ .

Очевидно,

$$BB_1 = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad (55.1)$$

но

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos(s, x) \\ dy &= ds \cos(s, y) \\ dz &= ds \cos(s, z) \end{aligned} \right\}, \quad (55.2)$$

где  $(s, x)$ ,  $(s, y)$  и  $(s, z)$  — углы, образуемые направлением  $ds$  с осями координат  $x, y, z$ .

Тогда потенциал  $V$  силы притяжения, как функция координат  $x, y, z$ , получит приращение при перемещении из точки  $B$  в точку  $B_1$ , равное полному дифференциалу

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad (55.3)$$

Или, имея в виду (53.9),

$$dV = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (55.4)$$

Принимая во внимание (55.2), (55.4) и (53.3),

$$\begin{aligned} dV &= F ds \{ \cos(s, x) \cos(F, x) + \cos(s, y) \cos(F, y) + \\ &\quad + \cos(s, z) \cos(F, z) \}. \end{aligned} \quad (55.5)$$

Но выражение, стоящее в фигурных скобках, есть косинус угла между направлением силы тяжести  $F$  и направлением элемента  $ds$ , т. е.  $\cos(F, s)$ . Поэтому

$$dV = F ds \cos(F, s). \quad (55.6)$$

Так как  $F \cos(F, s) = F_s$  — составляющая силы  $F$  по направлению элемента  $ds$ , то

$$dV = F_s ds. \quad (55.7)$$

Из равенств (55.6) и (55.7) вытекает ряд важных свойств потенциальной функции.

Как известно из механики, элементарная работа силы  $F$  при перемещении точки на расстояние  $ds$  будет  $F ds$ ; отсюда следует, что бесконечно малое приращение потенциала есть работа, которую совершает сила  $F$  при перемещении единицы массы на расстояние  $ds$ .

При конечном перемещении единицы массы между некоторыми точками  $M$  и  $N$  работа  $R$ , совершаемая силой  $F$ , будет равна разности потенциалов в этих точках, т. е.

$$R = \int_N^M F ds \cos(F, ds) = \int_N^M dV = V_M - V_N = \Delta V. \quad (55.8)$$

Предположим теперь, что точка  $N$  удаляется в бесконечность. Потенциал  $V_N$  будет стремиться к нулю, а работа  $R$  будет равна потенциалу в точке  $M$ , т. е.

$$R = V_M. \quad (55.9)$$

Иными словами, потенциал силы притяжения в данной точке равен работе, которую необходимо совершить силе притяжения при перемещении единичной массы из бесконечности в данную точку\*.

На основании (55.7) можно написать

$$\frac{dV}{ds} = F_s, \quad (55.10)$$

т. е. производная от потенциала притяжения по любому направлению равна составляющей силы, действующей в этом направлении. Следовательно, из потенциала силы может быть получена ее слагающая по любому направлению.

Из уравнения (55.6) следует, что  $dV$  зависит от косинуса угла между направлением силы тяжести и направлением перемещения точки; отсюда следует, что потенциал  $V$  может получать приращение положительное, отрицательное и равное нулю.

Рассмотрим два предельных случая:

1. Если  $\cos(F, s) = 0$ , что соответствует перемещению точки под прямым углом к направлению  $F$ , то и работа силы будет равна нулю, т. е.

$$dV = 0. \quad (55.11)$$

Интегрируя (55.11), находим

$$V = \text{пост.} = C, \quad (55.12)$$

но  $V$  — функция координат  $x, y, z$ , поэтому (55.12) представляет собой уравнение поверхности, точнее семейство поверхностей, которые мы будем получать, давая  $C$  различные значения. Очевидно, эта поверхность может быть получена, если представить себе, что точка с единичной массой будет перемещаться во всех направлениях под прямым углом к направлению силы тяжести; в этом случае будет описана поверхность, обладающая свойством, что потенциал будет всюду сохранять постоянное значение.

Следовательно, поверхности, удовлетворяющие уравнению (55.12), обладают тем свойством, что сила притяжения в любой точке будет направлена по нормали к этой поверхности, а составляющие силы по касательной к поверхности в любой точке равны нулю. Такие поверхности называются уровнями.

2. Если  $\cos(F, s) = 1$ , то это значит, что перемещение точки происходит по направлению действия силы, потенциал получает максимальное приращение и его выражение имеет вид

$$dV = F ds. \quad (55.13)$$

Если же перемещение происходит в направлении, противоположном действию силы, то, очевидно, в этом случае

$$\cos(F, s) = -1$$

---

\* Этот вывод справедлив не для всех видов потенциальной функции: в частности, он не применим к потенциалу силы тяжести.

$$dV = -F ds. \quad (55.14)$$

Следовательно, знак приращения потенциала зависит от направления перемещения точки; в одном случае потенциал будет увеличиваться (приращение положительное), а в другом случае уменьшаться (приращение потенциала отрицательное).

Рассмотрим две бесконечно близкие уровенные поверхности, определяемые уравнениями  $V = C$  и  $V + dV = C_1$  (рис. 106). Допустим, что единичная масса переместилась из  $B$  в  $B_1$  по направлению силы  $F$ . Тогда на основании (55.13) напомним

$$dV = F ds, \quad (55.15)$$

но в данном случае  $ds$  представляет собой расстояние между взятыми уровнями поверхностями. Обозначая это расстояние через  $dh$ , получаем

$$\frac{dV}{dh} = F; \quad dV = F dh; \quad dh = \frac{dV}{F}. \quad (55.16)$$

Полученные выражения (55.16) соответствуют случаю перемещения точки по нормали к центру тела, т. е. когда

$$\cos(F, s) = +1.$$

При перемещении точки в обратном направлении, т. е. при  $\cos(F, s) = -1$ , выражения (55.16) примут вид:

$$-\frac{dV}{dh} = F; \quad dV = -F dh; \quad dh = -\frac{dV}{F}. \quad (55.17)$$

Из равенств (55.16) и (55.17) следует, что расстояния между двумя близкими уровнями поверхностями в общем случае не равны в разных точках, а обратно пропорциональны силе, действующей в этих точках.

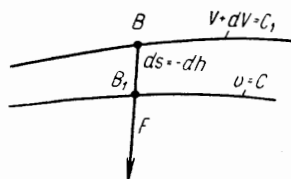


Рис. 106

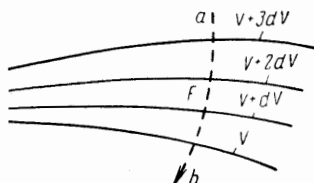


Рис. 107

Из изложенного свойства потенциальной функции вытекает еще существенное обстоятельство. Пусть рис. 107 изображает сечение уровенных поверхностей, соответствующих уравнениям:

$$V + dV, \quad V + 2dV, \quad V + 3dV;$$

конечно, они, согласно (55.16), изобразятся кривыми, «непараллельными» между собой\*.

Кривая  $ab$  пересекающая уровенные поверхности ортогонально, называется **силовой линией**. Иначе, силовыми линиями называются кривые,

\* В данном и последующих случаях под непараллельными поверхностями будем понимать такие, расстояния между которыми, считаемые по нормали к одной из поверхностей, в различных точках разные.



Отношение  $\frac{dm}{d\sigma}$  называется плотностью простого слоя и обозначается  $\mu$ .  
Таким образом

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta h = \mu. \quad (56.5)$$

Тогда потенциал простого слоя выразится

$$V = f \int \frac{\mu}{r} d\sigma. \quad (56.6)$$

3. Потенциал притяжения однородного простого сферического слоя на материальную точку (внешнюю и внутреннюю).

Пусть имеем сферу радиуса  $R$ , поверхность которой соответствует условиям, определяющим простой слой (рис. 109).

Возьмем две точки  $A$  и  $A_1$ : одну находящуюся вне сферы (точка  $A$ ) и другую — внутри сферы (точка  $A_1$ ).

Для определения положения точек на сфере воспользуемся системой сферических координат. За полярную ось примем диаметр сферы, совпадающий с направлением из центра сферы  $O$  на точку  $A$  (или  $A_1$ ). Точки  $N$  и  $S$  назовем северным и южным полюсами соответственно.

Положение некоторой точки  $M$  определится сферическими координатами  $\psi$  и  $\lambda$ .

Согласно (56.6), потенциал однородного простого сферического слоя равен

$$V = f \iint \frac{\mu}{r} d\sigma; \quad (56.7)$$

в данном случае следует принять:

для внешней точки  $A$

$$r = MA = r,$$

для внутренней точки  $A_1$

$$r = MA_1 = r_1,$$

а также

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi d\lambda. \quad (56.8)$$

Расстояние от центра сферы до точки  $A$  обозначим через  $\rho$ , а для точки  $A_1$  — через  $\rho_1$ .

Из рис. 109 следует, что

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}, \quad (56.9)$$

с учетом (56.8) и (56.9) выражение (56.7) примет вид

$$V = f\mu \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \psi d\lambda d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (56.10)$$

Заметим, что пределы интегрирования, распространяющиеся на всю поверхность сферы, устанавливаются от 0 до  $\pi$  для полярного расстояния  $\psi$  и от 0 до  $2\pi$  по долготе  $\lambda$ . Интегрируя по  $\lambda$ , получаем

$$V = 2\pi f\mu \int_0^\pi \frac{R^2 \sin \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R \cos \psi}}. \quad (56.11)$$



Из (56.9) дифференцированием по  $\psi$  находим

$$dr = \frac{R\rho \sin \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (56.12)$$

Помножив обе части последнего выражения на  $R/\rho$ , получим

$$\frac{R}{\rho} dr = \frac{R^2 \sin \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (56.13)$$

Учитывая (56.13), выражение (56.11) переписываем так:

$$V = 2\pi f\mu \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{R}{\rho} dr = 2\pi f\mu \frac{R}{\rho} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr = 2\pi f\mu \frac{R}{\rho} (r_{\max} - r_{\min}). \quad (56.14)$$

Установленные пределы интегрирования  $r_{\max}$  и  $r_{\min}$  соответствуют  $\psi = \pi$  и  $\psi = 0$ , что легко усматривается из рис. 109:  
для внешней точки  $A$

$$\left. \begin{aligned} r_{\max} &= \rho + R \\ r_{\min} &= \rho - R \\ r_{\max} - r_{\min} &= 2R \end{aligned} \right\}, \quad (56.15)$$

для внутренней точки  $A$

$$r'_{\max} - r'_{\min} = 2\rho. \quad (56.16)$$

На основании (56.14) и (56.15) получим окончательное выражение для потенциала однородного простого сферического слоя на внешнюю точку

$$V = 4\pi f\mu \frac{R^2}{\rho} \quad (56.17)$$

и на внутреннюю точку

$$V = 4\pi f\mu R. \quad (56.18)$$

Введем в полученные формулы массу сферического слоя

$$M = 4\pi R^2 \mu. \quad (56.19)$$

Получим для внешней точки

$$V = \frac{fM}{\rho}. \quad (56.20)$$

Сравнивая (56.20) с выражением потенциала точечной массы (53.6), делаем вывод, что однородный сферический слой создает во внешнем пространстве такой же потенциал, который был бы создан массой  $M$ , сосредоточенной в центре сферы.

Из соображений симметрии следует, что притяжение слоя будет направлено от притягиваемой точки  $A$  по направлению к центру сферы  $O$ , т. е. по  $\rho$ .

Дифференцируя (56.20) по  $\rho$ , получаем

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{fM}{\rho^2}, \quad (56.21)$$

т. е. однородный сферический слой притягивает во внешнем пространстве по закону Ньютона, как точечная масса, расположенная в центре сферы.

Знак в правой части (56.21) показывает, что  $F$  и  $\rho$  направлены в противоположные стороны.

Вводя массу  $M$  сферического слоя в выражение для потенциала на внутреннюю точку, на основании (56.18) и (56.19) получим

$$V = f \frac{M}{R}. \quad (56.22)$$

Последнее выражение при данной массе сферического слоя и радиусе  $R$  постоянно и не зависит от положения внутренней точки, которое определяется расстоянием  $\rho$ . Дифференцируя это выражение по  $\rho$ , находим силу притяжения слоем внутренней точки

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0. \quad (56.23)$$

Таким образом, сферический слой внутренней точки не притягивает.

4. Потенциал притяжения точки материальным шаром. Здесь также рассмотрим два случая: материальная точка находится вне шара и материальная точка расположена внутри шара.

Предварительно исследуем притяжение однородного слоя конечной толщины, который будем рассматривать как сумму бесконечного числа бесконечно тонких концентрических слоев.

При рассмотрении потенциала простого слоя мы имели дело с поверхностной плотностью  $\mu$ , которая определялась из выражения

$$\mu = \frac{dm}{d\sigma}, \quad (56.24)$$

где  $dm$  — элемент массы, приходящейся на элемент поверхности  $d\sigma$ .

Объемная плотность  $\delta$  определится

$$\delta = \frac{dm}{d\tau}, \quad (56.25)$$

где  $d\tau$  — элемент объема.

Если  $dR$  — толщина взятого сферического слоя, то

$$d\tau = d\sigma dR. \quad (56.26)$$

Поэтому, принимая во внимание (56.5) и (56.26),

$$dm = \mu d\sigma = \delta d\sigma dR \quad (56.27)$$

или

$$\mu = \delta dR. \quad (56.28)$$

Рассмотрим первый случай: потенциал притяжения простого слоя на внешнюю точку, согласно (56.17), имеет вид

$$V = 4\pi f\mu \frac{R^2}{\rho}.$$

Допустим, что притягивающие массы объемной плотности  $\delta$  заключены между внутренней сферой радиуса  $R_1$  и внешней сферой, радиус которой  $R$ .

Тогда, учитывая соотношения (56.17) и (56.28) и интегрируя в пределах от  $R_1$  до  $R$ , получаем для потенциала слоя

$$V = 4\pi f \frac{\delta}{\rho} \int_{R_1}^R R^2 dR = \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho} (R^3 - R_1^3). \quad (56.29)$$

Введем в последнее выражение массу слоя. Масса слоя  $M$  выразится как произведение его объема на плотность

$$M = \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_1^3) \delta. \quad (56.30)$$

Тогда для потенциала слоя получим

$$V = f \frac{M}{\rho}. \quad (56.31)$$

Потенциал шара получится, если в (56.29) положить  $R_1 = 0$ , тогда

$$V = \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho} R^3 \quad (56.32)$$

или, принимая во внимание, что масса шара равна

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta, \quad (56.33)$$

приходим к формуле (56.31).

Сила притяжения выразится формулой

$$F = \frac{\partial V}{\partial \rho} = - \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho^2} R^3. \quad (56.34)$$

Итак, шар, состоящий из концентрических однородных слоев, притягивает так, как будто вся его масса сосредоточена в центре. Иначе говоря, шар создает во внешнем пространстве потенциал, равный потенциалу точки с массой  $M$ , расположенной в его центре.

Теперь допустим, что притягивающая точка  $A$  расположена внутри шара на расстоянии  $\rho$  от центра  $O$  (рис. 110). Проведем через  $A$  концентрическую сферу, которая разделит массу на две части: массу слоя  $s_0$ , имеющего потенциал  $V_0$ , и массу шара  $s_1$ , имеющего потенциал  $V_1$ . Очевидно, слой  $s_0$ , по отношению к которому точка  $A$  является внутренней, не притягивает точку.

На основании (56.18) и (56.13) получим

$$V_0 = 4\pi f \delta \int_{\rho}^R R dR = 2\pi f \delta (R^2 - \rho^2). \quad (56.35)$$

Согласно (56.29),

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi f \frac{\delta}{\rho} (\rho^3 - R_1^3).$$

Потенциал слоя получится

$$V = V_0 + V_1 = \frac{2}{3} \pi f \delta \left( 3R^2 - \rho^2 - 2 \frac{R_1^3}{\rho} \right). \quad (56.36)$$

Для шара  $R_1 = 0$  и тогда

$$V = \frac{2}{3} \pi f \delta (3R^2 - \rho^2). \quad (56.37)$$

Дифференцируя (56.37) по  $\rho$ , получаем силу притяжения  $F$

$$F = \frac{dV}{d\rho} = -\frac{4}{3} \pi f \delta \rho. \quad (56.38)$$

Масса  $m$  шара, ограниченного сферической поверхностью радиуса  $\rho$ , равна

$$m = \frac{4}{3} \pi \delta \rho^3.$$

Поэтому выражение для силы притяжения  $F$  (56.38) примет вид

$$F = -f \frac{m}{\rho^2}. \quad (56.39)$$

Следовательно, на основании (56.39) можно сделать вывод, что и в случае внутренней точки притяжение действует по закону Ньютона, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния и прямо пропорционально притягивающей массе с той только оговоркой, что в данном случае притягивает не вся масса шара, а только та, которая расположена внутри сферической поверхности, проходящей через точку  $A$ . Точка  $A$  притягивается при этом так, как если бы вся масса внутреннего слоя (радиуса  $\rho$ ) была сосредоточена в центре шара.

Из (56.38) очевидно, что притяжение массы всего шара действует по другому закону, т. е. прямо пропорционально расстоянию  $\rho$  от точки  $A$  до центра  $O$ ; в центре шара  $\rho = 0$  и, следовательно, сила притяжения также равна нулю.

Получим выражения для потенциала притяжения  $V$  и силы притяжения для случая, когда притягиваемая точка расположена на поверхности шара. Очевидно, в этом случае в соответствующих формулах следует положить  $\rho$  равным  $R$ .

Делая указанную подстановку в формулы для потенциала (56.32) и (56.37) и в формулы для силы притяжения (56.34) и (56.38), получаем одинаковый результат, т. е.

$$V = \frac{4}{3} \pi f \delta R^2, \quad (56.40)$$

$$F = \frac{dV}{d\rho} = -\frac{4}{3} \pi f \delta R.$$

Отсюда можно сделать вывод, что потенциал силы притяжения и его первая производная (составляющая силы притяжения) при пересечении границы тела однозначны и меняются непрерывно, без разрыва.

Вычислим вторые производные от потенциала для точки на поверхности шара, используя его выражения, полученные для положения точки вне и внутри шара.

Из (56.34) имеем

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \frac{dV}{d\rho} = -\frac{d}{d\rho} \frac{4}{3} \pi f \delta \frac{R^3}{\rho^2} = \frac{8}{3} \pi f \delta \frac{R^3}{\rho^3} \quad (56.41)$$

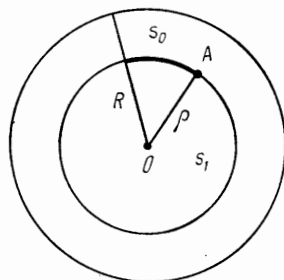


Рис. 110

или, при  $\rho = R$ ,

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{8}{3} \pi f \delta. \quad (56.42)$$

Из (56.38) получаем

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \frac{dV}{d\rho} = - \frac{d}{d\rho} \frac{4}{3} \pi f \delta \rho = - \frac{4}{3} \pi f \delta. \quad (56.43)$$

Таким образом, значения вторых производных от потенциала при выходе притягиваемой точки на поверхность шара из внешнего пространства и изнутри различаются на величину  $4\pi f\delta$ .

Э о значит, что вторая производная от потенциала, взятая по направлению нормали, при прохождении через поверхность шара имеет разрыв и изменяется скачком на величину  $4\pi f\delta$ . Исследования показали, что и в более общем случае, когда на поверхности, разделяющей две среды, плотность  $\delta$  меняется скачком, вторые производные потенциала также испытывают скачок. Это свойство вторых производных от потенциала имеет важное принципиальное значение.

### § 57. Уравнения Лапласа и Пуассона

Напишем потенциал силы притяжения

$$V = f \int \frac{dm}{r}. \quad (57.1)$$

Образует вторые производные по координатам

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Дифференцируя выражение (53.13)

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = f \int \frac{a-x}{r^3} dm, \quad (57.2)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -f \int \left[ \frac{1}{r^3} + 3 \frac{(a-x)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right] dm. \quad (57.3)$$

Так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{(a-x)}{r},$$

то находим окончательно

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -f \int \left[ \frac{1}{r^3} - 3 \frac{(a-x)^2}{r^5} \right] dm. \quad (57.4)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -f \int \left[ \frac{1}{r^3} - 3 \frac{(b-y)^2}{r^5} \right] dm \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -f \int \left[ \frac{1}{r^3} - 3 \frac{(c-z)^2}{r^5} \right] dm \end{aligned} \right\}. \quad (57.5)$$

Складывая полученные вторые производные, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (57.6)$$

Уравнение (57.6) называется уравнением Лапласа.

Символически уравнение Лапласа пишется так:

$$\Delta_2 V = 0. \quad (57.7)$$

Обычно символ

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называют оператором Лапласа.

Уравнение Лапласа справедливо для точек пространства, расположенных вне притягивающего тела. Это следует из того, что если притягиваемая точка лежит внутри тела, то разности  $(a - x)$ ,  $(b - y)$  и  $(c - z)$ , а следовательно, и  $r$  могут стремиться к нулю. В этом случае подынтегральное выражение в (57.4) в пределе обращается в 0/0.

Приведем вывод более общего уравнения Пуассона для случая, когда притягиваемая точка находится внутри тела.

Допустим, что вокруг притягиваемой точки, расположенной внутри тела, описана малая сфера конечного радиуса, но столь малого, что плотность вещества внутри этой сферы можно было бы считать одинаковой. Заметим, что притягиваемая точка должна располагаться внутри этой сферы, но необязательно в центре; сама сфера должна полностью находиться внутри тела.

Обозначим:

$V_1$  — потенциал притяжения тела на притягиваемую точку, но без выделенной в теле сферы;

$V_2$  — потенциал притяжения сферы.

Тогда полный потенциал  $V$  всего тела выразится формулой

$$V = V_1 + V_2, \quad (57.8)$$

а оператор Лапласа для  $V$  — формулой

$$\Delta_2 V = \Delta_2 V_1 + \Delta_2 V_2, \quad (57.9)$$

но для  $V_1$  будет справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta_2 V_1 = 0, \quad (57.10)$$

так как для него значение расстояния  $r$  нигде в нуль обращаться не может. Потенциал  $V_2$  сферы, очевидно, представляет собой потенциал притяжения шара на внутреннюю точку, полученный в § 56. Поэтому, согласно (56.37), имеем

$$V_2 = \frac{2}{3} \pi f \delta (3R^2 - \rho^2).$$

Для нашего случая  $R$  — постоянный радиус сферы, а  $\rho$  определяется как функция координат из выражения

$$\rho^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2, \quad (57.11)$$

$\delta$  — плотность вещества внутри выделенной в теле сферы.

Для вычисления  $\Delta_2 V_2$  первоначально находим первую производную

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{4}{3} \pi f \delta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Из (57.11) легко вычисляем

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = -(a - x).$$

Поэтому

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{4}{3} \pi f \delta (a - x).$$

Дифференцируя еще раз по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = -\frac{4}{3} \pi f \delta. \quad (57.12)$$

Так как правая часть полученного выражения не зависит от  $x$ , то по аналогии можем написать

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4}{3} \pi f \delta.$$

Суммируя все три вторые производные, получаем

$$\Delta_2 V_2 = -4\pi f \delta. \quad (57.13)$$

Теперь, принимая во внимание (57.9) и (57.10), находим искомое уравнение Пуассона

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f \delta, \quad (57.14)$$

где под  $\delta$  следует понимать плотность тела в малой окрестности вокруг притягиваемой точки. Если в исследуемой точке нет притягивающих масс, т. е.  $\delta = 0$ , уравнение Пуассона обращается в уравнение Лапласа. Иначе говоря, уравнение Лапласа можно рассматривать как частный случай уравнения Пуассона, когда  $\delta = 0$ .

Уравнения Лапласа и Пуассона являются фундаментальными в теории потенциала.

Определение внешнего потенциала Земли и изучение ее фигуры основываются на интегрировании уравнения Лапласа при дополнительных условиях, вытекающих из существа конкретной задачи.

Функции, непрерывные во всех точках данной области вместе с их первыми и вторыми производными и удовлетворяющие уравнению Лапласа (57.6), называются гармоническими функциями в этой области.

Потенциал притяжения для точек в области, не занятой притягивающими массами, будет всегда гармонической функцией; иначе говоря, в любой точке пространства вне притягивающего тела потенциальная функция  $V$  всегда будет удовлетворять уравнению Лапласа  $\Delta_2 V = 0$ .

В каждой точке внутри притягивающего тела потенциал силы притяжения будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta_2 V = -4\pi f \delta.$$

Если первые производные от потенциала по осям координат представляют собой проекции силы на соответствующие оси или, иначе говоря, определяют направление нормали к данной уровенной поверхности, то вторые производные потенциала притяжения определяют форму или кривизну уровенной поверхности в данной точке.

Из уравнения Пуассона следует, что если плотность имеет скачкообразное изменение, то и кривизна уровенной поверхности изменяется скачком; это бывает, в частности, в том случае, если данная уровенная поверхность пересекает физическую поверхность тела.

## § 58. Потенциал силы тяжести, его основные свойства

Напишем известное выражение для силы тяжести

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q}.$$

Потенциал силы притяжения найден в § 53; для получения силы тяжести найдем потенциал центробежной силы  $Q$ . Центробежная сила при  $m = 1$  выражается уравнением

$$Q = \omega^2 \rho.$$

Если во взятой системе прямоугольных координат ось  $z$  совместить с осью вращения, то центробежная сила будет параллельна плоскости  $xu$  и составляющая этой силы по оси  $z$  будет равна нулю. Определим составляющие ее по осям  $x$  и  $y$ . Центробежная сила направлена по радиусу  $\rho$  (рис. 111). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \\ y &= \rho \cos \beta \end{aligned} \right\}. \quad (58.1)$$

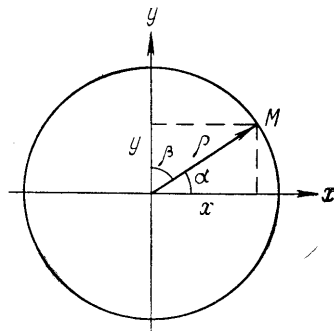


Рис. 111

Проекции центробежной силы  $Q$  на оси  $x$  и  $y$  будут равны:

$$Q_x = Q \cos \alpha = \omega^2 \rho \cos \alpha, \quad (58.2)$$

$$Q_y = Q \cos \beta = \omega^2 \rho \cos \beta. \quad (58.3)$$

Определяя из (58.1) значения  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$  и подставляя их в (58.2) и (58.3), получаем составляющие центробежной силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \omega^2 x \\ Q_y &= \omega^2 y \\ Q_z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (58.4)$$

Эти составляющие являются частными производными по прямоугольным координатам функции

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (58.5)$$

которая, следовательно, является потенциальной функцией центробежной силы. Действительно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \omega^2 x = Q_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \omega^2 y = Q_y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 = Q_z \end{aligned} \right\}. \quad (58.6)$$



Далее, проекция силы тяжести на оси координат будет:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= F_x + Q_x = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ g_y &= F_y + Q_y = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ g_z &= F_z + Q_z = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (58.7)$$

Возьмем функцию

$$W = V + U = f \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (58.8)$$

Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = g_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = g_y \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = g_z \end{aligned} \right\}. \quad (58.9)$$

Отсюда заключаем, что функция  $W$ , определяемая уравнением (58.8), является потенциалом силы тяжести. Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов силы земного притяжения и центробежной силы.

Обозначая  $(g, x), (g, y), (g, z)$  углы, которые образует направление силы тяжести с осями координат, находим:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g \cos(g, x) \\ g_y &= g \cos(g, y) \\ g_z &= g \cos(g, z) \end{aligned} \right\}. \quad (58.10)$$

Выражение для потенциала  $W$  может быть написано и в виде

$$W = V + U = f \int \frac{\delta d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (58.11)$$

где  $d\tau$  — элемент объема.

$\delta$  — объемная плотность.

Остановимся подробнее на свойствах потенциальной функции, изложенных в § 55, применительно к потенциалу силы тяжести.

1. Согласно (55.6), можем написать, что

$$\frac{dW}{ds} = g \cos(g, s) = g_s, \quad (58.12)$$

т. е. производная потенциала силы тяжести по любому направлению равна проекции силы на это направление.

2. На основании (55.12) при  $\cos(g, s) = 0$ , т. е. при перемещении материальной точки в направлении, перпендикулярном силе тяжести, будем иметь

$$W = \text{пост.} = C. \quad (58.13)$$

Полученное выражение (58.13) является общим уравнением уровня поверхностей силы тяжести. В каждой точке такой поверхности сила тяжести

сти направлена по нормали к этой поверхности, а составляющие силы тяжести по касательной к поверхности в любой точке равны нулю.

Поверхность жидкости в спокойном состоянии представляет собой уровенную поверхность, поверхность равновесия, или, как принято говорить, горизонтальную поверхность, слагающая сила тяжести по касательной к которой в любой точке и в любом направлении равна нулю.

Меняя в (58.13) значение  $C$ , получаем разные уровенные поверхности.

Уровенная поверхность, совпадающая с невозмущенной поверхностью океанов, называется поверхностью геоида.

3. Выражения (55.17) для потенциала силы тяжести примут вид:

$$-\frac{dW}{dh} = g; \quad dW = -gdh, \quad dh = -\frac{dW}{g} \}. \quad (58.14)$$

Эти зависимости соответствуют случаю, когда в выражении (58.12)  $\cos(g, s) = -1$ , т. е. когда перемещение точки происходит в направлении, противоположном направлению силы тяжести, а  $dh$  представляет собой расстояния между уровенными поверхностями  $W$  и  $W + dW$ .

Последнее уравнение из (58.14) показывает, что расстояния между двумя близкими уровенными поверхностями не равны в разных точках, а обратно пропорциональны силе тяжести, действующей в этих точках. На полюсе, где сила тяжести имеет максимальное значение, уровенные поверхности сближаются, а на экваторе расходятся.

Из последних уравнений также следует, что  $dh$  — величина одного порядка с  $dW$  и ни при каких условиях  $dh$  не может обратиться в нуль, если  $dW \neq 0$  (так как  $g$  — конечная величина), поэтому уровенные поверхности между собой не пересекаются.

Из тех же формул следует, что уровенные поверхности не «параллельны» между собой.

Непараллельность уровенных поверхностей влияет на определение высот точек земной поверхности, получаемых из геометрического нивелирования.

Интегрируя второе из уравнений (58.14), получаем

$$\int gdh = -\int dW, \quad (58.15)$$

где под  $dh$  можно понимать измеренное превышение, определяемое как разность отсчетов по задней и передней рейкам с одной установки нивелира.

Если это суммирование превышений исполнено между некоторыми двумя точками физической земной поверхности  $A$  и  $B$  (рис. 112), расположенными на конечном расстоянии и на разных уровенных поверхностях, то будем иметь

$$\int_A^B gdh = \bar{g}(H_B - H_A) = W_A - W_B \quad (58.16)$$

или,

$$(H_B - H_A) = \frac{W_A - W_B}{\bar{g}}, \quad (58.17)$$

где  $\bar{g}$  — некоторое значение силы тяжести:

$H_B - H_A = \Delta H$  — превышение точки  $B$  над точкой  $A$ .

Разность потенциалов  $W_A - W_B$  постоянна. Отсюда следует, что разность высот точек  $A$  и  $B$  будет получать различные значения при разном выборе величины  $g$ .

Из (58.16) следует, что разность потенциалов может быть определена из данных нивелирования при условии измерения силы тяжести вдоль линии нивелирования.

Если принять, что точка  $A$  находится на уровне, на котором значение потенциала силы тяжести равно  $W_0$ , то

$$W_B = W_0 - \int_0^B g dh. \quad (58.18)$$

Из (58.17) можно также написать

$$H_B = \frac{W_0 - W_B}{g}. \quad (58.19)$$

Для последнего принято, что  $H_A = 0$ , а  $\bar{g}$  — по-прежнему некоторое значение силы тяжести.

Из (58.18) следует, что, зная значение потенциала силы тяжести в исходном пункте, можно получить из результатов нивелирования значение потенциала для любой точки земной поверхности. При этом, учитывая современную высокую точность нивелирования и измерений силы тяжести, ошибка определения потенциала  $W_B$  будет зависеть от ошибки, с которой известна постоянная  $W_0$ . Заметим также, что разность потенциалов  $W_A - W_B$ , при вычислении ее по формуле (58.16), не зависит от пути нивелирования.

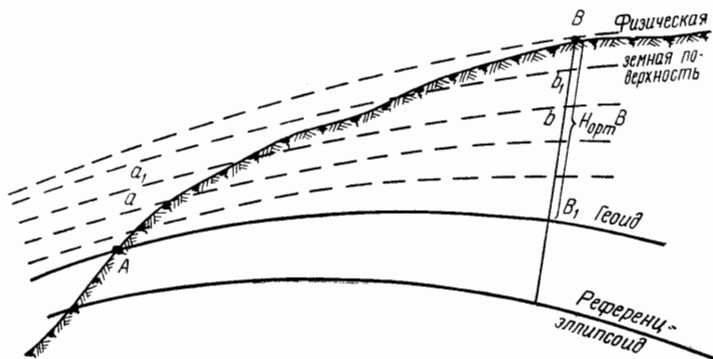


Рис. 112

Непараллельность уровенных поверхностей можно доказать, не прибегая к общей теории потенциала.

Рассмотрим две уровенные поверхности  $ab$  и  $a_1b_1$  (см. рис. 112) и допустим, что они весьма близки одна к другой. Ускорение силы тяжести в точках  $a$  и  $b$  обозначим через  $g_1$  и  $g_2$ , а отрезки нормали к уровенной поверхности  $aa_1$  и  $bb_1$  — через  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$ . Из механики известно, что материальная точка, перемещаясь из одной уровенной поверхности на другую, производит механическую работу, выражаемую произведением  $gh$ , причем эта работа не зависит от пути перемещения, а только от положения конечных точек. Следовательно, мате-

риальная точка, перемещаясь по нормали  $aa_1$  и  $bb_1$  произведет одинаковую работу. Поэтому можно написать равенство

$$g_1 \Delta h_1 = g_2 \Delta h_2.$$

Так как в разных точках ускорения силы тяжести в общем случае различны, то для сохранения написанного равенства должно быть  $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$ , что и определяет непараллельность уровенных поверхностей.

4. Фигура Земли, определяемая в общем виде уравнением  $W = V + U = C$ , зависит главным образом от силы притяжения, так как влияние центробежной силы мало. Действительно, взяв наибольшее значение центробежной силы, которое она достигает на экваторе  $\omega^2 a$ , вычислим отношение

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_0}, \quad (58.20)$$

где  $g_0$  — значение силы тяжести на экваторе.

Принимая  $g_0 = 978\,049$  мгл,  $a = 6\,378\,245$  и  $\omega$  — согласно (52.5), получаем

$$q = \frac{1}{288,4}. \quad (58.21)$$

Следовательно, величина  $q$  одного порядка со сжатием Земли  $\alpha$ .

При последующих выводах формул величины  $\alpha$  и  $q$  будут приниматься малыми величинами первого порядка. Если удерживать члены только с  $\alpha$  или  $q$  и пренебрегать членами с  $\alpha^2$  и  $q^2$ , то будем допускать ошибку порядка

$$\left(\frac{1}{300}\right)^2 = 0,00001.$$

Такая точность формул даст ошибку в ускорении силы тяжести около 10 мгл. Поскольку ускорение силы тяжести вычисляются с ошибкой до сотых частей миллигала, то в соответствующих формулах необходимо удерживать величины до второго порядка малости включительно, т. е. до  $\alpha^2$  или  $q^2$ .

Величина центробежной силы и ее направление, как и закон ее изменения на земной поверхности, хорошо известны. Отметим, что центробежная сила действует только на материальные точки, жестко связанные с телом Земли. Если не принимать во внимание атмосферу, вращающуюся вместе с Землей, то можно сказать, что для точек, не связанных с Землей, центробежная сила равна нулю, а сила тяжести обращается в силу притяжения. В действительности, атмосфера в пределах некоторого расстояния от 3 мли будет передавать на материальные тела действие центробежной силы.

5. Найдем оператор Лапласа для потенциала силы тяжести. Для этого предварительно определим оператор Лапласа для центробежной силы. Напишем вторые производные из (58.6):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (58.22)$$

Тогда

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad (58.23)$$

Оператор Лапласа для потенциала силы тяжести тогда выразится формулами:

для внешней точки

$$\Delta_2 W = \Delta_2 V + \Delta_2 U = 2\omega^2; \quad (58.24)$$

для внутренней точки

$$\Delta_2 W = -4\pi f\delta + 2w^2. \quad (58.25)$$

Поскольку  $\Delta_2 U = 2\omega^2$  постоянно, то все соображения, изложенные в § 57 относительно функции  $\Delta_2 V$ , остаются в силе и для  $\Delta_2 W$ .

Как уже отмечалось, вторые производные потенциала характеризуют кривизну уровенной поверхности, и там, где плотность меняется скачкообразно, кривизна уровенной поверхности также претерпевает скачкообразные изменения. Этот вывод имеет важное значение для изучения фигуры геоида. Его поверхность пересекает массы разной плотности; в этих местах кривизна поверхности геоида также меняется скачкообразно. Резкие изменения плотностей происходят и на самих материках в зависимости от структуры и состава земной коры и формы земной поверхности. В этом случае они вызывают скачкообразные изменения кривизны геоида.

Кривизна геоида меняется скачком прежде всего на берегах морей и океанов, а также там, где геоид пересекает горные породы разной плотности.

Вместе с тем все уровенные поверхности и геоид, как одна из этих поверхностей, нигде не терпят никаких разрывов; это вытекает из непрерывности потенциала силы тяжести.

6. Первые производные потенциала силы тяжести так же, как и сила притяжения, всюду непрерывны. Поскольку первые производные определяют направление векторов силы, т. е. силовых линий, то и последние также непрерывны.

### § 59. Теорема Клеро

Клеро дал вывод своей теоремы, основываясь на исследованиях фигур равновесия тел с неоднородной массой. При этом он предположил, что Земля по форме — эллипсоид вращения с малым сжатием, состоящий внутри из эллипсоидальных слоев, имеющих общий центр и совпадающие главные оси инерции; каждый слой однороден по плотности, но закон изменения плотностей при переходе от слоя к слою произволен.

Приведем один из выводов теоремы Клеро, основанный на теории потенциала и, в частности, на использовании выражения для потенциала силы тяжести в виде ряда.

Напишем на основании (54.25)

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{3f}{4r^3} (B-A) \cos^2 \Phi \cos 2\lambda. \quad (59.1)$$

Так как для эллипсоида вращения моменты инерции в плоскости экватора между собой равны, т. е.  $A = B$ , то (59.1) примет вид

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f}{2r^3} (C-A) (1 - 3\sin^2 \Phi). \quad (59.2)$$

Разность  $C - A$  имеет размерность массы, помноженной на квадрат расстояния.

Положим

$$C - A = \mu a^2, \quad (59.3)$$

где  $a$  — большая полуось земного эллипсоида,

$\mu$  — некоторая воображаемая добавочная масса, расположенная вдоль экватора, обуславливающая различие  $C$  от  $A$  и  $B$ .

Тогда

$$V = \frac{fM}{r} + \frac{f\mu a^2}{2r^3} (1 - 3 \sin^2 \Phi). \quad (59.4)$$

Теперь получим выражение для потенциала силы тяжести  $W$ .

Так как  $W = V + Q$ , то будем иметь

$$W = \frac{fM}{r} + \frac{f\mu a^2}{2r^3} (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \Phi. \quad (59.5)$$

Преобразуем выражение для потенциала центробежной силы, т. е. последний член формулы (59.5).

Возьмем отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, т. е.

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_0}. \quad (59.6)$$

Так как  $q$  — малая величина первого порядка, можем заменить  $g_0$  через  $\frac{fM}{a^2}$ , т. е. притяжением шара массы  $M$  на точку земного экватора. Получим

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}, \quad (59.7)$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{fMq}{a^3}. \quad (59.8)$$

Тогда потенциал  $Q$  примет вид

$$Q = \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \Phi = \frac{fM}{2a^3} q r^2 \cos^2 \Phi. \quad (59.9)$$

Подставляя (59.9) в (59.5), находим

$$W = \frac{fM}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \Phi \right]. \quad (59.10)$$

Пользуясь полученным приближенным выражением для потенциала силы тяжести, напишем уравнение уровенной поверхности, отклонения которой от поверхности геоида не превосходили бы величин первого порядка малости.

Это уравнение имеет вид

$$W = C_0.$$

Для определения искомой постоянной  $C_0$  поставим условие, чтобы на экваторе, т. е. при  $\Phi = 0^\circ$ , радиус поверхности равнялся большой полуоси  $a$ .

Подставив эти значения для  $r$  и  $\Phi$  в (59.10), получим выражение для  $C_0$

$$\frac{fM}{a} \left( 1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) = C_0. \quad (59.11)$$

Таким образом,

$$\frac{fM}{r} \left[ 1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \Phi \right] = \frac{fM}{a} \left( 1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2} \right) \quad (59.12)$$

или

$$\frac{1}{a} = \frac{1 + \frac{\mu}{2M} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \Phi}{1 + \frac{\mu}{2M} + \frac{q}{2}}. \quad (59.13)$$

Сохраняя лишь малые величины порядка  $\frac{\mu}{M}$  и  $q$ , последнее выражение можем переписать

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{\mu}{2M} (1 - 3 \sin^2 \Phi) + \frac{q}{2} \cos^2 \Phi - \frac{\mu}{2M} - \frac{q}{2}$$

или

$$\frac{r}{a} = 1 - \left( \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \Phi. \quad (59.14)$$

Но на основании (4.16) с удержанием членов порядка  $e^2$  и  $\alpha$  для эллипсоида вращения

$$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \Phi}} = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \Phi = 1 - \alpha \sin^2 \Phi. \quad (59.15)$$

Сравнивая (59.14) и (59.15), приходим к заключению, что уравнение (59.14) является эллипсоидом вращения со сжатием

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2}. \quad (59.16)$$

Этот вывод получен на основе теории потенциала силы тяжести на Земле; в процессе вывода принята только одна гипотеза, что Земля — тело вращения, по форме незначительно отступающее от шара.

Существенно заметить, что полученный вывод справедлив только в том случае, если все массы находятся внутри геоида, так как только при этом условии можно разложить потенциал силы тяжести в ряд. Это понятно, так как мы уже установили, что в пересечении геоидом материков, когда притягивающие массы оказываются вне геоида, его кривизна меняется скачком, а поверхность геоида под материками выражается другой аналитической функцией, чем на море. Отступления от допущенного условия распределения масс в теле Земли по долготе также вызывают соответствующие отклонения фигуры геоида от поверхности эллипсоида вращения. Эти замечания должны приниматься во внимание при детальном изучении фигуры Земли; в то же время влияние этих отступлений от реальных условий выражается величинами, хотя далеко не пренебрегаемыми, но не могущими изменить сделанный вывод о том, что фигура геоида близка к фигуре эллипсоида вращения.

Эллипсоид вращения, поверхность которого выражается уравнением (59.14), иногда называют «идеальным геоидом».

Теперь перейдем к получению выражения для величины силы тяжести на уровенной поверхности, определяемой уравнением (59.14), т. е. на «идеальном геоиде». Из (58.14) имеем

$$g = - \frac{\partial W}{\partial h} \quad (59.17)$$

(знак минус взят потому, что сила тяжести направлена внутрь, а производная берется по направлению внешней нормали).

В (59.17) значение силы тяжести выражается как производная от потенциала по нормали «к идеальному геоиду» с точностью до малых величин первого порядка, имеющему форму эллипсоида вращения. Однако в (59.5), выражающем потенциал силы тяжести, направление нормали не входит; определим, какую ошибку мы допустим, взяв вместо  $\frac{\partial W}{\partial h}$  производную  $\frac{\partial W}{\partial r}$ .

Различие направлений нормали  $h$  и радиуса-вектора  $r$  выражается разностью геодезической и геоцентрической широт, которая максимально достигает значения  $11,8'$ . На основании (58.12) можно сказать, что, дифференцируя по  $r$ , а не по  $h$ , мы вместо  $g \cos(\varphi - \Phi)$  получим  $g \cos \Phi$ , т. е.

$$g \cos(\varphi - \Phi) = -\frac{\partial W}{\partial r},$$

где  $\varphi$  — широта, образованная нормалью к поверхности земного эллипсоида.

Так как  $\cos(\varphi - \Phi) = \cos 11,8' = 0,999995$ , то с точностью  $5 \cdot 10^{-6}$  можем написать

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r}.$$

Дифференцируя (59.10) по  $r$ , получаем

$$g = \frac{fM}{r^2} + \frac{3f\mu a^2}{2r^4} (1 - 3 \sin^2 \Phi) - fMq \frac{r}{a^3} \cos^2 \Phi. \quad (59.18)$$

Полученная формула позволяет с указанной выше степенью приближения вычислять значения ускорения силы тяжести для внешней точки, вращающейся вместе с Землей и определяемой координатами  $r$  и  $\Phi$ .

Чтобы получить  $g$  для точек рассматриваемой поверхности, заменим  $r$  в главном члене его выражением согласно (59.14), а в остальных членах, вследствие их малости, положим  $r = a$ , тогда

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \Phi \right]^{-2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} (1 - 3 \sin^2 \Phi) - q \cos^2 \Phi \right]. \quad (59.19)$$

После разложения в ряд по биному Ньютона с удержанием лишь членов первого порядка малости получим

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} + \frac{q}{2} \right) \sin^2 \Phi \right] \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} (1 - 3 \sin^2 \Phi) - q \cos^2 \Phi \right] \quad (59.20)$$

или

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} - q + \left( 2q - \frac{3}{2} \frac{\mu}{M} \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (59.21)$$

Из (59.16) имеем

$$\frac{3}{2} \frac{\mu}{M} = \alpha - \frac{q}{2}.$$

После подстановки в (59.2)  $\alpha - \frac{q}{2}$  вместо  $\frac{3}{2} \frac{\mu}{M}$  получим

$$g = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \left( \frac{5}{2} q - \alpha \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (59.22)$$

Обозначая через  $g_0$  ту часть (59.22), которая не зависит от широты, т. е.

$$\frac{fM}{a^2} \left( 1 + \alpha - \frac{3}{2} q \right) = g_0, \quad (59.23)$$

получаем

$$g = g_0 \left( 1 + \frac{\frac{5}{2} q - \alpha}{1 + \alpha - \frac{3}{2} q} \sin^2 \Phi \right). \quad (59.24)$$



По-прежнему, удерживая члены первого порядка малости, последнее выражение перепишем

$$g = g_0 \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} q - \alpha \right) \sin^2 \Phi \right]. \quad (59.25)$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha \quad (59.26)$$

и пренебрегая различием геоцентрической широты  $\Phi$  от геодезической  $\varphi$ , получаем окончательно с принятой точностью

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (59.27)$$

Для определения физического смысла коэффициента  $\beta$  напомним (59.27) для точки полюса ( $\varphi = 90^\circ$ ). Тогда получим

$$g_{90^\circ} = g_0 (1 + \beta),$$

откуда

$$\beta = \frac{g_{90^\circ} - g_0}{g_0}. \quad (59.28)$$

Следовательно, коэффициент  $\beta$  — разность ускорения силы тяжести на полюсе и экваторе, выраженная в относительной форме.

Таким образом, в результате вывода мы получили формулы:

$$r = a (1 - \alpha \sin^2 \Phi), \quad (59.29)$$

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (59.30)$$

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha. \quad (59.31)$$

Уравнения (59.30) и (59.31) и составляют так называемую теорему Клеро. Напишем последние две формулы еще и в такой форме:

$$g = g_0 + (g_{90^\circ} - g_0) \sin^2 \varphi, \quad (59.32)$$

$$\frac{g_{90^\circ} - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} q - \alpha. \quad (59.33)$$

Так как

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

и

$$g_{45^\circ} = g_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta \right),$$

то формулу (59.30) можно переписать так:

$$g = g_{45^\circ} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi \right). \quad (59.34)$$

Полученные формулы имеют чрезвычайно важное научное и практическое значение.

Формула (59.30) выражает зависимость ускорения силы тяжести на земной поверхности от географической широты. Она выражает в общем виде нормальное распределение силы тяжести.

Формула (59.31) устанавливает зависимость между сжатием, величиной центробежной силы и значениями силы тяжести на экваторе и на полюсе. Она позволяет определить сжатие Земли из результатов определений силы тяжести.

Порядок использования этих формул для определения сжатия Земли состоит в следующем.

Пусть на земной поверхности в точках, имеющих широты  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ , из непосредственных измерений получены значения ускорения силы тяжести. Согласно формуле (59.32), для этих точек могут быть написаны уравнения:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= g_0 + (g_{90^\circ} - g_0) \sin^2 \varphi_1 \\ g_2 &= g_0 + (g_{90^\circ} - g_0) \sin^2 \varphi_2 \\ g_3 &= g_0 + (g_{90^\circ} - g_0) \sin^2 \varphi_3 \end{aligned} \right\}. \quad (59.35)$$

В этих уравнениях неизвестны  $g_{90^\circ}$  и  $g_0$ . Решая уравнения по способу наименьших квадратов, находим значения неизвестных, после чего по формуле (59.33) вычисляем сжатие  $\alpha$ . Чем больше произведено определений силы тяжести и чем больше территория, по которой размещены эти определения, тем достовернее и надежнее вывод значения сжатия  $\alpha$ . Значительное количество определений силы тяжести нужно не для уменьшения влияния случайных ошибок измерений силы тяжести (при существующей ныне технике измерений они малы), а для уменьшения влияния местных неравномерностей в распределении масс в земной коре.

Найденные значения  $g_{90^\circ}$  и  $g_0$  дают возможность вычислить по формуле (59.30) ускорение силы тяжести для любой точки земной поверхности. Вычисленное таким образом значение силы тяжести для какой-либо точки называется нормальным значением силы тяжести.

Условимся в дальнейшем применять следующие общие обозначения для нормального значения силы тяжести:

$\gamma_e, \gamma_p$  — нормальные значения силы тяжести на экваторе и на полюсе соответственно;

$\gamma_0$  — нормальное значение силы тяжести на эллипсоиде в данной точке (геодезическая высота  $H = 0$ );

$\gamma$  — нормальное значение силы тяжести в данной точке, вне эллипсоида ( $H \neq 0$ ).

Полученная выше формула нормального распределения силы тяжести точна до малых величин порядка первой степени сжатия. Более точная формула с учетом принятых обозначений имеет вид

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (59.36)$$

где  $\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$ , а коэффициент  $\beta_1$  вследствие его малости предпочтительнее определять не из решения уравнений вида (59.36), а из иных соображений.

Применяемая в настоящее время в СССР формула нормальной силы тяжести с числовыми значениями коэффициентов имеет вид

$$\gamma_0 = 978,030 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 s \cdot n^2 2\varphi). \quad (59.37)$$

Эта формула была выведена Гельмертом в 1901—1908 гг. на основании результатов измерения силы тяжести на 1603 пунктах. Значение сжатия Земли, выведенное на основании результатов этих измерений, равно 1 : 298,2.

Значение коэффициента  $\beta_1 = 0,000007$  получено Гельмертом на основании имевшихся данных о внутреннем строении Земли.

Кроме формулы (59.37), существует еще много формул, полученных разными учеными на основании использования различных материалов.

Приведем некоторые из них.

Формула Кассиниса, рекомендованная в 1930 г. Международным геодезическим конгрессом в Стокгольме,

$$\gamma_0 = 978,0490 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi). \quad (59.38)$$

Формула И. Д. Жонголовича, полученная в 1952 г.,

$$\gamma_0 = 978,0573 (1 + 0,0052837 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi). \quad (59.39)$$

Формула Н. П. Грушинского, полученная в 1962 г.,

$$\gamma = 978,0531 (1 + 0,0052883 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi). \quad (59.40)$$

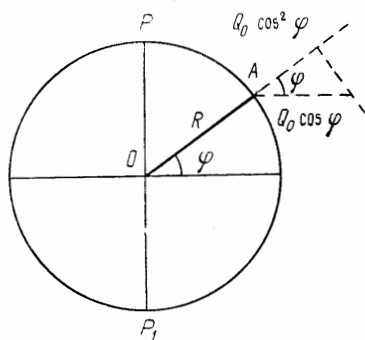


Рис. 113

В заключение дадим весьма упрощенный вывод основной формулы Клеро.

Рассмотрим поверхность абсолютно твердого однородного шара, вращающегося около неизменной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Для всех точек поверхности такого шара сила притяжения  $F$  одинакова, а центробежная сила имеет максимальное значение на экваторе, а на полюсе равна нулю.

Следовательно, будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} \text{на полюсе шара } g_{90^\circ} = F \\ \text{на экваторе } g_{0^\circ} = F - R\omega^2 \end{array} \right\}, \quad (59.41)$$

где  $R$  — радиус шара.

Из (59.40) центробежная сила на экваторе получится

$$Q_0 = R\omega^2 = (g_{90^\circ} - g_{0^\circ}). \quad (59.42)$$

В некоторой точке  $A$  (рис. 113), имеющей широту  $\varphi$ , центробежная сила будет

$$Q_\varphi = Q_0 \cos^2 \varphi.$$

Проектируя центробежную силу в точке  $A$  по направлению силы тяжести, за которое примем радиус  $OA$ , получаем

$$Q \cos \varphi = Q_0 \cos^2 \varphi.$$

Следовательно, сила тяжести в точке  $A$ , как равнодействующая силы притяжения и центробежной силы, будет выражена

$$\begin{aligned} g_\varphi &= g_{90^\circ} - Q_0 \cos^2 \varphi = g_{90^\circ} - (g_{90^\circ} - g_{0^\circ}) \cos^2 \varphi = g_{90^\circ} - (g_{90^\circ} - g_{0^\circ})(1 - \sin^2 \varphi) = \\ &= g_{0^\circ} + (g_{90^\circ} - g_{0^\circ}) \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (59.43)$$

$$g_\varphi = g_{0^\circ} \left( 1 + \frac{g_{90^\circ} - g_{0^\circ}}{g_{0^\circ}} \sin^2 \varphi \right)$$

или

$$g_\varphi = g_{0^\circ} (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (59.44)$$

где по-прежнему

$$\beta = \frac{g_{90^\circ} - g_{0^\circ}}{g_{0^\circ}}.$$

Отметим здесь, что результаты астрономо-геодезических и гравиметрических измерений позволяют определять массу Земли непосредственно в абсолютных единицах — в граммах, тогда как все астрономические способы дают значение массы Земли с большой точностью, но в относительных единицах, например, отнесенное к массе Солнца.

Дадим понятие об определении массы Земли, используя приближенные формулы.

Из (59.22) можем написать, пренебрегая последним членом,

$$M = \frac{g}{f} a^2 \left( 1 - \alpha + \frac{3}{2} q \right). \quad (59.45)$$

Возможно и еще более упрощенное решение, если принять Землю за шар; тогда

$$M = \frac{g}{f} a^2. \quad (59.46)$$

Примем

$$\left. \begin{aligned} a &= 6\,378\,245 \\ g &= 9\,78\,050 \\ \alpha &= 1 : 298,3 \\ f &= 6,673 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \right\}. \quad (59.47)$$

Тогда получим

$$M = 5,97 \cdot 10^{27} \text{ г.}$$

Легко находим и среднюю плотность Земли

$$\rho_m = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi a^2 b} = 5,52 \text{ г/см}^3.$$

# Глава IX

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ

### § 60. Нормальный и возмущающий потенциалы

Изучение фигуры Земли неразрывно связано с исследованием ее гравитационного поля, характеризуемого потенциалом силы тяжести. Следовательно, дальнейшей задачей должно быть рассмотрение вопроса об определении потенциала силы тяжести на основании непосредственных измерений, результаты которых зависят от фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля.

Однако непосредственное вычисление значения потенциала по одной из ранее приведенных формул встречает в настоящее время практически непреодолимые препятствия. Для пояснения этого возьмем одно из выражений потенциала

$$W = f \int \frac{\delta d\tau}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (60.1)$$

Второй член этого выражения, представляющий потенциал центробежной силы, мал по сравнению с первым членом и может быть определен без затруднений, так как угловая скорость вращения Земли  $\omega$  хорошо известна из астрономических наблюдений, а координаты  $x$  и  $y$  следует считать заданными. Но для вычисления первого интеграла, представляющего собой  $V$  — потенциал притяжения Земли, мы не располагаем всеми необходимыми данными. Действительно, для вычисления его нам необходимо знать плотность  $\delta$  в каждой точке Земли.

Этими данными мы не располагаем, а потому практически использовать выражение (60.1) как рабочую формулу для вычислений невозможно.

Практически целесообразно применить следующий путь для вычисления потенциала  $W$ .

Выделим из потенциала  $W$  некоторую «правильную» часть, которая по возможности была бы близка к  $W$  и могла бы быть вычислена достаточно просто. Эта часть, выделяемая из потенциала  $W$ , получила название *нормального потенциала*. Иначе говоря, *нормальным потенциалом* называют вспомогательный потенциал силы тяжести, по возможности близкий по своему значению к реальному потенциалу и просто вычисляемый.

Обозначим нормальный потенциал через  $U$ . Если он может быть вычислен, причем достаточно просто, то задача определения реального потенциала  $W$  будет сводиться к определению разности реального и нормального потенциалов; эту разность принято называть *возмущающим потенциалом* и обозначать буквой  $T$ .

Таким образом

$$W = U + T. \quad (60.2)$$

Нормальный потенциал может быть выбран различно. Проще за нормальный потенциал принять потенциал шара, имея в виду, что фигура Земли с некоторой степенью приближения может быть принята за шар. Тогда для нормального потенциала мы получили бы

$$U = \frac{fM}{R} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (60.3)$$

При таком выборе нормального потенциала для его вычисления потребовалось бы определение массы Земли и ее среднего радиуса.

Однако в этом случае вычисление возмущающего потенциала  $T$  оказалось бы чрезвычайно сложным, так как разности  $W - U = T$  оказались бы величинами первого порядка малости, т. е. порядка сжатия Земли. Как показано выше (§ 58), при существующей точности полевых измерений для вычисления возмущающего потенциала необходимо было бы удерживать члены с  $T^2$ .

Поэтому за нормальный потенциал целесообразно принять потенциал эллипсоида вращения, имеющего массу, равную массе Земли и вращающегося с той же угловой скоростью, что и реальная Земля. Тогда возмущающий потенциал  $T = W - U$  будет уже величиной второго порядка малости ( $\frac{T}{W} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ ), поэтому члены порядка  $T^2$  могут уже не учитываться.

Возможность определения нормального потенциала вытекает из теоремы Стокса, доказанной в 1849 г. Эта теорема формулируется следующим образом: если известны внешняя уровенная поверхность  $S$  потенциала силы тяжести, масса тела  $M$  и угловая скорость вращения его  $\omega$  вокруг неизменной оси, то потенциал силы тяжести, как и его производные, определяются однозначно, как на самой поверхности  $S$ , так и во всем внешнем пространстве независимо от распределения плотностей и масс внутри поверхности  $S$ .

Теорема Стокса устанавливает принципиальную возможность определения потенциала силы тяжести, если известна форма внешней уровенной поверхности и общая масса тела, без привлечения каких-либо гипотез о его внутреннем строении. Определение потенциала по этим условиям составляет так называемую проблему или задачу Стокса.

Поскольку потенциал центробежной силы определяется формулой

$$Q = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

то проблема Стокса сводится к определению потенциала силы притяжения  $V$ . Достаточные и необходимые условия для определения потенциальной функции  $V$  вытекают из общих свойств потенциала притяжения, а именно:

- 1) оператор Лапласа  $\Delta_2 V$  во внешнем пространстве равен нулю;
- 2) функция  $V$  должна быть непрерывной и конечной и иметь непрерывные и конечные первые производные;
- 3) на большом расстоянии  $r$  от произвольной точки тела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rV = fM \quad (6.04)$$

и, кроме того, на поверхности  $S$ , как уровенной, должно быть

$$V = \text{пост.} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (60.5)$$

Задача Стокса неразрешима в конечном виде для произвольной поверхности  $S$ , однако для простейших поверхностей, как сфера, эллипсоид, она решена строго и в замкнутой форме.

Нас интересует эллипсоид вращения, поскольку выше был сделан вывод, что именно эллипсоид целесообразно принять за тело, для которого следует вычислять нормальный потенциал.

Итак, если принять поверхность эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

за нормальную уровенную поверхность, то, не приводя довольно громоздкого вывода, напомним в окончательном виде точное выражение нормальной силы тяжести для точек поверхности такого эллипсоида

$$\gamma_B = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (60.6)$$

где  $\gamma_B$ ,  $\gamma_e$ ,  $\gamma_p$  — значения нормальной силы тяжести для точек с широтой  $B$ , на экваторе и на полюсе соответственно.

Формула (60.6) была выведена в 1929 г. итальянским геодезистом Сомильяна.

Если по-прежнему обозначить:

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}, \quad (60.7)$$

$$\alpha = \frac{a - b}{a}, \quad (60.8)$$

то после внесения их в формулу (60.6) и разложения знаменателя по биному Ньютона и простых преобразований получим с удержанием членов первого порядка сжатия

$$\gamma_B = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B), \quad (60.9)$$

т. е. формулу Клеро.

Удерживая члены второго порядка относительно  $\alpha$ , находим

$$\gamma_B = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (60.10)$$

т. е. формулу (59.36), приведенную в § 59 без вывода.

В формуле (60.10)

$$\beta_1 = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta. \quad (60.11)$$

Напишем без вывода выражения для других параметров уровенного эллипсоида.

Потенциал силы тяжести  $U$  на уровенном эллипсоиде

$$U_0 = \gamma_e a \left( 1 - \frac{2}{3} \alpha - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{8}{105} \alpha^3 - \dots \right) + \frac{11}{6} \omega^2 a^2 \left( 1 - \frac{24}{77} \alpha - \frac{236}{2695} \alpha^2 - \dots \right). \quad (60.12)$$

Масса  $M$  уровенного эллипсоида

$$M = \frac{a^2 b}{3f} \left( 2\omega^2 + 2 \frac{\gamma_e}{a} + \frac{\gamma_p}{b} \right). \quad (60.13)$$

Отметим еще одно существенное обстоятельство. Если взять семейство уровенных поверхностей нормального потенциала  $U = C$ , где  $C$  — различные значения постоянных, то только уровенная поверхность  $U = U_0$  будет эл-

липсоидом вращения. Все другие уровенные поверхности не будут эллипсоидами. Их иногда называют сфероидами.

Уровенный эллипсоид нормального потенциала будет определен, если известны четыре его параметра, за которые обычно принимают  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma_e$ ,  $\omega$ . Прочие его параметры могут быть определены по формулам: (60.13), (60.6) и (60.7).

Возвратимся к вопросу о выборе уровенного эллипсоида нормального потенциала. Практически, для решения конкретных задач высшей геодезии за таковой удобно принять референц-эллипсоид; сила тяжести на экваторе должна быть установлена на основе имеющихся ее измерений;  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли точно определена из астрономических измерений.

Такой выбор уровенного эллипсоида выгоден тем, что для решения задач высшей геодезии и гравиметрии вводится единая отсчетная поверхность. Тем самым относительно референц-эллипсоида будут определяться геодезическими координатами  $B$ ,  $L$ ,  $H$  положение точек земной поверхности и потенциал силы тяжести Земли  $W$ ; все характеристики гравитационного поля Земли, как на ее поверхности, так и вне ее, получаемые в функции потенциала силы тяжести Земли, будут в единой системе.

Теперь проведем следующие рассуждения.

Допустим, что действительная поверхность Земли уровенная и совпадает с уровенным эллипсоидом нормального потенциала силы тяжести; иначе говоря, допустим, что  $W_0 = U_0$  и возмущающий потенциал  $T = 0$ . В этом случае во всех точках такой «Земли» направление вектора действительной силы тяжести, определяемое астрономическими координатами, совпадало бы с направлением силовых линий нормального гравитационного поля, определяемых на эллипсоиде геодезическими координатами  $B$ ,  $L$ , т. е. получилось бы, что  $\varphi = B$  и  $\lambda = L$ . Тогда отклонения отвесных линий, как углы между направлениями векторов действительного и нормального направлений силы тяжести, были бы равны нулю. При условии равенства нормального и реального потенциалов измеренные значения силы тяжести  $g$  во всех точках Земли равнялись бы нормальным  $\gamma$ , т. е. вычисленным по нормальной формуле силы тяжести. В этом случае высоты точек Земли  $H$  также везде были бы равны нулю.

В действительности описанной картины по результатам измерений не наблюдается. Сопоставление астрономических и геодезических координат даже при самой хорошей ориентировке референц-эллипсоида выявляет отклонения отвесных линий, по величине значительно превосходящие ошибки астрономических и геодезических измерений. Измеренные значения силы тяжести  $g$  не совпадают с нормальными  $\gamma$  на величины, во много раз превосходящие ошибки гравиметрических наблюдений. Эти расхождения  $g - \gamma$  называются аномалиями силы тяжести; они, как увидим далее, играют важнейшую роль при изучении фигуры Земли наравне с результатами геодезических и астрономических измерений. Теперь нетрудно сделать вывод, что получающиеся расхождения в астрономических и геодезических координатах, расхождения в измеренных и нормальных значениях силы тяжести являются результатом неравенства действительного и нормального потенциалов силы тяжести Земли, т. е. действия возмущающего потенциала  $T$ .

Однако возмущающий потенциал  $T$  непосредственному измерению не поддается. Поэтому естественно поставить задачу — по отклонениям отвесных линий или по аномалиям силы тяжести, как опытным данным, определить возмущающий потенциал Земли  $T$  и затем получить действительный потенциал  $W$  силы тяжести Земли. Зная  $W$ , можно далее на основе теоретических зави-



симостей определять различные характеристики и величины действительного гравитационного поля Земли, необходимые для теории и практики, как, например, определение геодезических высот точек поверхности Земли, вычисление поправок в астрономические координаты за влияние отклонений отвесной линии в любой точке земной поверхности, определение влияния силы тяжести на Земле при расчете полетов ракет и искусственных спутников Земли и др.

Возникает вопрос, чему отдать предпочтение: уклонениям отвесной линии или аномалиям силы тяжести. Теоретически аномалия силы тяжести  $\Delta g$  и уклонения отвесной линии  $(\xi, \eta)$  пригодны для определения возмущающего потенциала  $T$ . Но практически следует отдать предпочтение аномалиям силы тяжести по следующим соображениям:

1. Уклонения отвесной линии с необходимой точностью определяются из сопоставления результатов геодезических и астрономических наблюдений, которые требуют на каждом пункте во много раз больше времени и труда, чем гравиметрические измерения. Определение на какой-либо территории уклонений отвесных линий с заданной частотой потребовало бы в десятки раз больше труда, средств и времени, чем вывод аномалий силы тяжести из гравиметрических наблюдений.

2. Гравиметрические наблюдения могут производиться не только на суше, но и на море. Это преимущество имеет большое принципиальное значение, так как теоретические предпосылки требуют, чтобы измерения производились на всей поверхности Земли. Уклонения же отвесных линий при существующих методах и средствах измерений могут быть выведены на суше, т. е. только примерно на  $\frac{3}{8}$  всей земной поверхности.

Таким образом, приходим к заключению, что для определения возмущающего потенциала следует использовать аномалии силы тяжести, для получения которой необходима гравиметрическая съемка.

Следовательно, дальнейшей целью должно быть установление зависимостей, существующих между возмущающим потенциалом  $T$  и аномалиями силы тяжести. Так как задача высшей геодезии — изучение действительной фигуры Земли, то далее должны быть установлены зависимости между величинами, характеризующими форму Земли, и возмущающим потенциалом. Отметим, что такими величинами являются расстояния точек земной поверхности и уклонения отвесной линии относительно принятого референц-эллипсоида. Имея в виду указанный общий путь — определение возмущающего потенциала  $T$  по аномалиям силы тяжести, а по  $T$  — высот точек Земли и уклонений отвесной линии, имеется возможность непосредственного выражения последних величин через аномалии силы тяжести.

## § 61. Аномалии силы тяжести

Так как аномалии силы тяжести служат исходными данными для определения возмущающего потенциала Земли, остановимся подробнее на вычислениях аномалий силы тяжести. Выше аномалия силы тяжести была определена как разность между измеренным и нормальным значениями силы тяжести, т. е.  $\Delta g = g - \gamma$ . Разумеется, при этом считалось, что обе величины  $g$  и  $\gamma$  относятся к одной точке. В действительности нормальное значение силы тяжести  $\gamma$  относится к точке  $M_0$  уровня эллипсоида, а измеренное  $g$  — к точке  $M$ , расположенной на земной поверхности на расстоянии  $H_M$  по нормали к эллипсоиду, представляющей собой геодезическую высоту точки  $M$ . При

этом положение точки  $M_0$  (рис. 114) на эллипсоиде определяется известными геодезическими координатами  $B, L$ .

Естественно потребовать приведения обоих значений силы тяжести к какой-либо одной точке. Очевидно, для этой цели нам необходимо было бы в первую очередь знать геодезическую высоту  $H_M$  точки  $M$ .

Для высоты  $H$  некоторой точки  $M$  ранее была получена общая формула (58.19)

$$H_M = \frac{W_0 - W_M}{\bar{g}}, \quad (61.1)$$

где разность

$$W_0 - W_M = \int g \, dh$$

определяется из нивелирования, а  $\bar{g}$  — некоторое значение силы тяжести, которое может, как увидим в § 72, выбираться различно.

Вычислим для точки  $M$  высоту по формуле

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m^M}, \quad (61.2)$$

где под  $\gamma_m^M$  будем понимать среднее нормальное значение силы тяжести для отрезка  $MM_0$ , которое можно вычислить точно; иначе говоря, положим в формуле (61.2)  $\bar{g} = \gamma_m^M$ . Заметим, что высоты  $H^\gamma$ , вычисляемые по формуле (61.2), называются нормальными.

Подробнее о системах высот будет сказано в § 72; здесь ограничимся изложением сведений, необходимых для освещения вопроса о выводе аномалий силы тяжести.

Если вычисленную по (61.2) высоту  $H_M^\gamma$  отложить вверх от уровенного эллипсоида (см. рис. 114), то получим некоторую точку  $N$ , близкую к точке  $M$ ; на основании опытных данных установлено, что для Земли различие высот  $H_M$  и  $H_M^\gamma$ , т. е. отрезок  $MN$ , нигде не превышает 150 м; иначе говоря, различие в высотах точек  $M$  и  $N$  становится приблизительно на порядок меньше, чем геодезическая высота точки  $M$ , которая может достигать сотен и тысяч метров. Если вычислить нормальную силу тяжести  $\gamma_N$  для точки  $N$  и использовать ее для вычисления аномалий силы тяжести, то последние, определяемые как  $g - \gamma_N$ , также будут на порядок меньше, чем  $g - \gamma_0$ . Это обстоятельство будет иметь весьма существенное значение для упрощения ряда последующих теоретических выводов.

Итак, для следующего положим, что аномалии силы тяжести вычисляются по формуле

$$\Delta g = g_M - \gamma_N, \quad (61.3)$$

где  $g_M$  можно рассматривать как

$$\gamma_N = \gamma_0 + (\gamma_N - \gamma_0). \quad (61.4)$$

Величину  $\Delta g = g_M - \gamma_N$  называют смешанной аномалией силы тяжести, имея в виду, что  $g$  и  $\gamma$  относятся к разным точкам пространства.

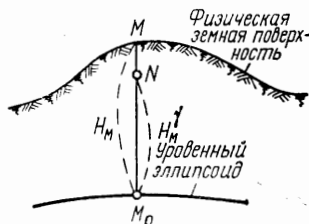


Рис. 114

Поправку  $(\gamma_N - \gamma_0)$  обычно называют редукцией силы тяжести в свободном воздухе, поэтому величина  $\Delta g$  также называется аномалией силы тяжести с редукцией в свободном воздухе или просто аномалией силы тяжести в свободном воздухе.

Если нормальную силу тяжести вычислить для точки  $M$ , то разность  $g_M - \gamma_M$  принято называть чистой аномалией силы тяжести; однако чистая аномалия силы тяжести в настоящее время в высшей геодезии не используется.

Теперь получим формулу для вычисления редукции силы тяжести в свободном воздухе. Задача заключается в определении изменения силы тяжести при переходе из точки  $M_0$  в точку  $N$  на расстояние по нормали, равное  $H^\nabla$ . Применяя строку Тейлора, можем написать

$$\gamma_N = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H^\nabla + \dots \quad (61.5)$$

Частная производная  $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$  называется вертикальным градиентом силы тяжести.

Высота  $H^\nabla$  по сравнению с радиусом Земли — величина второго порядка малости, поэтому в ряде Тейлора удержан только первый поправочный член. При вычислении  $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$  ограничимся членами только первого порядка, т. е. примем Землю за шар; тогда ошибка произведения  $\frac{\partial \gamma}{\partial n} H^\nabla$  будет величиной третьего порядка малости, которой можно пренебречь.

В этом случае, положив

$$\gamma = \frac{fM}{R^2},$$

получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{2fM}{R^3} = -\frac{2\gamma}{R}. \quad (61.6)$$

Следовательно, окончательно

$$\gamma_N = \gamma_0 - \frac{2\gamma}{R} H^\nabla. \quad (61.7)$$

Подставив в (61.7) числовые значения среднего значения силы тяжести и среднего радиуса Земли, получим формулу для вычислений

$$\gamma_N = \gamma_0 - 0,3086 H^\nabla \frac{\text{мгл}}{\text{м}}. \quad (61.8)$$

Таким образом, рабочая формула для вычисления смешанной аномалии силы тяжести примет вид

$$\Delta g = g_M - \gamma_N = g_M - (\gamma_0 - 0,3086 H^\nabla). \quad (61.9)$$

Аномалии силы тяжести характеризуют отступления действительного потенциала Земли от нормального. Эти аномалии дают также указания о распределении масс внутри Земли, но не определяют последние; теоретически можно допустить множество вариантов распределения масс, при которых аномалии на всей поверхности Земли будут иметь одно и то же значение.

Положительные аномалии силы тяжести, т. е. когда  $g > \gamma$ , соответствуют избытку притягивающихся масс в исследуемом районе; наоборот, отрицательные аномалии силы тяжести соответствуют недостатку этих масс. Положительные аномалии силы тяжести соответствуют, вообще говоря, возвышениям геоида, а отрицательные аномалии — его понижениям. Но это соответствие справедливо только приблизительно и в общем: рельеф геоида зависит от аномалий силы тяжести на всей поверхности Земли.

Значения аномалий, как правило, даются в специальных каталогах, там же приводятся значения силы тяжести. Для практических целей значительно удобнее пользоваться картами изоаномал. Эти карты составляют следующим образом: строят географическую сетку, затем по координатам наносят точки, на которых исполнены измерения силы тяжести и для которых вычислены аномалии. Путем интерполяции по нанесенным точкам строят кривые, соединяющие точки с одинаковыми значениями аномалий; эти кривые и называются *и з о а н о м а л а м и*. Наличие карт изоаномал обеспечивает возможность удобного использования результатов гравиметрической съемки в различных целях. Карты составляют на картографической основе в различных масштабах.

При специальном использовании результатов гравиметрических измерений (разведка ископаемых, изучение внутреннего строения Земли) возникает необходимость учета поправок за притяжение топографического рельефа земной поверхности.

Аномалии силы тяжести зависят от влияния наружных топографических масс, расположенных выше уровня океанов, и от действия аномальных масс, находящихся внутри Земли. Разделение влияния этих двух причин в указанных целях приобретает существенное значение. Аномалии силы тяжести, из которых исключено влияние притяжения внешних форм рельефа, будут зависеть только от действия аномальных масс, расположенных внутри Земли. Знание таких аномалий весьма полезно и ценно для выявления плотностей различных слоев и частей земной коры и позволяет в сочетании с геологическими и геофизическими данными с большим успехом выявлять различные полезные ископаемые.

Топографические редукции подразделяются на следующие:

- а) полные топографические редукции, когда учитывают влияние топографических масс всей Земли;
- б) неполные топографические редукции, когда учитывается влияние топографических масс в некоторой области, обычно в радиусе порядка 100 км;
- в) редукции за промежуточный слой, когда притяжение топографических масс заменяется притяжением бесконечной пластины, толщина которой равна высоте пункта.

При вычислении первых двух редукций учитывается сферичность Земли; при вычислении поправок за промежуточный слой поверхность Земли принимается за плоскость.

Топографические редукции представляют собой поправки за влияние притягивающих масс Земли, расположенных между уровнем моря и физической земной поверхностью. Следовательно, в результате введения топографических редукций получаются значения силы тяжести, освобожденные от влияния указанных топографических масс в учитываемой области.

Кроме топографических редукций, существуют еще редукции или поправки за рельеф. Поправки за рельеф выражают влияние топографических масс, расположенных выше уровня данной точки, и недостатков

масс, расположенных ниже этого уровня (впадины). В результате введения поправки за рельеф получается значение силы тяжести, которое было бы в данной точке, если бы поверхность Земли в рассматриваемой ее области была горизонтальной (на уровне данной точки). Нетрудно видеть, что поправка за рельеф равна разности топографической редукции и редукции за промежуточный слой. Во всех случаях поправки за рельеф положительны.

Из опытных данных установлено, что аномалии силы тяжести с редукцией в свободном воздухе в сильной степени зависят от влияния топографического рельефа окружающей земной поверхности. Поэтому, когда возникает необходимость интерполирования аномалии силы тяжести, то интерполированное значение силы тяжести для точек, расположенных между гравиметрическими пунктами, получается точнее, если из аномалий силы тяжести предварительно исключить возмущающий эффект притяжения масс, расположенных между уровнем океана и физической земной поверхностью.

Принципиально вывод формул для вычисления топографических редукций весьма простой. Он заключается в определении влияния на аномалию притяжения элементарной массы, расположенной на текущем расстоянии  $r$ , и интегрировании этого влияния по объему в пределах взятой области.

Из топографических редукций наиболее часто вводится редукция за промежуточный слой, которая входит основным слагаемым во все виды топографических редукций. Эта редукция получила название редукции Буге. Не приводя вывода формул для вычисления этой редукции, напомним ее в окончательном виде

$$\Delta g_T = 2\pi f \delta H \left(1 - \frac{H}{2a}\right). \quad (61.10)$$

где  $H$  — высота данного гравиметрического пункта,  
 $a$  — радиус учитываемой области притяжения,  
 $\delta$  — плотность поверхностных пород, принимаемая постоянной.

Плотность  $\delta$  обычно известна с ошибкой 10% и более; поэтому, если  $\frac{H}{2a} < \frac{1}{20}$ , вторым членом формулы (61.10) можно пренебречь. Тогда

$$\Delta g_T = 2\pi f \delta H. \quad (61.11)$$

Последняя формула и представляет собой влияние притяжения плоского слоя толщины  $H$  и бесконечного простираения.

Если Землю принять за шар, то приближенно

$$\gamma = \frac{fM}{R^2} = \frac{f}{R^2} \frac{4}{3} \pi \delta_0 R^3 = \frac{4}{3} \pi f \delta_0 R,$$

откуда  $2\pi f = \frac{3\gamma}{2R\delta_0}$ .

Полагая  $R = 6371$  км,  $\gamma = 980$  гл и  $\delta_0 = 5,52$  (средняя плотность Земли), получаем

$$\Delta g_T = -0,0418\delta H. \quad (61.12)$$

Плотность  $\delta$  верхних пород колеблется, как правило, от 2,5 до 2,8; если возьмем  $\delta = 2,6$ , то  $0,0418\delta = 0,109$ ; таким образом, редукция за притяжение промежуточного слоя составляет приблизительно одну треть от редукции в свободном воздухе.

Результаты вычислений по формулам (61.10) и (61.12) всегда будут приближенными, поскольку точно не известна плотность  $\delta$  верхних слоев Земли.

При необходимости повысить точность вычисления рассматриваемой редукции, а также в горных районах со значительными колебаниями высот область, окружающую гравиметрический пункт, разбивают на ячейки. Пользуясь топографическими картами, определяют среднюю высоту каждой ячейки и вычисляют ее влияние на аномалию силы тяжести. Суммарное значение влияний всех ячеек, разбитых в районе выбранного радиуса, и будет искомой неполной топографической редукцией.

В настоящее время для чисто геодезических целей используются только аномалии с редукцией в свободном воздухе, вычисляемые по формулам (61.9).

## § 62. Возмущающий потенциал

Напишем действительный и нормальный потенциалы:

$$\left. \begin{aligned} W &= V + Q \\ U &= V^s + Q \end{aligned} \right\} \quad (62.1)$$

В выражениях для  $W$  и  $U$  взято одинаковое значение потенциала центробежной силы  $Q$ , поскольку мы условились ранее, что уровенный эллипсоид имеет такую же угловую скорость  $\omega$ , как и действительная Земля. Различия в значениях  $Q$  вследствие несовпадения осей вращения Земли и уровенного эллипсоида при соответствующем его выборе весьма малы. В случае необходимости эти различия могут быть учтены путем введения поправки в нормальную силу тяжести. Таким образом, для возмущающего потенциала  $T$  будем иметь

$$T = W - U = V - V^s. \quad (62.2)$$

Возмущающий потенциал  $T$ , как разность потенциалов притяжения, обладает всеми свойствами потенциала притяжения, перечисленными в § 55.

1. Возмущающий потенциал вне поверхности Земли является гармонической функцией, т. е. он во внешнем пространстве должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta_2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (62.3)$$

2. Возмущающий потенциал является функцией, регулярной на бесконечности, т. е. для него должно выполняться условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T = 0. \quad (62.4)$$

Для определения  $T$  на поверхности Земли  $S$  необходимо к написанному уравнению Лапласа и условию на бесконечности присоединить дополнительное условие на поверхности  $S$ , связывающее  $T$  с известными результатами непосредственных измерений, выполненных на земной поверхности. Как было установлено выше, для этого наиболее целесообразно использовать результаты гравиметрических определений в виде аномалий силы тяжести.

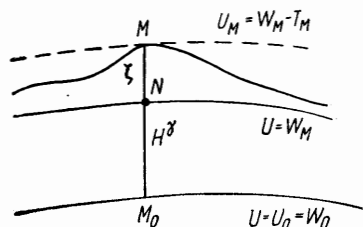


Рис. 115

Итак, примем, что известны для всей поверхности Земли смешанные аномалии силы тяжести

$$\Delta g = g_M - \gamma_N, \quad (62.5)$$

причем  $g$  отнесено к точке  $M$  (рис. 115) земной поверхности с координатами  $B, L, H$ , а  $\gamma$  — к точке сферопа с координатами  $B, L, H^\gamma$  ( $g$  отнесено к точке  $M$ , а  $\gamma$  — к точке  $N$ ). Иначе говоря, будем считать, что на всей поверхности Земли выполнены измерения силы тяжести и нивелирование, необходимое для вычисления  $H^\gamma = \frac{1}{\gamma_m} \int g dh$ .

Далее положим, что уровенный эллипсоид нормального поля Земли установлен, т. е. будем считать его потенциал  $U_0$  известным, причем  $U_0 = W_0$ . Нетрудно понять, почему необходимы измерения на всей поверхности Земли: возмущающий потенциал зависит от аномального поля всей Земли, а не в отдельной точке или какой-либо области вблизи этой точки.

Искомое дополнительное условие на поверхности или, как его называют, граничное или краевое условие, определится из следующих соображений.

Если

$$W_M = U_M + T_M,$$

то

$$\left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_M = \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_M + \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_M, \quad (62.6)$$

где  $n$  — направление нормали к уровенному эллипсоиду, которое при вычислении силы тяжести можно не различать от направления вектора тяжести  $g$ .

Действительно, если вместо направления нормали  $n$  взять направление силы тяжести  $g$  или наоборот, то будет допущена ошибка порядка

$$g - g \cos(gn) = g \frac{(gn)^2}{2}.$$

Если положить  $(gn) = 1'$ , то относительная ошибка в  $g$  будет меньше  $\frac{1}{20\,000\,000}$ .

С учетом последнего обстоятельства

$$\left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_M = -g_M \quad \text{и} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_M = -\gamma_M. \quad (62.7)$$

Поэтому (62.6) примет вид

$$g_M = \gamma_M - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (62.8)$$

Обозначим разность высот точек  $M$  и  $N$  через  $\zeta$ , тогда

$$\gamma_M = \gamma_N + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \zeta. \quad (62.9)$$

Согласно (61.6),

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{R}. \quad (62.10)$$

В этом случае поправка  $\frac{\partial \gamma}{\partial n} \zeta$  будет получена с ошибкой третьего порядка малости, так как  $\zeta$  — величина второго порядка малости, а вычисленное зна-

чение  $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$  при допущении, что Земля — шар, ошибочно на величину первого порядка.

Принимая во внимание (62.9) и (62.10), для (62.8) получаем

$$g_M = \gamma_N - \frac{2\gamma}{R} \zeta - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (62.11)$$

Теперь выразим отрезок  $MN = \zeta$  — высоту точки в функции возмущающего потенциала. Проведем через  $N$  и  $M$  уровенные поверхности нормального поля  $U_N$  и  $U_M$ . На основании общей формулы (58.17) напомним

$$\zeta = \frac{U_N - U_M}{\gamma}. \quad (62.12)$$

Положение точки  $N$  определяется из условия

$$W_0 - W_M = U_0 - U_N,$$

но

$$U_N = U_0 - \int g \, dh$$

и

$$U_M = W_M - T_M = W_0 - \int g \, dh - T_M.$$

Тогда для  $\zeta$  в (62.12) получим

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} [U_0 - W_0 + T_M]. \quad (62.13)$$

Если  $U_0 = W_0$ , то

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}. \quad (62.14)$$

Формулу (62.14) называют формулой Брунса.

На основании (62.11) и, принимая во внимание, что

$$\gamma \zeta = T,$$

получаем для (62.5) окончательно

$$\Delta g = g_M - \gamma_N = -\frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (62.15)$$

Выражение (62.15) и представляет собой искомое краевое условие.

Первый член, стоящий в правой части уравнения (62.15),  $-\frac{2T}{R}$ , учитывает различие в положении точек, для которых вычислено  $g_M$  и  $\gamma_N$ ; он выражает изменение силы тяжести при переходе от одной поверхности к другой. Его называют членом Брунса. Второй член  $\frac{\partial T}{\partial n}$  представляет силу, развиваемую возмущающим потенциалом. Оба члена являются величинами одного порядка. Заметим, что член Брунса меняется более плавно, чем второй член  $\frac{\partial T}{\partial n}$ .

Теперь определение возмущающего потенциала сводится к нахождению функции  $T$ , которая была бы вне  $S$  гармонической функцией координат, на бесконечности была бы регулярна и удовлетворяла бы на поверхности  $S$  условию (62.15), т. е.

$$g_M - \gamma_N = -\frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial n}.$$



Это будет так называемая третья внешняя краевая задача теории потенциала.

Полное решение этой задачи для поверхности Земли, данное Молоденским [36], достаточно сложно. Укажем лишь общий путь ее решения и приближенный результат, достаточный для последующих рассуждений и выводов.

Поскольку возмущающий потенциал  $T$  обладает всеми свойствами потенциала притяжения, то его можно представить в виде потенциала притяжения некоторого фиктивного материального слоя плотности  $\varphi$ , распределенного на земной поверхности  $S$  (рис. 116). Элементарная масса, приходящаяся на элемент поверхности  $dS$ , будет  $\varphi dS$ . В точке  $A$  вне  $S$  эта масса создает элементарный потенциал

$$\frac{\varphi dS}{r}, \quad (62.16)$$

а потенциал  $T$  от всей массы слоя выразится

$$T_A = \int_S \frac{\varphi dS}{r}, \quad (62.17)$$

где  $r$  — расстояние от исследуемой точки до элемента поверхности  $dS$ .

Представленный в таком виде возмущающий потенциал будет вне масс гармонической и регулярной на бесконечности функцией, т. е. он удовлетворит условиям  $\Delta_2 T = 0$  и  $\lim_{r \rightarrow \infty} T = 0$ . Но, определив по (62.17) возмущающий потенциал, мы ввели неизвестную вспомогательную функцию  $\varphi$ . Таким образом, теперь вместо  $T$  необходимо определять  $\varphi$ .

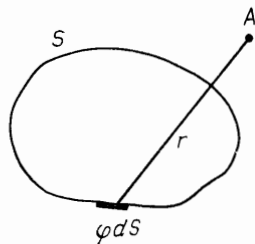


Рис. 116

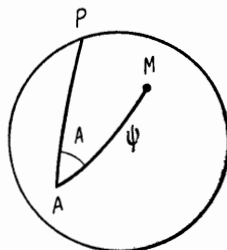


Рис. 117

Для этой цели воспользуемся условием (62.15), которому должен подчиняться возмущающий потенциал  $T$  на поверхности  $S$ .

Подставляя (62.17) в (62.15), получаем

$$g_M - \gamma_N = -\frac{2}{R} \int_S \frac{\varphi dS}{r} - \frac{\partial}{\partial H} \int_S \frac{\varphi dS}{r}, \quad (62.18)$$

где  $H$  — направление вертикали на Земле.

В качестве поверхности  $S$  в последнем выражении принимается близкая поверхность  $S_1$ , для которой высоты точек равны  $H_\gamma$ , точно получаемые из измерений (из нивелирования). Измеренные на всей поверхности Земли аномалии ( $g_M - \gamma_N$ ) также можем считать относенными к этой поверхности  $S_1$ . Поэтому в уравнении (62.18), если  $S$  заменить через  $S_1$ , остается одно неиз-

вестное — плотность слоя  $\varphi$ . Не приводя подробностей дифференцирования (62.18) и опуская сложные преобразования, напомним окончательный результат

$$2\pi\varphi \cos(n, H) = (g - \gamma) + \frac{3}{2\rho} \int_{S_1} \frac{\varphi dS_1}{r} + \frac{1}{2\rho} \int_{S_1} \frac{\varphi (H^\gamma - H_0^\gamma)}{r^3} dS_1, \quad (62.19)$$

где  $(n, H)$  — угол между нормальными к поверхности  $S_1$  и эллипсоиду;  
 $(H^\gamma - H_0^\gamma)$  — разность нормальных высот точек поверхности  $S_1$ .

Это основное интегральное уравнение, решающее задачу определения плотности  $\varphi$  введенного фиктивного слоя.

Полученное уравнение (62.19) для равнинных районов может быть упрощено. В этих районах можно положить  $H^\gamma - H_0^\gamma = 0$  при  $r \rightarrow 0$ ; влияние отдаленных горных районов, где  $(H^\gamma - H_0^\gamma)$  достигают значительной величины, будет также мало вследствие того, что это влияние определится выражениями  $\frac{H^\gamma - H_0^\gamma}{r^3}$  при большом значении знаменателей. Следовательно, для равнинных районов второй интеграл в уравнении (62.19) может не приниматься во внимание; можно также принять  $\cos(n, H) = 1$ .

Но если принять  $H^\gamma - H_0^\gamma = 0$ , то поверхность  $S_1$  обратится в сферу радиуса  $R$ . Обозначая эту сферу через  $\sigma$ , получаем

$$2\pi\varphi = (g - \gamma) + \frac{3}{2R} \int_{\sigma} \frac{\varphi d\sigma}{r}. \quad (62.20)$$

Решая интегральное уравнение (62.20), получаем выражение для  $\varphi$ . После подстановки его в (62.17), т. е.

$$T = \int_{\sigma} \frac{\varphi d\sigma}{r},$$

найдем решение этой задачи, данное Стоксом,

$$T_{\sigma} = \frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (62.21)$$

где  $d\sigma$  — элемент поверхности сферы  $\sigma$ ;

$\psi$  — сферическое расстояние от данной точки  $A$  до текущей точки  $M$  элемента  $d\sigma$  (рис. 117);

$S(\psi)$  — функция Стокса, определяемая выражением

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right); \quad (62.22)$$

$R$  — радиус сферы  $\sigma$ , т. е. радиус земного шара, который следует положить равным среднему радиусу Земли

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Элемент поверхности  $d\sigma$  можно выразить так:

$$d\sigma = R^2 \sin \psi d\psi dA. \quad (62.23)$$

Тогда выражение (62.21) для  $T$  примет вид

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, dA. \quad (62.24)$$

Зная  $T$ , легко находим выражение для аномалии высоты. Действительно, так как, согласно (62.14),

$$\zeta = \frac{T}{\gamma},$$

то

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_\sigma \Delta g S(\psi) \, d\sigma \quad (62.25)$$

или

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, dA. \quad (62.26)$$

Как показали исследования, ошибка в  $\zeta$ , вызванная заменой поверхности Земли  $S_1$  сферой  $\sigma$  в равнинных районах, — величина третьего порядка малости, т. е. пренебрегаемая величина.

Для вычисления возмущающего потенциала  $T$  и на его основе величин  $\zeta$ ,  $\xi$  и  $\eta$  для горных районов необходимо исходить из полной формулы (62.19). Более точная, чем (62.24), и в то же время сравнительно простая формула для  $T$ , учитывающая рельеф Земли, полученная на основе (62.19), может быть написана так:

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\Delta g + \delta g) S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, dA, \quad (62.27)$$

где  $\delta g$  приближенно равно [7, стр. 100, формулы (V.44)]

$$\delta g \cong \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \Delta g \frac{H^\gamma - H_0^\gamma}{r^3} \, d\sigma. \quad (62.28)$$

Выражение (62.27) — упрощенная формула Молоденского первого приближения.

## Глава X

### УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

#### § 63. Общие сведения

Уклонение отвесной линии в первом приближении можно определить как угол между направлением нормали к поверхности эллипсоида и направлением отвесной линии в исследуемой точке (точное определение этого понятия дано в § 65).

Уточним это понятие.

Если уклонение отвесной линии определяется как угол между нормалью к поверхности общего земного эллипсоида и направлением отвесной линии, то оно называется **абсолютным**.

Если уклонение отвесной линии определяется как угол между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и направлением отвесной линии, то такое уклонение называют **относительным**.

Абсолютное уклонение отвесной линии зависит только от распределения масс Земли. Относительное уклонение отвесной линии зависит от распределения масс Земли и принятых размеров и ориентировки референц-эллипсоида. Чем значительнее отступает референц-эллипсоид от общего земного эллипсоида, тем больше в среднем относительные уклонения отвесных линий. При этом влияние отступления референц-эллипсоида от общего земного эллипсоида на величину относительных уклонений отвесных линий будет носить систематический характер и, как правило, проявляться тем заметнее, чем обширнее область земной поверхности, к которой относятся эти уклонения отвесных линий.

Направление отвесной линии определяется на земной поверхности из астрономических наблюдений путем вывода астрономических координат  $\varphi$  и  $\lambda$ . Направление нормали на поверхности референц-эллипсоида определяется геодезическими координатами  $B$  и  $L$ . Отсюда следует, что относительные уклонения отвесных линий могут практически определяться из соответствующего сопоставления астрономических и геодезических координат. Поэтому относительные уклонения отвесной линии называют также **астрономо-геодезическими**.

Можно дать и несколько иное определение уклонения отвесной линии. Поскольку направление отвесной линии совпадает с действительным направлением вектора силы тяжести  $g$ , а направление нормали к эллипсоиду может определяться нормалью к поверхности уровенного эллипсоида, то уклонение отвесной линии можно определить как угол между направлениями векторов действительного и нормального полей силы тяжести. Если за уровенный эллипсоид нормальной силы тяжести взять общий земной эллипсоид, то угол  $(g, \gamma)$  выразит абсолютное уклонение отвесной линии, а если референц-эллипсоид, то относительное.

Отметим значение уклонений отвесных линий.

1. Уклонения отвесных линий — удобные виды характеристик отступлений действительного гравитационного поля Земли от некоторого другого, называемого нормальным; уклонения отвесных линий так же, как и высоты геоида (или квазигеоида) над референц-эллипсоидом, непосредственно используются для изучения фигуры Земли.

2. Используя отклонения отвесных линий, решают многие редукционные задачи высшей геодезии. Это следует из того, что непосредственные измерения связаны с отвесной линией, тогда как математическая обработка результатов геодезических измерений производится на эллипсоиде, на котором основная координатная линия — нормаль к поверхности эллипсоида. Например, горизонтальные углы треугольников триангуляции измеряют двугранниками, ребрами которых служат отвесные линии, так как вертикальные оси инструментов устанавливают при помощи уровня, фиксирующего положение уровенной поверхности и нормали к ней — отвесной линии. Естественно, что для строгой математической обработки результатов измерений на поверхности эллипсоида необходимо учитывать несовпадения непосредственно измеренных величин с соответствующими геометрическими элементами эллипсоида путем введения редукций в измеренные величины. Все эти редукции вычисляются сравнительно просто, если известны отклонения отвесных линий.

3. Через отклонение отвесных линий устанавливается простая связь между астрономическими и геодезическими координатами. Это позволяет, зная отклонения отвесных линий, переходить от астрономических координат  $\varphi$  и  $\lambda$  к геодезическим  $B$  и  $L$  при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi + \Delta\varphi \\ L &= \lambda + \Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (63.1)$$

где  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\lambda$  — весьма простые функции слагающих отклонений отвесных линий в меридиане и первом вертикале.

Соотношение (63.1) имеет и другое принципиальное значение: если оба слагаемых правой части вывести из измерений, то тем самым можно определить две координаты точек поверхности Земли, изучение которой составляет главную задачу высшей геодезии.

Возможность перехода от астрономических координат к геодезическим крайне важна, в частности при использовании астрономических пунктов как опорных, при топографических съемках.

4. Посредством отклонения отвесных линий осуществляется точный переход от измеренного астрономического азимута к геодезическому азимуту при помощи уравнения Лапласа (см. § 67). Этим самым, как увидим далее, создается возможность существенного повышения точности астрономо-геодезических сетей.

Уклонение отвесных линий в какой-либо точке определяется как разность двух векторных направлений; поэтому оно должно определяться двумя параметрами — величиной угла, обозначаемого обычно  $u$  и называемого полным уклонением отвесной линии, и азимутом плоскости, в которой расположен этот угол, обозначаемый  $\Theta$ . Однако чаще уклонения отвесных линий определяются двумя другими величинами: проекцией полного уклонения отвесной линии  $u$  на плоскости меридиана и первого вертикала данной точки. Проекция на плоскость меридиана называется обычно слагающей уклонения в меридиане и обозначается через  $\xi$  и проекция на плоскость первого вертикала — слагающей уклонения в первом вертикале и обозначается через  $\eta$ .

Если астрономический зенит отклоняется от геодезического на северо-восток или, что то же самое, направление вектора действительной силы тяжести отклоняется от нормального на юго-запад, то слагающие уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале ( $\xi$  и  $\eta$ ) считаются положительными.

При выполнении геодезических работ влияние уклонений отвесных линий в геометрическом смысле может рассматриваться как влияние некоторых ошибок систематического характера, подлежащих соответствующему анализу и учету.

Физическая причина, вызывающая уклонения отвесных линий, — одна, и она заключается в отступлении действительного гравитационного поля Земли от нормального. С этой точки зрения различные формулы, при помощи которых могут быть выражены уклонения отвесных линий, должны давать один и тот же результат, если только взята единая отсчетная поверхность тела, создающего нормальный потенциал, и выполнены с необходимой полнотой и точностью измерения, определяющие реальный потенциал силы тяжести Земли, или возмущающий потенциал. Нетрудно установить единую отсчетную поверхность; современные средства геодезических измерений позволяют получать результаты, ошибки которых малы и их влияние для практики в большинстве случаев пренебрегаемо. Главное, что еще отдаляет нас от единого вполне достоверного результата в решении ряда вопросов высшей геодезии различными методами, в том числе и задачи определения уклонения отвесной линии, это незавершенность различных видов геодезических измерений на всей поверхности Земли. Это в первую очередь следует отнести к гравиметрическим определениям, так как только они, при современном уровне измерительной техники, могли бы быть выполнены на всей земной поверхности, в том числе и на океанах.

При неравномерности размещения и несвязанности астрономо-геодезических и гравиметрических работ физический (гравиметрический) и геометрический (астрономо-геодезический) методы вывода уклонений отвесных линий дают не совпадающие между собой результаты. Различия между этими результатами значительны и почти во всех случаях теории и практики не пренебрегаемы. В то же время ни тот, ни другой метод не имеют такого преимущества, чтобы можно было использовать один и отвергнуть другой. Наоборот, ни гравиметрический, ни астрономо-геодезический методы, применяемые самостоятельно, по разным причинам непригодны в настоящее время для вывода уклонений отвесных линий на всей поверхности Земли или на отдельных ее значительных частях.

Но решение основных задач высшей геодезии потребовало знания уклонений отвесных линий, вычисляемых однозначно и точно по научно обоснованному методу, без существенных дополнительных затрат труда и времени.

Этим требованиям удовлетворяет астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий, основанный на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений и широко использованный в практике геодезических работ в СССР.

В последующих параграфах будут рассмотрены гравиметрический, астрономо-геодезический и получивший, как указано выше, широкое применение астрономо-гравиметрический метод.

В заключение заметим, что использование наблюдений искусственных спутников Земли позволяет исключить или ослаблять влияние незавершенности наземных геодезических измерений на всей поверхности Земли, а также позволяет связать отдельные геодезические сети, в том числе расположенные на разных материках.

## § 64. Гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий

Уклонения отвесных линий и аномалии силы тяжести — следствие несовпадения действительного и нормального потенциалов Земли, т. е. функция возмущающего потенциала  $T$ .

В § 62 найдено выражение возмущающего потенциала через аномалии силы тяжести, т. е.

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi dA. \quad (64.1)$$

Наша цель состоит в получении формул, выражающих компоненты уклонений отвесных линий в функции аномалий силы тяжести. Очевидно, это будет достигнуто, если получим выражения составляющих отвесных линий через возмущающий потенциал  $T$ . Подставив в найденные выражения его значение по (64.1), получим искомые формулы уклонений отвесных линий через аномалии силы тяжести.

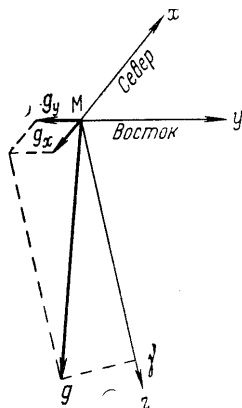


Рис. 118

Следуя намеченному пути, получаем сначала выражения для  $\xi$  и  $\eta$  через возмущающий потенциал.

В исследуемой точке  $M$  земной поверхности (рис. 118) построим местную систему координат, положив: направление оси  $z$  совпадающим с вектором нормальной силы тяжести  $\bar{\gamma}$ ; направление оси  $x$  — с касательной к меридиану на север; направление оси  $y$  — на восток.

Направление вектора действительной силы тяжести — отвесной линии обозначим  $\bar{g}$ .

Из рис. 118 следует, что

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \xi &= -\frac{g_x}{g_z} \\ \operatorname{tg} \eta &= -\frac{g_y}{g_z} \end{aligned} \right\}. \quad (64.2)$$

Далее имеем:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \right\}, \quad (64.3)$$

Но вследствие перпендикулярности вектора  $\bar{\gamma}$  к плоскости  $Mxy$  получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \gamma_x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \gamma_y = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (64.4)$$

Поэтому

$$g_x = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{и} \quad g_y = \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (64.5)$$

Имея в виду, что угол  $(g, \gamma)$  не превышает  $1'$ , можно положить, что  $g_z = \gamma$ . Тогда из (64.2) и (64.5) окончательно напомним:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (64.6)$$

Формулы (64.6) легко можно выразить в функции производных

$$\frac{\partial T}{\partial B} \text{ и } \frac{\partial T}{\partial L}.$$

Полагая с достаточной для нас точностью  $dx$  и  $dy$  как элементы дуг меридиана и параллели

$$dx = R dB,$$

$$dy = R \cos B dL,$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{R\gamma} \frac{\partial T}{\partial B} \\ \eta &= -\frac{1}{R\gamma \cos B} \frac{\partial T}{\partial L} \end{aligned} \right\} \quad (64.7)$$

Формулы (64.6) и (64.7) дают выражения для  $\xi$  и  $\eta$  через возмущающий потенциал  $T$ .

Переходя ко второй части вывода, на основании (62.24) найдем производные  $\frac{\partial T}{\partial B}$  и  $\frac{\partial T}{\partial L}$  и подставим их в (64.7). Не приводя подробностей вывода, напомним его результат:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \cos A dA d\psi \\ \eta'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g Q \sin A dA d\psi \end{aligned} \right\} \quad (64.8)$$

где  $\psi$  — по-прежнему сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей точки;

$A$  — азимут направления, по которому взято  $\psi$ ;

$\Delta g$  — аномалии силы тяжести;

$Q$  — функция от  $\psi$ , определяемая выражением

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[ \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (64.9)$$

Выражения (64.8) называются формулами Венинг-Мейнеса, по имени голландского ученого, давшего их вывод в 1928 г. Величину  $Q$  также называют функцией Венинг-Мейнеса.

При применении формул (64.8) предполагается, что аномалии силы тяжести известны для всей поверхности Земли, т. е. что выполнена мировая



гравиметрическая съемка. В этом случае был бы возможен вывод общего земного эллипсоида, а формулы (64.8) давали бы значения абсолютных уклонений отвесной линии.

Однако в настоящее время гравиметрическая съемка еще не завершена, общий земной эллипсоид не установлен, в разных континентах и отдельных государствах приняты различные поверхности относимости — референц-эллипсоиды с различающимися параметрами и ориентировкой. Пока еще даже выполненные гравиметрические измерения не сконцентрированы и не приведены в единую систему.

Вследствие использования в качестве поверхности относимости референц-эллипсоида в практических целях необходимо определять относительные или астрономо-геодезические уклонения отвесных линий. Учитывая изложенное, полученные в этом параграфе формулы для  $\xi$  и  $\eta$  не решают поставленную задачу.

Следовательно, чисто гравиметрический метод не может быть применен для точного вывода относительных уклонений отвесных линий.

Если при вычислении составляющих уклонений отвесных линий ограничиться интегрированием в пределах зоны определенного радиуса, например 1000 км ( $\psi \approx 9^\circ$ ), то нельзя установить величину допущенной ошибки; она будет зависеть от особенностей распределения аномальных масс в данном районе, густоты пунктов гравиметрической съемки, наклона поверхности референц-эллипсоида к поверхности общего земного эллипсоида. Во всяком случае, эта ошибка легко может достигать нескольких секунд и даже десятков секунд и, следовательно, она будет недопустимой.

Даже при достаточно полной густоте мировой гравиметрической съемки вычисление уклонений отвесной линии чисто гравиметрическим методом представляло бы практически трудную задачу. Необходимо было бы для вычисления уклонений в каждом пункте триангуляции учитывать влияние аномалий по всей поверхности Земли. Это составило бы в целом трудоемкую работу, хотя сейчас и разработаны новые методы учета аномалий дальних зон, существенно облегчающие вычисления.

#### § 65. Астрономо-геодезический метод вывода уклонений отвесных линий

Рассмотрим некоторую точку  $A_0$  (рис. 119) на земной поверхности, за которую первоначально примем поверхность референц-эллипсоида. Пусть эта точка — пункт триангуляции, для которого вычислены геодезические координаты  $B$  и  $L$  и геодезический азимут  $A_m$  на какой-либо предмет  $M$ . Пусть на этом пункте  $A_0$  выполнены астрономические определения, в результате которых получены астрономические координаты  $\phi$  и  $\lambda$  и астрономический азимут  $\alpha_m$  на тот же предмет  $M$ . Далее возьмем вспомогательную сферу с центром в точке  $A_0$  и с радиусом, равным единице. Продолжим направление нормали к поверхности эллипсоида в точке  $A_0$  до пересечения со вспомогательной сферой. Пусть нормаль пересечет нашу сферу в точке  $z$ , которая называется геодезическим зенитом в точке  $A_0$ . Поскольку выше мы допустили, что земная поверхность совпадает с поверхностью референц-эллипсоида, то направление нормали к последней совпадает с направлением касательной к силовой линии нормального поля ( $\gamma$ ), проходящей через точку  $A_0$ . Аналогично этому продолжим до пересечения со вспомогательной сферой направление отвесной линии. Очевидно, это направление совпадает с направлением вектора силы тяжести  $g$ .

Точка  $z_1$  пересечения этого направления с небесной сферой будет астрономическим зенитом точки  $A_0$ . Далее из точки  $A_0$  проведем прямую, параллельную оси Мира (оси вращения Земли), которая пересечет сферу в точке  $P$ . Через  $m$  обозначим точку пересечения визирной линии со вспомогательной сферой при наведении трубы теодолита на предмет  $M$ . Соединим дугами большого круга точки  $z$  и  $z_1$  с точками  $P$  и  $m$ . Тогда, вводя обозначения, будем иметь:

$mz_1 = z$  — измеренное зенитное расстояние на точку  $M$ ;

$A_0z_1m$  — вертикальная плоскость в точке  $A_0$ , проходящая через  $M$ ;

$mz = Z$  — «геодезическое» зенитное расстояние, т. е. зенитное расстояние, которое мы получили бы, если бы вертикальную ось теодолита направить по нормали к поверхности референц-эллипсоида;

$A_0zm$  — плоскость прямого нормального сечения в  $A_0$ , проходящая через  $M$ ;

$zP = 90^\circ - B$  — дуга, измеряющая угол между полюсом и зенитом.

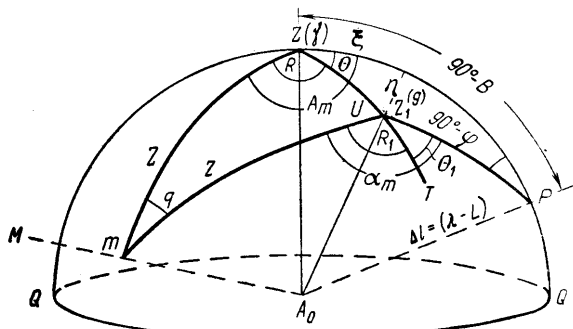


Рис. 119

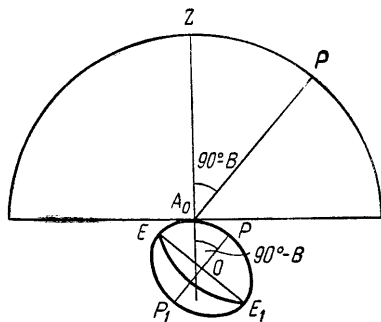


Рис. 120

Нетрудно доказать, что эта дуга действительно равна  $90^\circ - B$ . Пусть эллипсоид, изображенный на рис. 120, представляет собой Землю, тогда  $EE_1$  — большая полуось, лежащая в плоскости экватора;  $A_0$  — точка на земной поверхности, служившая исходной для построения рис. 119. На рис. 120 угол  $EOA_0$  равен широте  $B$  точки  $A_0$ , а угол  $A_0OP$  равен  $90^\circ - B$ . Так как  $A_0z$  — продолжение линии  $OA_0$ , а  $A_0P$  параллельна малой полуоси эллипсоида (оси Мира), то угол  $zA_0P$  также равен  $90^\circ - B$ .

Возвращаясь к рис. 119, отмечаем, что дуга  $zP$  измеряет угол между нормалью к эллипсоиду и направлением на точку  $P$ , поэтому выражение  $90^\circ - B$  соответствует геодезической широте точки  $A_0$ . Плоскость  $A_0zP$  — плоскость геодезического меридиана точки  $A_0$ ;  $\angle z_1P = 90^\circ - \varphi$  — дуга, связанная с направлением отвесной линии, поэтому  $90^\circ - \varphi$  соответствует астрономической широте точки  $A_0$ .

$A_0z_1P$  — плоскость астрономического меридиана точки  $A_0$ .

$\angle zPz_1 = \Delta l$  — угол между астрономическим и геодезическим меридианами точки  $A_0$ .

Так как астрономические и геодезические долготы отсчитываются от одного начального меридиана, то

$$\Delta l = \lambda - L;$$

$\angle zz_1 = u$  — дуга, измеряющая угол между направлением нормали к поверхности эллипсоида и направлением отвесной линии в точке  $A_0$  и выражающая полное уклонение отвесной линии в точке  $A_0$ ;

$\angle Pzz_1 = \Theta$  — геодезический азимут плоскости  $A_0zz_1$ , в которой находится полное уклонение отвесной линии в точке  $A_0$ ;

$\angle Pz_1T = \Theta_1$  — астрономический азимут той же плоскости.

Проведем из  $z_1$  дугу  $z_1z_2$ , перпендикулярную к геодезическому меридиану  $Pz$ , т. е. соответствующую сечению первого вертикала на эллипсоиде.

$\cup zz_2 = \xi$  — слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в меридиане;

$\cup z_1z_2 = \eta$  — слагающая (проекция) полного уклонения отвесной линии в первом вертикале;

$\angle Pzm = A_m$  — геодезический азимут плоскости  $A_0zM$ , т. е. прямого нормального сечения из  $A_0$  на  $M$ ;

$\angle Pz_1m = \alpha_m$  — астрономический азимут плоскости  $A_0z_1m$ , т. е. вертикального сечения из  $A_0$  на  $M$ .

Из сферического прямоугольного треугольника  $z_1z_2P$  (см. рис. 120) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\lambda - L) &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(B + \xi) \\ \sin \eta &= \sin(\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (65.1)$$

Раскладывая  $\sin(\lambda - L)$ ,  $\cos(\lambda - L)$  и  $\sin \eta$  в ряды и пренебрегая по малости величинами  $(\lambda - L)^2$  и  $\eta^2$ , получаем искомые выражения слагающих уклонения отвесной линии через астрономические и геодезические координаты:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (65.2)$$

Решая треугольник  $zz_1z_2$ , который по малости элементов можно рассматривать как плоский, находим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u \cos \Theta \\ \eta &= u \sin \Theta \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{\eta}{\xi} \\ u &= \frac{\xi}{\cos \Theta} = \frac{\eta}{\sin \Theta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned} \right\}, \quad (65.3)$$

или, на основании формул (65.2) и (65.3),

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta &= \frac{(\lambda - L) \cos \varphi}{(\varphi - B)} \\ u &= \frac{\varphi - B}{\cos \Theta} = \frac{(\lambda - L) \cos \varphi}{\sin \Theta} \\ u &= \sqrt{(\varphi - B)^2 + (\lambda - L)^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (65.4)$$

Найдем проекцию  $\vartheta_A$  полного уклонения отвесной линии  $u$  на вертикальную плоскость, имеющую азимут  $A_m$ . Из треугольника  $m_1zz_1$  (рис. 121), на котором составлены обозначения, соответствующие рис. 119, получаем

$$\vartheta_{A_m} = u \cos R = u \cos(A_m - \Theta) = u \cos A_m \cos \Theta + u \sin A_m \sin \Theta$$

или, принимая во внимание (65.3),

$$\vartheta_{A_m} = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m. \quad (65.5)$$

Полученные формулы (65.2) и (65.3) астрономо-геодезического метода вывода отклонений отвесной линии соответствуют сделанному допущению, что земная поверхность совпадает с референц-эллипсоидом или в данной точке пересекается с референц-эллипсоидом. Рассмотрим общий случай, когда точка земной поверхности  $A$  не лежит на референц-эллипсоиде, а имеет высоту  $H$ . В этом случае непосредственно наблюдаемые астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$  определяют направление отвесной линии в точке  $A$ , которое не совпадает с направлением отвесной линии в пересечении ее с поверхностью референц-эллипсоида в точке  $A_0$  (рис. 122).

Естественно, возникает мысль редуцировать астрономические координаты на поверхность референц-эллипсоида или геоида по отвесной линии, с тем чтобы вершину угла, определяющего отклонение отвесной линии, иметь на поверхности эллипсоида. В этом случае отклонение отвеса выразит наклон геоида

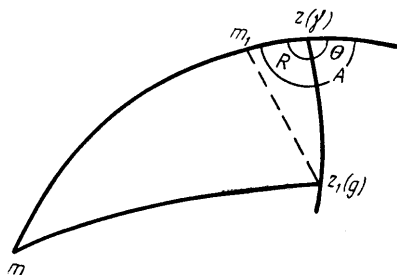


Рис. 121

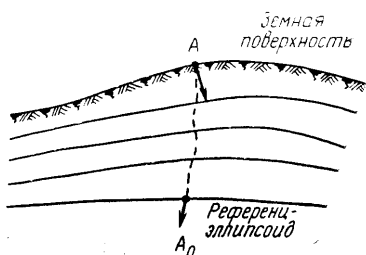


Рис. 122

относительно референц-эллипсоида. Но реальная отвесная линия  $AA_0$ , проходящая через точку  $A$  внутрь Земли, — линия двойной кривизны. Ее кривизна меняется не только под действием нормального поля Земли, но и вследствие неизвестных нам аномальных масс, причем изменение кривизны силовой линии может происходить скачкообразно.

Таким образом, точное редуцирование астрономических координат на референц-эллипсоид невозможно, так как неизвестны плотности внешнего (по отношению к эллипсоиду) слоя Земли. Поэтому в настоящее время принято за вершину угла, измеряющего отклонение отвесной линии, считать соответствующую точку физической поверхности Земли, а отклонение отвесной линии понимать как угол между направлением действительной силы тяжести и направлением нормальной силы тяжести в этой точке. Иначе говоря, отклонение отвесной линии в данной точке земной поверхности — угол между нормалью к уровенной поверхности и нормалью к поверхности сферопа, проходящих через данную точку поверхности Земли. Именно указанное понятие об отклонении отвесной линии имелось в виду в § 64 при выводе формул отклонений отвесной линии гравиметрическим методом.

При таком определении отклонения отвесной линии никаких поправок в астрономические координаты вводить не следует, так как их непосредственно наблюдаемые значения дают направление вектора силы тяжести в данной точке поверхности Земли. Однако другой вектор, образующий отклонение отвесной линии, — направление нормали к сферопу, или, что все равно, направление касательной к силовой линии нормального поля, отличается от направления нормали на поверхности эллипсоида; это отличие учитывается путем введения поправки в геодезическую широту.

Геометрический смысл этой поправки заключается в том, что геодезические координаты переносятся с поверхности эллипсоида на поверхность сферопа, проходящего через данную точку  $A$  по силовой линии нормального поля, или иначе: от геодезической широты на поверхности референц-эллипсоида осуществляется переход к геодезической широте, отнесенной к поверхности сферопа точки  $A$ . Но силовая линия нормального поля — плоская кривая, расположенная в плоскости меридиана, своей вогнутостью направлена к полюсу. Поэтому поправка вводится только в широту.

Согласно сделанному определению, отклонение отвесной линии  $\xi$  (рис. 123) представляется углом  $(\bar{\gamma}, \bar{g})$ ;  $\bar{g}$  — направление силы тяжести в точке Земли  $A$ , составляющее с плоскостью экватора угол  $\varphi$ , равный наблюдаемой астрономической широте в точке  $A$ ;  $\bar{\gamma}$  — направление нормали к сферопу точки  $A$ , иначе, направление касательной к силовой линии нормального поля, проходящей через точку  $A$  и составляющей с плоскостью экватора угол  $B_n$ . Точка  $A_0$  — проекция точки  $A$  на эллипсоид по силовой линии  $AA_0$ ;  $\gamma_0$  — направление касательной силовой линии  $AA_0$  в точке  $A_0$ , практически совпадающее с направлением прямой  $A_n$  — нормали к эллипсоиду и образующее, согласно определению сфероидической геодезии, с плоскостью экватора угол  $B$  — геодезическую широту точки  $A$ . Различие в направлениях  $A_n$  и  $\gamma_0$  составляет при  $H =$

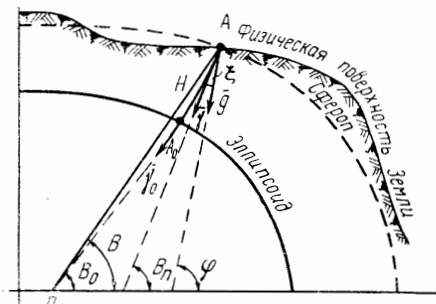


Рис. 123

$= 18000$  м величину  $0,0008'' \sin 2B$  [12, стр. 80]. Следовательно, на рис. 123 можно положить  $B = B_0$ .

С учетом сделанных пояснений можем написать

$$\xi = (\bar{\gamma}, \bar{g}) = \varphi - B_n. \quad (65.6)$$

Так как из геодезических вычислений определяется геодезическая широта  $B$ , то для вывода величины  $\xi$  по (65.2) необходимо знать разность  $(B - B_n)$ . Найдем эту величину как разность направлений касательных к силовой линии  $AA_0$  в точках  $A$  и  $A_0$ .

Проведем через точку  $A$  бесконечно малый отрезок  $AO$ , параллельный касательной к эллипсоиду в точке  $A_0$ ; угол при точке  $A$  в малом треугольнике  $AOO_1$ , очевидно, выразит искомую разность направлений касательных, т. е.  $(B - B_n)$ .

Из треугольника  $AOO_1$

$$(B - B_n) = \frac{OO_1}{AO_1}. \quad (65.7)$$

В этом выражении:

$OO_1$  — изменение расстояния между уровенными поверхностями при изменении широты на  $(B - B_n)$ , которое обозначим через  $\Delta H$ ;

$AO_1$  — с достаточной точностью определится как элемент дуги меридиана, равный  $M(B - B_n)$ .

Следовательно,

$$(B - B_n) = \frac{\Delta H}{M(B - B_n)}. \quad (65.8)$$

Для двух близких уровенных поверхностей можем написать

$$\gamma dH = dW = dc, \quad (65.9)$$

где  $dH$  — расстояние между рассматриваемыми уровенными поверхностями. Из (65.9) следует, что

$$\gamma d^2H + d\gamma dH = 0. \quad (65.10)$$

В (65.10)  $d^2H$  — изменение  $dH$  вследствие непараллельности уровенных поверхностей.

Из (65.10) получим

$$d^2H = -\frac{d\gamma}{\gamma} dH. \quad (65.11)$$

Из уравнения Клеро (59.34)

$$\gamma = \gamma_{45^\circ} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2B\right)$$

можем написать

$$\frac{d\gamma}{\gamma_{45^\circ}} = \beta \sin 2B dB. \quad (65.12)$$

С учетом (65.12) выражение (65.11) с достаточной точностью перепишем так:

$$d^2H = -\beta \sin 2B dB dH. \quad (65.13)$$

Откуда, интегрируя, получаем

$$\Delta H = -H\beta \sin 2B dB, \quad (65.14)$$

считая широту  $B$  постоянной и пренебрегая малыми величинами третьего порядка, после подстановки (65.14) в (65.8) получаем окончательно

$$(B - B_n)'' = -\frac{H}{M} \beta \sin 2B \rho''. \quad (65.15)$$

Если выразим  $H$  в километрах, возьмем числовое значение для  $B = 45^\circ$ , положим  $\beta = 0,0053$ , а поправку  $(B - B_n)''$  обозначим через  $\varepsilon''$ , то получим рабочую формулу

$$(B_n - B)'' = \varepsilon'' = 0,171 H \sin 2B. \quad (65.16)$$

При  $H = 1$  км и  $B = 45^\circ$   $(B_n - B) = 0,17''$ . Следовательно, рассматриваемая поправка не пренебрегаема.

Таким образом, окончательные формулы для вычисления астрономо-геодезических уклонений отвесных линий  $\xi_{ar}$  и  $\eta_{ar}$  будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ar}'' &= \varphi - B - 0,171'' H \sin 2B \\ \eta_{ar}'' &= (\lambda - L) \cos B \end{aligned} \right\}. \quad (65.17)$$

Если обозначим:

$\vartheta_{ar}$  — составляющая уклонения отвесной линии в произвольной плоскости азимута  $A$ ;

$\Theta_{ar}$  — составляющая угла между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и отвесной линией той же плоскости, то

$$\vartheta_{ar} = \xi_{ar} \cos A + \eta_{ar} \sin A, \quad (65.18)$$

$$\Theta_{ar} = (\xi_{ar} + 0,171'' H \sin 2B) \cos A + \eta_{ar} \sin A. \quad (65.19)$$

Откуда

$$\Theta_{ag} - \vartheta_{ag} = \varepsilon = 0,471'' H \sin 2B \cos A. \quad (65.20)$$

Из формул (65.17), как и, формул (65.18) (65.19), следует, что для определения астрономо-геодезических уклонений по рассматриваемому методу в каком-либо пункте триангуляции должны быть известны также точные астрономические координаты — широта и долгот  $\varphi_A$  и  $\lambda_A$ . Как увидим далее, для строгого решения редукционных задач и вычисления высот точек Земли над референц-эллипсоидом уклонения отвесной линии должны быть известны для каждого пункта триангуляции 1 класса, а в горных районах и для пунктов триангуляции 2 класса. Следовательно, для применения астрономо-геодезического метода уклонений отвесных линий необходимо на каждом пункте триангуляции 1 класса, а в указанных особых районах и на пунктах триангуляции 2 класса определить астрономические координаты. Это требование делает практически неосуществимым применение астрономо-геодезического метода вывода уклонений отвеса на значительных территориях.

Итак, оба рассмотренных метода вывода уклонений отвесных линий, взятые отдельно, не могут быть практически применены по разным причинам, указанным выше.

Достаточно точное решение рассматриваемой задачи дает астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий, основанный на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

#### § 66. Астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий

Допустим, что на территории страны выполнена сплошная гравиметрическая съемка и создана астрономо-геодезическая сеть. В СССР, например, планомерно выполняемая гравиметрическая съемка производится с 1934 г. и к настоящему времени ею покрыта большая часть территории нашей страны.

Развитие астрономо-геодезической сети СССР в виде полигонов близко к завершению; эта сеть оснащена пунктами Лапласа примерно через 200 км и, кроме того, между ними, вдоль рядов 1 класса, — через 70—100 км определяются на пунктах триангуляции астрономические широты и долготы.

Выберем на территории страны некоторую точку  $C$  и поставим задачей определить в ней астрономо-геодезическое уклонение отвесной линии путем совместного использования материалов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений. В общем случае для точки  $C$  неизвестны ни геодезические, ни астрономические координаты; ее положение можно определить по какой-либо топографической карте (масштаба 1 : 100 000 и крупнее). Практически необходимо для геодезии вычислять астрономо-геодезические уклонения отвесной линии тех точек, для которых известны только или геодезические или астрономические координаты. Для точек, имеющих геодезические координаты (пунктов триангуляции), уклонения отвесных линий необходимы для вычисления редукционных поправок и высот пунктов; для астрономических пунктов — для перехода от астрономических координат к геодезическим по формулам, вытекающим из (63.4).

Вокруг исследуемого пункта  $C$  возьмем некоторую область  $\sigma$ ; пусть влияние аномалий этой области на величину полного уклонения отвесной линии равно  $u_\sigma$ ; остальную часть поверхности Земли обозначим через  $\Sigma$ . Пусть влия-

яние аномалий этой области будет  $u_{\Sigma}$ . Из основного закона всемирного тяготения следует, что сила притяжения уменьшается пропорционально квадрату расстояния; поэтому влияние аномальных масс, характеризующихся аномалиями силы тяжести, на величину уклонений отвесных линий по мере удаления от исследуемого пункта  $C$  будет уменьшаться и приобретать все более и более плавный характер. Поэтому можно выбрать такую область  $\sigma_0$  внутри  $\sigma$ , чтобы влияние аномалий силы тяжести области  $\Sigma$  на уклонение отвесной линии в этой области могло считаться изменяющимся линейно.

На величину астрономо-геодезического уклонения отвесной линии будет влиять и различие в размерах и ориентировке между референц-эллипсоидом и общим земным эллипсоидом; обозначим это влияние через  $\delta u$ . Это влияние, даже при значительной его величине, будет также изменяться линейно.

Следовательно, полное астрономо-геодезическое уклонение можно представить в виде трех слагаемых

$$u_{ar} = u_{\bullet} + u_{\Sigma} + \delta u. \quad (66.1)$$

Поскольку последние слагаемые  $u_{\Sigma}$  и  $\delta u$  в пределах области  $\sigma_0$  изменяются линейно, то целесообразно поставить задачу их совместного определения. Обозначая  $u_{\Sigma} + \delta u$  через  $\Delta u$ , можем написать

$$u_{ar} = u_{\bullet} + \Delta u \quad (66.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ar} &= \xi_{\sigma} + \Delta \xi \\ \eta_{ar} &= \eta_{\sigma} + \Delta \eta \end{aligned} \right\}. \quad (66.3)$$

Из условия выбора области  $\sigma$  следует сделать вывод, что влияние аномалии силы тяжести в границах этой области должно учитываться по их действительным значениям. Следовательно, полагая аномалии  $\Delta g$  в пределах области  $\sigma$  известными, уклонения  $\xi_{\sigma}$  и  $\eta_{\sigma}$  должны вычисляться по формулам Венинг-Мейнеса, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\sigma}'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha \int_0^{\psi} \Delta g \, Q \, d\psi \\ \eta_{\sigma}'' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha \int_0^{\psi} \Delta g \, Q \, d\psi, \end{aligned} \right\}, \quad (66.4)$$

$$\begin{aligned} Q'' &= \frac{\rho''}{2\gamma_0} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[ \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (66.5)$$

Если область  $\sigma$  имеет радиус  $\rho$ , то радиус области  $\sigma_0$  должен быть в 2—3 раза меньше, т. е.  $\rho_{\sigma_0} = \frac{1}{2} \rho_{\sigma}$ .

Использованием формул (66.4) и данных гравиметрической съемки в области  $\sigma$  решается задача вычисления  $\xi_{\sigma}$  и  $\eta_{\sigma}$  по (66.3). В дальнейшем слагающие уклонения  $\xi_{\sigma}$  и  $\eta_{\sigma}$  будем обозначать  $\xi_{gr}$  и  $\eta_{gr}$  — по методу их вычисления. Формулы (66.4) в пределах ограниченной области можно упростить.



Упрощение формул (66.4) и приемы вычисления по ним при  $\psi$  до  $\sim 10^\circ$  приведены ниже.

Рассмотрим вычисления вторых слагаемых в формулах (66.3) ( $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$ ). Для их определения в области  $\sigma_0$  должно быть не меньше трех астрономических пунктов, расположенных по возможности равномерно и не на большом удалении от границы области  $\sigma_0$ . Для каждого из таких пунктов известны астрономические и геодезические координаты, т. е.  $\varphi$ ,  $\lambda$  и  $B$ ,  $L$ . Поэтому для каждого астрономо-геодезического пункта можем вычислить:

$$\begin{aligned}\xi_{ag} &= \varphi - B - 0,171'' H \sin B, \\ \eta_{ag} &= (\lambda - L) \cos B.\end{aligned}\quad (66.6)$$

Пользуясь формулами (66.4), вычисляем для этих же пунктов гравиметрические отклонения отвесной линии, т. е. величины  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$ . Очевидно, разности ( $\xi_{ag} - \xi_{гр}$ ) и ( $\eta_{ag} - \eta_{гр}$ ) определяют поправки  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$ . Между данными астрономо-геодезическими пунктами (по условию) эти поправки в пределах области  $\sigma_0$  изменяются линейно. Поэтому, применяя линейное интерполирование, легко вычислить значения  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$  для любой точки области  $\sigma_0$ , расположенной между астрономо-геодезическими пунктами. Если астрономо-геодезических пунктов больше трех, то интерполяционные коэффициенты определяют по способу наименьших квадратов и производят оценку точности величин  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$ .

Выше кратко изложена идея астрономо-гравиметрического метода вывода отклонений отвесной линии без приведения подробностей математических исследований, выполненных при его разработке. Описанный метод выявляет достоинство совместного использования материалов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Точность определения  $\xi_{ag}$  и  $\eta_{ag}$  изложенным методом зависит от ошибок определения  $\xi_{гр}$ ,  $\eta_{гр}$  и поправок  $\Delta \xi$ ,  $\Delta \eta$ . Ошибки  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  зависят: от размера учитываемой при интегрировании области  $\sigma$ , от аномальности района, от правильности изображения аномальных полей на гравиметрических картах. При этом в основном влияют ошибки учета аномалий силы тяжести вблизи исследуемого пункта, в зоне от 0 до 30—50 км. Поэтому для повышения точности определения  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  необходимо сгущение гравиметрической съемки внутри зоны этого радиуса, а также расширение области интегрирования  $\sigma$  путем использования данных хотя бы более редкой сети гравиметрических пунктов. При таких условиях ошибки вывода  $\xi_{ag}$  и  $\eta_{ag}$  можно довести в равнинных, неаномальных, районах до 0,2—0,3". Вывод отклонений отвеса в горных районах сильно усложняется действием ближайших горных массивов; в этих районах необходима более густая сеть гравиметрических пунктов; вычисление  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  должно производиться по более точным и сложным формулам, учитывающим влияние рельефа.

Учитывая большую практическую значимость астрономо-гравиметрического метода вывода отклонений отвеса, далее приводим упрощение формул (66.4) для интегрирования в зоне при  $\psi$  от 0 до  $9^\circ$ , излагаем применяющуюся методику вычислений  $\xi_\sigma$ ,  $\eta_\sigma$  и  $\Delta \xi$ ,  $\Delta \eta$  в равнинном районе.

### 1. Упрощение формулы для вычисления гравиметрических отклонений отвесной линии

При значении  $\psi$  от 0 до  $10^\circ$  в выражении (66.5) для функции  $Q$  можно положить  $\sin \frac{\psi}{2} = 0$  и  $\cos \frac{\psi}{2} = 1$ .

Тогда получим

$$Q_1 = \frac{\rho''}{2\gamma} \left( \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 3 \right). \quad (66.7)$$

После подстановки числовых значений  $\rho'' = 206\,265$  и  $g = 981\,000$  млг — среднего значения силы тяжести для Европейской части СССР — формула (66.7) примет вид

$$Q_1 = 0,10513'' \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 0,315''. \quad (66.8)$$

Для того чтобы установить степень приближенности формулы (66.8), приведем результаты подсчетов числовых значений функции  $Q$  и разностей  $Q - Q_1$  (табл. 18).

Т а б л и ц а 18

$\psi$	$Q$	$Q - Q_1$	$\psi$	$Q$	$Q - Q_1$
1°	12,370''	0,008''	10°	1,591''	0,070''
2	6,354	+0,015	15	1,212	+0,092
3	4,354	+0,023	20	1,020	+0,100
4	3,358	+0,031	25	0,895	+0,094
5	2,763	+0,037	30	0,795	+0,074

На основании табл. 18 можно получить эмпирическим путем более точное выражение для  $Q$

$$Q_2 = Q_1 + 0,0072\psi^\circ. \quad (66.9)$$

Разности  $Q - Q_2$  для тех же величин  $\psi$  будут иметь значения, приведенные в табл. 19.

Т а б л и ц а 19

$\psi$	$Q - Q_2$	$\psi$	$Q - Q_2$
1°	+0,001''	10°	-0,002''
2	+0,001	15	-0,016
3	+0,001	20	-0,044
4	+0,002	25	-0,086
5	+0,001	30	-0,142

В пределах  $\psi$  от 0 до  $\sim 10^\circ$  — величина  $Q_2$ , вычисляемая по приближенной формуле (66.9), практически совпадает с соответствующими значениями  $Q$ , вычисляемыми по точной формуле (66.5), но при  $\psi > 10^\circ$  значения функции  $Q$ , вычисляемые по указанным двум формулам, имеют значительные расхождения; поэтому формула (66.9) для  $Q_2$  может употребляться только при  $\psi < 10^\circ$ .

Преобразуем  $Q_2$ , введя вместо углового расстояния  $\psi$  линейное расстояние  $r$  по дуге большого круга, т. е.

$$r = R \cdot \psi, \quad (66.10)$$

где  $R$  — средний радиус Земли.

Так как

$$\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} = \frac{2}{\psi} + \frac{\psi}{12} = \frac{2R}{r} + \frac{r}{12R} \quad \text{и} \quad r_{\text{км}} = 111,2\psi,$$

то

$$Q_2 = Q_1 + 0,0072\psi^\circ = \frac{\rho''}{2g} \left\{ \left( \frac{2R}{r} + \frac{r}{12R} \right) + 3 \right\} + 0,0072 \frac{r}{111,2} \quad (66.11)$$

или

$$Q_2 = \frac{A}{r} + B + Cr, \quad (66.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\rho'' R}{g} \\ B &= \frac{3\rho''}{2g} \\ C &= 0,000066'' \end{aligned} \right\}. \quad (66.13)$$

Подставляя в последние выражения числовые значения  $\rho$ ,  $g$  и  $R = 6371$  км, получаем:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1339,6'' \\ B &= 0,315'' \\ C &= 0,000066'' \end{aligned} \right\}. \quad (66.14)$$

Так как  $r = R\psi$ , то  $d\psi = \frac{dr}{R}$ .

Подставляя в основные формулы (66.4) значение  $d\psi$  и заменяя пределы интегриации, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \Delta g Q_2 \cos \alpha \, dr \, d\alpha \\ \eta'' &= -\frac{1}{2\pi R} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \Delta g Q_2 \sin \alpha \, dr \, d\alpha \end{aligned} \right\}, \quad (66.15)$$

где  $r_1$  — верхний предел интегриации, равный примерно 1000 км.

Формулы (66.15) позволяют практически достаточно точно решать задачу вывода уклонений отвесных линий с учетом влияния аномалий в радиусе до 1000 км.

Интегрирование по формулам (66.5) не может быть выполнено аналитически, так как нам известны лишь числовые значения входящих под знак интеграла аномалий силы тяжести  $\Delta g$  для некоторых дискретных точек. Поэтому интегрирование должно проводиться численным методом, как суммирование по элементарным участкам, на которые подразделяется область интегрирования. Число таких участков должно быть достаточно велико для того, чтобы процесс суммирования приблизить к процессу интегрирования. Очевидно, каждая из суммируемых величин должна быть выражена ее средним значением на данном элементарном участке. Однако с применением метода численного интегрирования возникает затруднение при подсчете влияния зоны, непосредственно окружающей данную точку. Действительно, функция  $Q$  при  $r = 0$  обращается в бесконечность, а  $\int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha$  и  $\int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha$  обращаются в нуль. Выражения

(66.15) обращаются в неопределенность, и обычный процесс суммирования становится невозможным. Таким образом, влияние ближайшей зоны, за которую принимают зону при  $r$  от 0 до 5 км, учитывают специальным методом отдельно от области, лежащей в пределах от 5 до 1000 км. Следовательно, вычисление по формулам (66.15) для зоны радиусом в 1000 км разбивается на две части: учет влияния ближайшей зоны от 0 до  $r_0$  (5 км) и учет влияния остальной части области радиусом 1000 км и более. Рассмотрим отдельно методы вычисления поправок в каждой части.

## 2. Вычисление поправок за влияние аномалий в центральной зоне

Вследствие малости зоны формулу (66.12) для  $Q_2$  можно написать, ограничившись первым членом  $\frac{A}{r}$ , т. е.

$$Q_2 = \frac{\rho'' R}{gr}, \quad (66.16)$$

тогда (66.15) для центральной зоны примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi''_{0,r_0} &= - \frac{\rho''}{2\pi g} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{1}{r} \cos \alpha \, dr d\alpha \\ \eta''_{0,r_0} &= - \frac{\rho''}{2\pi g} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Delta g \frac{1}{r} \sin \alpha \, dr d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (66.17)$$

Если  $\Delta g$  постоянно, то последние выражения обращаются в нуль; поэтому написанные формулы будут верны, если вместо  $\Delta g$  написать  $\Delta g - \Delta g_0$ , где  $\Delta g_0$  — постоянная величина, за которую в данном случае выгодно принять аномалию силы тяжести в исследуемом пункте.

Таким образом, имеем для  $\xi''_{0,r_0}$

$$\xi''_{0,r_0} = - \frac{\rho''}{2\pi g} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r} \cos \alpha \, dr d\alpha. \quad (66.18)$$

Но

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r} \right\} = \frac{\partial \Delta g}{\partial r}. \quad (66.19)$$

Выражая  $\frac{\partial \Delta g}{\partial r}$  через составляющие по осям  $x$  и  $y$ , получаем

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial r} = \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Delta g}{\partial y} \sin \alpha, \quad (66.20)$$

где  $\frac{\partial \Delta g}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Delta g}{\partial y}$  суть градиенты аномалий силы тяжести по осям координат  $x$  и  $y$ .

Подставляя (66.20) в (66.18), вместо  $\frac{\Delta g - \Delta g_0}{r}$  после интегрирования получаем

$$\xi''_{0,r_0} = - \frac{\rho''}{2g} r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \quad (66.21)$$

и аналогично

$$\eta''_{0,r_0} = - \frac{\rho''}{2g} r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial y}.$$

Подставляя числовое значение  $\frac{\varphi''}{2\gamma} = 0,105''$ , получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \xi''_{0,r_0} &= -0,105'' r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial x} \\ \eta''_{0,r_0} &= -0,105'' r_0 \frac{\partial \Delta g}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (66.22)$$

Значения  $\frac{\partial \Delta g}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Delta g}{\partial y}$  легко могут быть получены с карты изоаномал.

Для их определения рекомендуется поступать следующим образом.

Пусть  $O$  — точка, для которой вычисляется уклонение отвесной линии (рис. 124). Проводим направление максимального градиента, т. е. направление, перпендикулярное к изолиниям и проходящее через данную точку, в обе стороны от точки  $O$ . Определив значения аномалий силы тяжести на расстоянии, равном  $r_0$ , в обе стороны от точки  $O$ , т. е.  $\Delta g_2$  и  $\Delta g_1$ , получим максимальный градиент  $\frac{\partial \Delta g}{\partial r}$ , который в нашем случае равен

$$-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_0 = \frac{\Delta g_2 - \Delta g_1}{2r_0} = \frac{57 - 35}{10} = +2,2 \text{ мгл/км.}$$

Измерим транспортиром угол  $\alpha$  между направлением максимального градиента и направлением оси  $Ox$ ; будем иметь:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial x} = \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_0 \cos \alpha, \quad \frac{\partial \Delta g}{\partial y} = \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial r}\right)_0 \sin \alpha.$$

Значение поправки за влияние аномалий в центральной зоне мало; в то же время определение горизонтальных градиентов по осям  $x$  и  $y$  описанным способом производится ненадежно, если имеется только

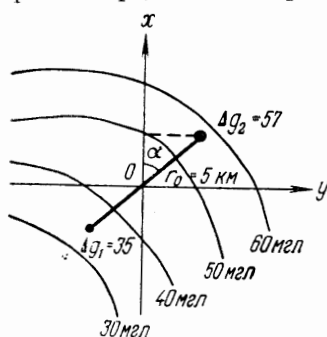


Рис. 124

общая гравиметрическая съемка с расстоянием между пунктами около 33 км. Поэтому при выводе уклонений отвесных линий только по материалам общей гравиметрической съемки влиянием зоны можно пренебречь.

Влияние центральной зоны следует непременно учитывать, если ставится задача получения уклонений отвесных линий с ошибкой порядка  $\pm 0,5''$  и меньше, но тогда вокруг исследуемого пункта должно быть определено дополнительно около 20 гравиметрических пунктов в радиусе примерно 50 км, т. е. должна быть выполнена так называемая гравиметрическая съемка сгущения. В этом

случае горизонтальные градиенты аномалий силы тяжести определяются надежно и учет поправок за ближнюю зону производится уверенно.

### 3. Учет влияния кольцевых зон (при радиусе до 1000—2000 км)

Остановимся на общей методике учета влияния аномалий силы тяжести кольцевых зон, расположенных вокруг данного пункта. Задача заключается в суммировании и получении для некоторых малых участков, принимаемых за элементарные, значений  $\Delta g Q_2 \cos \alpha$  и  $\Delta g Q_2 \sin \alpha$ , являющихся подынтегральными функциями в выражениях (66.15). Для этой цели в масштабе гравиметрической карты строят специальную сетку на прозрачной кальке или целлулоиде. На этой сетке, называемой палеткой, проведены из центра радиальные лучи и окружности разных радиусов, разбивающие поверхность палетки на кольцевые секторы. Выше указывалось, что по мере удаления от

исследуемого пункта влияние аномалий силы тяжести ослабевает; это обстоятельство позволяет определить величины  $\Delta g Q_2 \cos \alpha$  и  $\Delta g Q_2 \sin \alpha$  с разной точностью, в зависимости от радиуса зоны. В настоящее время принято учет влияния аномалий силы тяжести в радиусе от 5 до 1000 км производить по частям, т. е. в радиусе:

- 1) от 5 до 102,5 км; при этом употребляется палетка № 1; учет влияния аномалий производится по гравиметрической карте в масштабе 1 : 1 000 000;
- 2) от 102,5 до 305 км; для этой зоны употребляется палетка № 2 и карта в масштабе 1 : 10 000 000;
- 3) от 305 до 1000 км; употребляется также палетка № 2 и карта в масштабе 1 : 10 000 000.

Остановимся на методах расчета палеток.

При расчете палеток ставилось условие, чтобы влияние аномалий силы тяжести на уклонение отвесной линии каждой ячейки палетки было одинаковое. Но при таком методе расчета палетки величина ячеек, находящихся под разными азимутами, получается неодинаковой. Вследствие этого точность определения средних значений аномалий в разных ячейках одного и того же радиуса получается различной. Кроме того, при определении средних аномалий для вывода уклонений отвеса в меридиане и первом вертикале палетку необходимо поворачивать на  $90^\circ$ , что нередко вызывает путаницу при вычислении. Поэтому в настоящее время палетки строят так, чтобы проводить радиусы на одинаковом угловом расстоянии.

Расчет палетки в этом случае производится следующим образом.

Для вычисления  $\xi''$  по (66.15) разобьем области интегрирования на три кольцевые области приблизительно следующих радиусов: от 5 до 100 км, от 100 до 300 км и от 300 до 1000 км. Каждую из этих областей разделим на концентрические зоны равного влияния. Определим радиусы этих зон. Для этого ставим условие, чтобы существовали равенства:

$$\int_{r_0}^{r_1} Q_2 dr = \int_{r_1}^{r_2} Q_2 dr = \int_{r_2}^{r_3} Q_2 dr = \dots = \text{пост.} = P \quad (66.23)$$

или в виде конечных сумм

$$\bar{Q}_2 dr = P, \quad (66.24)$$

где  $\bar{Q}$  — среднее значение  $Q_2$  для каждой зоны.

Подставляя значение  $Q_2$  в (66.23) и интегрируя, получаем

$$\ln r_k = \ln r_{k-1} + \frac{B}{A} r_{k-1} + \frac{C}{2A} r_{k-1}^2 + \frac{P}{A} - \frac{B}{A} r_k - \frac{C}{2A} r_k^2. \quad (66.25)$$

Разобьем область интегрирования от 5 до 100 км на 16 равных секторов, т. е. проведем радиусы через  $22,5^\circ$ , а две другие кольцевые области (от 100 до 300 км и от 300 до 1000 км) — на 24 равных сектора, т. е. проведем радиусы через  $15^\circ$ .

Обозначим через  $\Delta g_i^k$  среднюю аномалию в ячейке, лежащей в зоне с номером  $k$  и имеющей в этой зоне номер  $i$ . Переходя от интегральных формул (66.15) к формулам конечных сумм и учитывая (66.23), получаем

$$\begin{aligned} \xi'' = & -\frac{P_1}{16R} \sum_{i=1}^{16} \sum_{k=1}^8 \Delta g_i^k \cos \alpha_i + \frac{P_2}{24R} \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=9}^{13} \Delta g_i^k \cos \alpha_i + \\ & + \frac{P_3}{24R} \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=14}^{21} \Delta g_i^k \cos \alpha_i. \end{aligned} \quad (66.26)$$

Аналогично этому для  $\eta''$

$$\eta'' = -\frac{P_1}{16R} \sum_{i=1}^{16} \sum_{k=1}^8 \Delta g_i^k \sin \alpha_i + \frac{P_2}{24R} \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=9}^{13} \Delta g_i^k \sin \alpha_i + \frac{P_3}{24R} \sum_{i=1}^{24} \sum_{k=14}^{21} \Delta g_i^k \sin \alpha_i. \quad (66.27)$$

Положим

$$\frac{P_1}{16R} = 0,005'', \quad (66.28)$$

$$\frac{P_2}{24R} = 0,002'', \quad (66.29)$$

$$\frac{P_3}{24R} = 0,0015''. \quad (66.30)$$

После этого по формуле (66.25) вычисляем значения  $r_k$  с использованием для определения  $P_1, P_2, P_3$  выражений (66.28)–(66.30) и числовых значений коэффициентов  $A, B, C$  согласно (66.14).

Рассмотрим порядок вычислений уклонения отвеса  $\xi''$  в меридиане. Согласно формуле (66.26), выражение для  $\xi''$  состоит из трех частей, соответствующих областям с радиусами от 5 до 100 км, от 100 до 300 км и от 300 до 1000 км.

Для вычисления первого члена формулы (66.26), соответствующего зоне от 5 до 100 км, применяется палетка № 1 (рис. 125), на которой окружность разделена на 16 секторов, а радиусы рассчитаны по формуле (66.25) при значении  $P_1$ , определенном из равенства  $\frac{P_1}{16R} = 0,005''$ .

Палетку накладывают на гравиметрическую карту масштаба 1 : 1 000 000 так, чтобы центр палетки совпал с исследуемым пунктом, а линия  $NS$  палетки совпала с меридианом, проходящим через данный пункт. После этого для каждой ячейки определяют среднее значение аномалии  $\Delta g$ . В пределах сектора, ограниченного двумя смежными радиусами, значения средних аномалий отдельных ячеек суммируют, затем умножают на косинус азимута данного сектора  $i$ .

Таким образом получается величина  $\sum_{k=1}^8 \Delta g_i^k \cos \alpha_i$ . Величины, полученные для каждого сектора, суммируют и умножают на 0,005''. Вычисленное таким образом число и будет представлять собой значение члена

$$\frac{P_1}{16R} \sum_{i=1}^{16} \sum_{k=1}^8 \Delta g_i^k \cos \alpha_i,$$

дающего уклонение отвесной линии в зоне радиуса от 5 до 100 км. Образец карты с наложенной палеткой № 1 дан в прил. 5.

Аналогично этому вычисляют уклонение отвесной линии в первом вертикале; различие заключается лишь в том, что суммы аномалий умножаются на синусы азимутов секторов.

Второй и третий члены формулы (66.26) вычисляют так же, как и первый.

Поскольку значения этих членов, представляющих собой влияние аномалий силы тяжести в зонах с радиусами от 100 до 300 км и от 300 до 1000 км,

меньше, чем в зоне с радиусом до 100 км, постольку для определения средних аномалий принимают гравиметрическую карту в масштабе 1 : 10 000 000.

Соответствующая палетка изображена на рис. 126 (палетка № 2); принцип ее построения такой же, как палетки № 1.

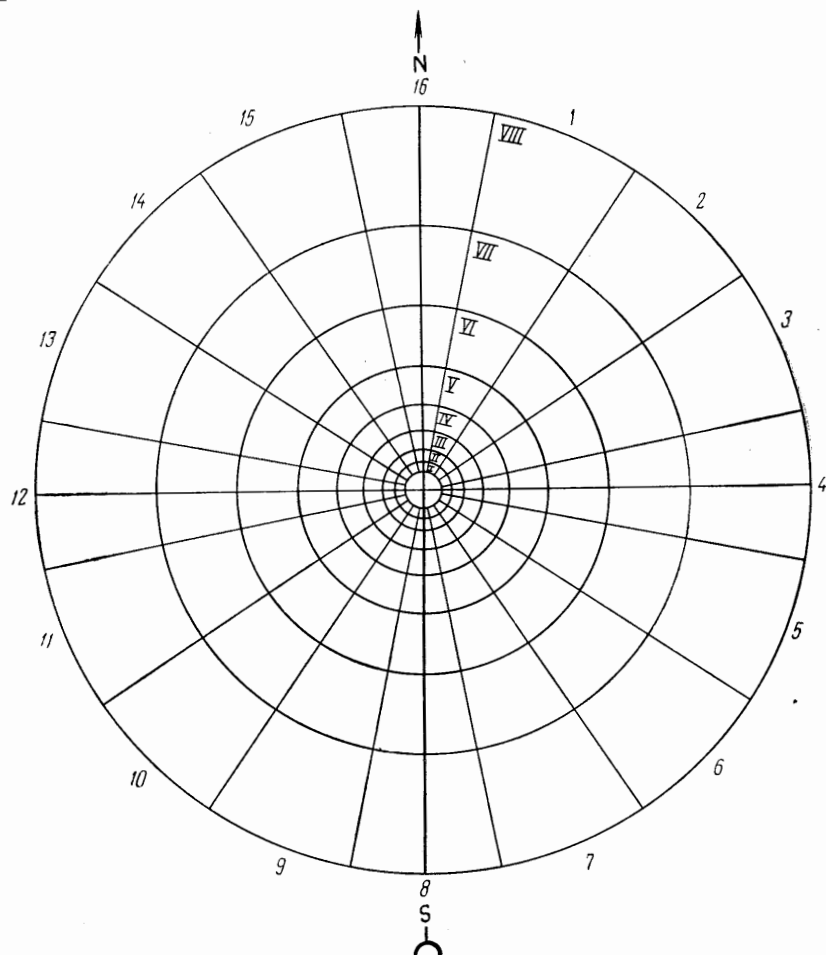


Рис. 125

Выше указано, что при наличии только общей гравиметрической съемки аномалии в зоне от 0 до 5 км могут не приниматься во внимание или учитываться приближенно. При этом полагают, что во всей центральной зоне аномалия силы тяжести может быть выражена формулой

$$\Delta g = \Delta g_0 + \left( \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right) r, \quad (66.31)$$

где  $\Delta g_0$  — значение аномалии в определяемом пункте, а  $\left( \frac{\partial \Delta g}{\partial r} \right)$  — значение горизонтального градиента аномалии, принимаемое постоянным вдоль данного радиуса.



В практике для численного интегрирования аномалий внутри пятикилометровой зоны или на окружности радиуса 5 км наносят восемь точек через равные интервалы. Определяют для каждой точки  $\Delta g$  и  $\cos \alpha$ , используя па-

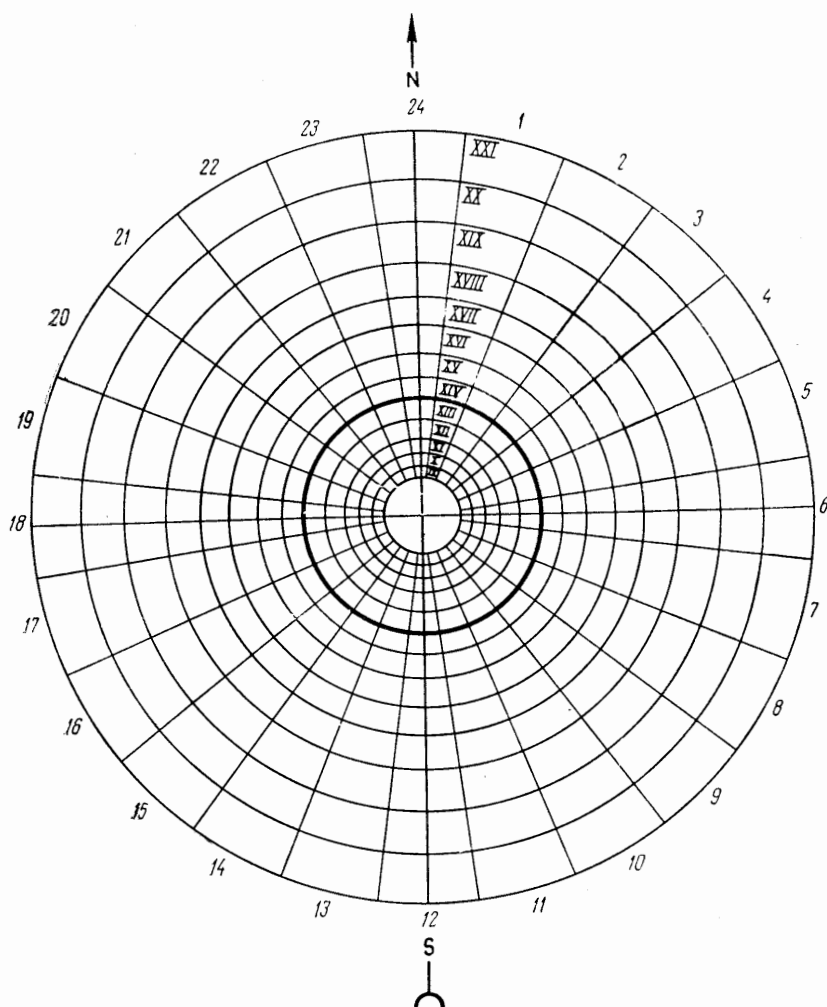


Рис. 126

тетку № 1, на которой указанные восемь пунктов обозначены точками на внутренней окружности. Формула для вычислений имеет вид

$$\xi_{0-5}'' = -\frac{\rho''}{8g} \sum_{k=1}^{k=8} \overline{\Delta g_k} \cos \alpha_k \quad (66.32)$$

или

$$\xi_{0-5}'' = -0,02628'' \sum_{k=1}^{k=8} \overline{\Delta g_k} \cos \alpha_k, \quad (66.33)$$

где  $\overline{\Delta g}_k$  — значение аномалии в точке с номером  $k$ ,  $\alpha_k = \frac{\pi}{4} k$ ;

$\eta_{0-5}''$  — вычисляются аналогично этому по формуле

$$\eta_{0-5}'' = -\frac{\rho''}{8g} \sum_{k=1}^{k=8} \overline{\Delta g}_k \sin \alpha_k. \quad (66.34)$$

Если обозначить через  $\xi_{0-100}$ ,  $\xi_{100-300}$  и  $\xi_{300-1000}$  слагаемые уклонений отвесной линии в меридиане, обусловленные аномалиями в зонах от 0 до 100 км, от 100 до 300 км и от 300 до 1000 км, то для вычисления гравиметрических уклонений  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  отвесных линий получим формулы:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{гр} &= \xi_{0-100} + \xi_{100-300} + \xi_{300-1000} \\ \eta_{гр} &= \eta_{0-100} + \eta_{100-300} + \eta_{300-1000} \end{aligned} \right\}. \quad (66.35)$$

#### 4. Вычисление поправок за влияние аномалий дальних зон и за переход к системе геодезических координат

Для вычисления названных поправок, учитываемых суммарно, необходимо на территории участка или вблизи него иметь астрономические пункты, совмещенные с геодезическими. Рассмотрим способ вычисления этих поправок на простом примере.

Пусть на некотором меридиане  $PP_1$ , проходящем через участок  $abcd$  (рис. 127), для точек которого требуется определить уклонения отвесных линий, имеются два пункта  $M$  и  $N$ , являющиеся одновременно астрономическими и геодезическими.

Следовательно, имеем:

для пункта  $M$

$\varphi_M$  — астрономическая широта,

$B_M$  — геодезическая широта;

для пункта  $N$

$\varphi_N$  — астрономическая широта,

$B_N$  — геодезическая широта.

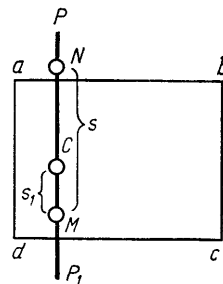


Рис. 127

Для пунктов  $M$  и  $N$  астрономо-геодезические уклонения отвесных линий имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ар}^M &= \varphi_M - B_M - 0,171'' H_M \sin 2B_M \\ \xi_{ар}^N &= \varphi_N - B_N - 0,171'' H_N \sin 2B_N \end{aligned} \right\}. \quad (66.36)$$

Пусть для этих же пунктов методом, указанным в § 65, получены  $\xi_{гр}^M$  и  $\xi_{гр}^N$ . Расхождения между  $\xi_{ар}$  и  $\xi_{гр}$  будут обусловлены неучетом действия дальних зон и несовпадением референц-эллипсоида с общим земным эллипсоидом, т. е. разности

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ар}^M - \xi_{гр}^M &= \Delta \xi^M \\ \xi_{ар}^N - \xi_{гр}^N &= \Delta \xi^N \end{aligned} \right\} \quad (66.37)$$

будут поправками за влияние дальних зон и за переход к системе геодезических координат в точках  $M$  и  $N$ . Выше указывалось, что в пределах сравнительно небольшого района эти поправки могут считаться изменяющимися линейно.

Для точки  $C$ , находящейся на том же меридиане между пунктами  $M$  и  $N$ , поправку  $\Delta \xi^C$  вычисляют по формуле

$$\Delta \xi^C = \Delta \xi^M + (\Delta \xi^N - \Delta \xi^M) \frac{s_1}{s}, \quad (66.38)$$

где  $s$  — расстояние между пунктами  $M$  и  $N$ ;

$s_1$  — расстояние между  $M$  и  $C$ .

Аналогично этому получается и  $\Delta \eta^C$ .

В общем случае, когда на территории участка имеется несколько ( $n$ ) совмещенных астрономических и геодезических пунктов, задача вычисления поправок  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$  решается следующим образом.

Для каждого такого пункта составляют уравнения погрешностей вида

$$\left. \begin{aligned} z_1 + x_1 \varphi_i^0 + y_1 \lambda_i^0 &= \Delta \xi_i \\ z_2 + x_2 \varphi_i^0 + y_2 \lambda_i^0 &= \Delta \eta_i \end{aligned} \right\} \quad (66.39)$$

где  $\varphi_i^0$  и  $\lambda_i^0$  — астрономические широта и долгота совмещенного астрономо-геодезического пункта с номером  $i$ ;

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  — интерполяционные коэффициенты.

По трем пунктам можно составить шесть уравнений вида (66.39), которые необходимы для определения коэффициентов. Обычно стремятся иметь более трех пунктов, и вывод интерполяционных коэффициентов производят, применяя способ наименьших квадратов.

После определения интерполяционных коэффициентов  $x, y$  и  $z$  искомую поправку для точки  $k$  с координатами  $\varphi_k^0$  и  $\lambda_k^0$  найдем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_k &= z_1 + x_1 \varphi_k^0 + y_1 \lambda_k^0 \\ \Delta \eta_k &= z_2 + x_2 \varphi_k^0 + y_2 \lambda_k^0 \end{aligned} \right\} \quad (66.40)$$

Наиболее удобное размещение совмещенных астрономо-геодезических пунктов — расположение их в вершинах многоугольника, внутри которого находится участок. Не рекомендуется использовать такие пункты, которые расположены на расстоянии более 500 км.

Избыточное (более трех) число астрономо-геодезических пунктов используется и для оценки точности вывода  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$ .

Вычислив для каждого астрономо-геодезического пункта, согласно (66.40), величины  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$ , найдем разности:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \{(\xi_{ar} - \xi_{rp}) - \Delta \xi\} \\ \varepsilon_\eta &= \{(\eta_{ar} - \eta_{rp}) - \Delta \eta\} \end{aligned} \right\} \quad (66.41)$$

и

$$\left. \begin{aligned} m_{\Delta \xi} &= \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_\xi^2}{n-3}} \\ m_{\Delta \eta} &= \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_\eta^2}{n-3}} \end{aligned} \right\} \quad (66.42)$$

§ 67. Влияние уклонений отвесных линий  
на астрономические азимуты — уравнение Лапласа

Обратимся вновь к рис. 119, из которого следует:

$$\left. \begin{aligned} A_m &= R + \Theta \\ \alpha_m &= R_1 + \Theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (67.1)$$

Из треугольника  $zz_1P$ , в котором угол при  $z_1$  равен  $180^\circ - \Theta_1$ , имеем

$$-\cos \Theta_1 = -\cos \Theta \cos (\lambda - L) + \sin \Theta \sin (\lambda - L) \sin B. \quad (67.2)$$

Полагая, что  $\cos (\lambda - L) = 1$ ,  $\sin (\lambda - L) = (\lambda - L)$  и  $\sin B = \sin \varphi$ , т. е. пренебрегая членами порядка  $(\lambda - L)^2$ ,  $(\lambda - L)^3$  и  $(\lambda - L)^4$ , получаем

$$-\cos \Theta_1 = -\cos \Theta + (\lambda - L) \sin \Theta \sin \varphi$$

или

$$\cos \Theta - \cos \Theta_1 = (\lambda - L) \sin \Theta \sin \varphi; \quad (67.3)$$

учитывая формулу (65.2), получаем

$$\cos \Theta - \cos \Theta_1 = \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \Theta,$$

$$-2 \sin \frac{1}{2} (\Theta + \Theta_1) \sin \frac{1}{2} (\Theta - \Theta_1) = \eta \operatorname{tg} \varphi \sin \Theta.$$

Полагая, что

$$\frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta) = \Theta \quad \text{и} \quad \sin \frac{1}{2} (\Theta - \Theta_1) = \frac{1}{2} (\Theta - \Theta_1),$$

получаем

$$\Theta_1 - \Theta = \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (67.4)$$

или

$$\Theta_1 - \Theta = (\lambda - L) \sin \varphi. \quad (67.5)$$

Сферический треугольник  $mzz_1$  аналогичен треугольнику  $zz_1P$ : вершине  $P$  соответствует вершина  $m$ , углу  $(\lambda - L)$  — угол  $q$ , сторонам  $(90^\circ - B)$  и  $(90^\circ - \varphi)$  — стороны  $Z$  и  $z$ , величине  $\Theta_1 - \Theta$  — величине  $R_1 - R$ .

Формулу (67.5) перепишем так:

$$\Theta_1 - \Theta = (\lambda - L) \cos (90^\circ - \varphi),$$

аналогичное выражение для треугольника  $mzz_1$  будет

$$R_1 - R = q \cos z. \quad (67.6)$$

Из треугольника  $mzz_1$  имеем

$$\sin q = \sin u \frac{\sin R}{\sin z},$$

поэтому

$$R_1 - R = \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z}. \quad (67.7)$$

Складывая (67.7) и (67.4), получаем

$$(R_1 - R) + (\Theta_1 - \Theta) = \frac{u \sin R}{\operatorname{tg} z} + \eta \operatorname{tg} \varphi,$$

или, принимая во внимание (67.1),

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin (A_m - \Theta)}{\operatorname{tg} z}, \quad (67.8)$$

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{u \sin A_m \cos \Theta - u \cos A_m \sin \Theta}{\operatorname{tg} z}. \quad (67.9)$$

Так как  $u \cos \Theta = \xi$  и  $u \sin \Theta = \eta$ , то

$$\alpha_m - A_m = \eta \operatorname{tg} \varphi + \frac{\xi \sin A_m - \eta \cos A_m}{\operatorname{tg} z}, \quad (67.10)$$

но  $\eta = (\lambda - L) \cos \varphi$ , тогда

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi + \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z}. \quad (67.11)$$

Пользуясь уравнением (67.11), можно перейти от астрономических азимутов к геодезическим.

В триангуляции 1 класса астрономические определения азимута выполняются на пунктах выходных сторон базисных сетей. Зенитные расстояния по выходным сторонам в большинстве случаев весьма близки к  $90^\circ$ ; поэтому в правой части уравнения (67.11) значение  $\operatorname{tg} z$  достаточно велико (не менее 150—200) по сравнению с числителем, равным несколькими секундам, т. е. значение этого второго члена обычно не превосходит  $0,02$ — $0,03''$ . Следовательно, вторым членом в уравнении (67.11) можно пренебречь. Тогда уравнение (67.11) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \alpha_m - (\lambda - L) \sin \varphi \\ A_m &= \alpha_m - \eta \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (67.12)$$

Последнее уравнение называется уравнением Лапласа. Геодезический азимут, вычисленный по формуле (67.12), называется азимутом Лапласа.

Таким образом, разность астрономического и геодезического азимутов некоторого направления в данной точке равна разности астрономической и геодезической долгот, умноженной на синус широты этой точки.

Возвратимся к уравнению (67.11). В правую часть этого уравнения входят два поправочных члена:

$$(\lambda - L) \sin \varphi \text{ и } \frac{\eta \cos A_m - \xi \sin A_m}{\operatorname{tg} z}.$$

Первый главный член постоянен в данной точке, так как он зависит только от координат и не зависит от направления. Этот член выражает собой влияние на азимут направления несовпадения плоскостей астрономического и геодезического меридианов. Второй член уравнения выражает влияние на измеренное направление несовпадения вертикальной оси инструмента с нормалью к поверхности эллипсоида. Поэтому его можно рассматривать как поправку за уклонение вертикальной оси инструмента от нормали к поверхности принятого референц-эллипсоида, которую следует вносить в измеряемые горизонтальные направления. Иначе говоря, второй член можно рассматривать как редукцию измеренных горизонтальных направлений за переход к референц-эллипсоиду.

Докажем, что Лапласовы азимуты, полученные в различных пунктах триангуляции, можно практически считать независимыми. Представим себе звено триангуляции 1 класса, на обоих концах которого определены Лапласовы азимуты. Из формул (67.12) следует, что ошибка Лапласова азимута  $m_a$  зависит от ошибок определения астрономического азимута  $m_\alpha$ , астрономической долготы  $m_\lambda$  и геодезической долготы  $m_L$ . Обычно в триангуляции 1 класса  $m_\alpha = \pm 0,5''$ ;  $m_\lambda^s = \pm 0,03^s$  или  $m_\lambda'' = \pm 0,45''$ . Для определения  $m_L$  исходим из ошибок передачи геодезических координат по ряду, так как долготы определяют последовательным вычислением координат вдоль ряда. Вспомним, что продольный и поперечный сдвиги в звене триангуляции 1 класса характеризуются в линейной мере величиной порядка 0,7 м. Соответствующая ошибка в долготе, выраженная в секундах дуги, будет равна для средних широт  $0,04''$ ; таким образом,  $m_L$  в десять раз меньше ошибок  $m_\alpha$  и  $m_\lambda$ , поэтому можно написать

$$m_A = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Значения астрономического азимута  $\alpha$  и долготы  $\lambda$  на разных пунктах независимы. Следовательно, и геодезические азимуты, полученные по формуле (67.12), на разных пунктах можно считать практически независимыми.

Средняя ошибка таких азимутов с учетом ошибки астрономической долготы на пунктах 1 класса будет равна приблизительно  $\pm 0,7''$ .

При развитии триангуляции азимуты Лапласа имеют весьма важное значение, а именно:

1. Обеспечивают ориентировку всех звеньев и рядов триангуляции с ошибкой одного порядка.

2. Не допускают распространения и в значительной мере исключают систематические ошибки, столь опасные в большой триангуляции; ошибки в ориентировке триангуляции, появившиеся в одном звене, перестают оказывать влияние в другом, если на стыке обоих звеньев расположен пункт Лапласа.

Кроме того, азимуты Лапласа позволяют путем соответствующей обработки материалов триангуляции и анализа результатов исследовать величины и характер систематических ошибок и причины их возникновения. Малая величина систематических ошибок на каждом пункте, в то же время существенное влияние их на точность триангуляции в целом делают задачу исследования этих ошибок весьма сложной, но актуальной.

3. Доставляют триангуляции твердые азимуты, которые позволяют вводить при уравнивании азимутальные условные уравнения, способствующие получению более точных значений всех элементов, в том числе и координат пунктов.

4. Дают возможность осуществлять надежный контроль угловых измерений в триангуляции, в частности обнаруживать такое накопление ошибок, которое другими путями не может быть выявлено. Действительно, свободный член азимутального условного уравнения включает в себя сумму ошибок углов ходовой линии по всему ряду. В определенных случаях отдельные крупные ошибки и во всех случаях малые ошибки, но действующие систематически и однообразно, не выявляются в свободных членах других условных уравнений — фигур, боковых и базисных. Таким образом, о многих существенных недостатках в постановке угловых измерений и о действии систематических ошибок можно судить только по свободному члену азимутального условного уравнения.

## § 68. Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые зенитные расстояния

Обратимся к рис. 119. Нужно определить разность зенитных расстояний  $Z - z$ , которая получается от несовпадения отвесной линии  $Az_1$  с нормалью к поверхности эллипсоида  $Az$ . Для этого в треугольнике  $mzz_1$  из точки  $z$  проведем дугу перпендикулярно к  $mz_1$ . Учитывая современную точность измерения зенитных расстояний и малую величину уклонения  $u$ , можем написать:

$$z - Z = u \cos(180^\circ - R_1) = -u \cos R_1. \quad (68.1)$$

Имея в виду (67.1), получаем

$$z - Z = -u \cos(\alpha_m - \Theta_1) = -u \cos(A_m - \Theta),$$

или

$$z - Z = -u \cos A_m \cos \Theta - u \sin A_m \sin \Theta,$$

а на основании формул (65.3)

$$Z - z = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m. \quad (68.2)$$

Формула (68.2) позволяет перейти от измеренного зенитного расстояния к геодезическому. Если вычисления превышений выполнять, пользуясь этим геодезическим зенитным расстоянием, то, очевидно, можно было бы получить превышения относительно поверхности эллипсоида. Так как высоты точек земной поверхности вычисляются относительно квазигеоида, то практически поправку  $Z - z$  вводить в измеренные зенитные расстояния при вычислении высот пунктов не следует. Однако на точность геодезического нивелирования уклонения отвесных линий могут иногда существенно влиять.

При выводе формул тригонометрического нивелирования\* участвует радиус дуги  $ab$  (рис. 128). Дуга  $ab$  представляет собой сечение геоида, но принимается за дугу окружности с радиусом  $R$ . Прямые  $AC$  и  $BC$  совпадают с направлением отвесных линий\*\*. При вычислении поправочного члена в формуле

$$H_2 - H_1 = s \operatorname{ctg} z + \frac{1-k}{2R} s^2, \quad (68.3)$$

где  $k$  — коэффициент земного преломления, значение радиуса  $R$  берется равным среднему радиусу кривизны. Но это было бы справедливо, если бы  $AC$  и  $BC$  совпадали с нормальными к поверхности эллипсоида, кривизне которой и соответствует значение радиуса  $R$ , используемого при вычислении превышений из геодезического нивелирования. Вследствие уклонения отвесных линий

\* Ф. Н. Красовский и В. В. Данилов. «Руководство по высшей геодезии». Ч. 1. Вып. 2. М., Геодезиздат, 1939, стр. 390.

\*\* Следует иметь в виду, что отвесные линии в общем случае не пересекаются; точку  $C$  на рис. 128 надо рассматривать как пересечение проекций линий  $AC$  и  $BC$  на плоскость чертежа, совпадающую с плоскостью нормального сечения с  $A$  на  $B$ ; в рассматриваемом случае это замечание практического значения не имеет.

кривизна дуги  $ab$  в общем случае не соответствует средней кривизне поверхности эллипсоида, поэтому, используя указанное значение  $R$ , мы допускаем ошибку.

Пусть отвесная линия  $AC$  совпадает с нормалью в точке  $A$ , в точке же  $B$  имеем отклонение отвесной линии  $\phi$ , которая на рис. 128 изображена прямой  $BC_1$ . Следовательно, при вычислении высот фактически берется значение радиуса  $R = aC$ , тогда как нужно было бы брать  $R_1 = aC_1$ . Нетрудно видеть, что допускаемая при этом ошибка равна  $\Delta R = \frac{\phi''}{c''} R$ . Если  $\phi'' = 5''$ ,  $c = 1000''$  (что соответствует  $s = 30$  км) и  $R = 6000$  км, то  $\Delta R = 30$  км и  $\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{200}$ .

В этом случае значение члена  $\frac{1-k}{2R} s^2$  в формуле одностороннего нивелирования изменится на  $s^2 \frac{1-k}{2R^2} dR$ . При принятых числовых данных значение этой погрешности в  $H_2 - H_1$  будет приблизительно равно  $\frac{1}{3}$  м.

Необходимо иметь в виду, что могут быть изменения уклонов отвесных линий и более  $5''$  (см. примеры § 73). В этом случае рассматриваемая погрешность соответственно увеличится.

Однако такая ошибка в передаче высот будет при одностороннем нивелировании. При двустороннем, а также одностороннем нивелировании на расстоянии до 15 км влиянием уклонов отвесных линий можно пренебречь.

В формуле двустороннего нивелирования поправочный член за кривизну Земли и рефракцию имеет вид

$$s^2 \frac{k_1 - k}{4R}.$$

Положим  $k_1 - k = 0,06$ ;  $s = 30$  км,  $\phi'' = 5''$ , тогда получим ошибку около 0,01 м. Следовательно, в двустороннем нивелировании указанное влияние делается пренебрегаемо малым.

### § 69. Об учете влияния уклонов отвесных линий при топографических и инженерно-геодезических работах

Уклоны отвесной линии при съемочных работах вообще могут не учитываться. При топографических работах возникает необходимость считаться с уклонами, когда в качестве опорных используются астрономические пункты. Рассмотрим обстоятельства, которые возникают в этом случае.

Пусть на планшете топографической съемки даны в качестве опорных два астрономических пункта; для простоты положим, что они расположены на одном меридиане. Расстояние  $s$  между этими пунктами на поверхности принятого референц-эллипсоида как основа для развития съемочного обоснования определится по формуле

$$s = M \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}, \quad (69.1)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — геодезические широты указанных двух пунктов, которые в данном случае неизвестны.

Имея в виду, что

$$B = \phi - \xi. \quad (69.2)$$



и подставляя в (69.1) вместо геодезических широт  $B_1$  и  $B_2$  их значения согласно (69.2), получаем

$$s = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} M + \frac{(\xi_1 - \xi_2)''}{\rho''} M. \quad (69.3)$$

Если слагающие уклонений отвесных линий в меридиане  $\xi_1$  и  $\xi_2$  неизвестны, то использование астрономических широт вместо геодезических по формуле (69.1) вызывает ошибку в расстоянии  $s$ , равную

$$\frac{\xi_1'' - \xi_2''}{\rho''} M. \quad (69.4)$$

Величина  $(\xi_1 - \xi_2)$ , представляющая собой изменение слагающих уклонений отвесных линий, в границах трапеции карты масштаба 1 : 100 000 нередко может достигать значения 5—6". В горных районах, а также в отдельных районах со спокойным рельефом величина  $(\xi_1 - \xi_2)$  может иметь значительно большие значения (см. примеры § 73).

Полагая  $(\xi_1 - \xi_2) = 5''$ , получаем ошибку во взаимном положении астрономических пунктов, равную 150 м. Таким образом, при  $s = 30$  км относительная ошибка расстояния, вычисленного по астрономическим координатам, составит 1 : 200. Отсюда следует, что при указанном расстоянии между астрономическими пунктами последние не могут контролировать ходы съёмочного обоснования — теодолитные и тахеометрические ходы и фототриангуляционные ряды, точность проложения которых характеризуется меньшими относительными ошибками. При увеличении расстояния между астрономическими пунктами относительная ошибка в их взаимном положении будет становиться меньше. Так, при  $s = 100$  км относительная ошибка расстояния, определенная по астрономическим координатам, будет равна около 1 : 700. В этом случае астрономические пункты уже имеют известное контролирующее значение и могут быть использованы как опорные для увязки простейших ходов съёмочного обоснования — тахеометрических ходов, фототриангуляционных рядов. Поэтому расстояния между астрономическими пунктами как опорными для топографической съёмки не должны быть меньше 70—100 км. Но все же ошибки в положении точек съёмочного обоснования относительно опорных астрономических пунктов будут достигать значения порядка 100 м. Поэтому астрономические пункты могут служить геодезическим обоснованием только для тех топографических съёмок, которые не предназначены для использования при детальных инженерных изысканиях и составлении технических проектов объектов промышленного строительства. Именно астрономические опорные пункты используются как основа для съёмок с целью общего топографического изучения территории и создания топографических планов, для разработки общих предварительных проектов строительства, эксплуатации природных ресурсов и т. п.

В труднодоступных районах при создании карты масштаба 1 : 100 000 выполнение геодезических работ встречает большие затруднения. В этом случае определение опорных пунктов астрономическими методами имеет большие организационные и экономические преимущества перед геодезическими. Ошибка даже в 150 м во взаимном положении опорных пунктов, если они расположены на расстоянии 100 км, будучи равномерно распределенной на указанном протяжении, не вызовет графически заметных ошибок во взаимном расположении контуров в любой отдельно взятой части трапеции масштаба 1 : 100 000.

Методы картографирования отдельных районов СССР предусматривали соответствующее использование астрономических пунктов в качестве опорных, определяемых на расстоянии от 80 до 120 км, между которыми развивается фототриангуляция. Такое использование астрономических пунктов возможно в районах с достаточно медленными изменениями уклонений отвесных линий.

Однако изменения уклонений отвесных линий неизвестны без специального изучения района. Поэтому при использовании астрономического метода обоснования топографических съемок необходимо предварительно провести гравиметрические работы, чтобы определить изменения уклонений отвесных линий. Но, помимо этих изменений, уклонения отвесных линий имеют некоторую постоянную, систематическую часть для всего района съемки, которая, согласно (69.3), не влияет на взаимное положение пунктов. Но она вызывает смещение всех пунктов на некоторую постоянную величину, в результате чего рамки съемочной трапеции оказываются соответственно смещенными на местности. Эта систематическая часть уклонений отвесных линий зависит от многих причин и в первую очередь от ориентировки референц-эллипсоида и может достигать заметных размеров — 10" и более. Поэтому, если координаты опорных астрономических пунктов не исправлять поправками за уклонения отвесных линий, то при стыке планшето-в съемок, выполненных на основе астрономических пунктов и пунктов государственной триангуляции, могут иметь место значительные расхождения контуров по рамкам трапеций.

Ошибки самих астрономических наблюдений малы по сравнению с влиянием уклонений отвесных линий; поэтому, говоря о точности опорных астрономических пунктов, главным образом приходится иметь в виду неучтенное влияние уклонений отвесных линий.

Наилучшее решение задачи по использованию астрономических пунктов (как опорных при съемке) при отсутствии опорной геодезической сети — своевременная постановка гравиметрических работ и вывод уклонений отвесных линий с последующим исправлением астрономических координат по формулам (63.1). При этом следует иметь в виду, что ошибки поправок, выводимых из гравиметрических наблюдений, в зависимости от района и густоты гравиметрических пунктов обычно колеблются от 0,5 до 2".

В практике может возникнуть необходимость выполнения топографических работ и более крупного масштаба, чем 1 : 100 000, в районе, значительно удаленном от государственной опорной геодезической сети. В этом случае, если по условию задания не представляется возможность осуществить связь с государственной опорной геодезической сетью, приходится развивать опорную сеть с местным началом координат. При таких обстоятельствах целесообразно для установления координат начального пункта выполнять астрономические определения широт, долгот и азимутов, хотя бы на одном, а лучше на нескольких пунктах, и после осуществления геодезических связей между ними устанавливать для одного из таких пунктов исходные координаты и азимут. Если в таком районе имеется гравиметрическая съемка хотя бы в радиусе нескольких сотен километров, то целесообразно ее использовать для приближенного вывода уклонений отвесных линий и последующего исправления астрономических координат.

Использование астрономических данных для определения системы координат и ориентировки локальной опорной геодезической сети позволит с меньшими затруднениями в дальнейшем и большими удобствами использовать результаты топографо-геодезических работ в общегосударственных целях.

Что касается влияния уклонений отвесной линии и учета действительного гравитационного поля Земли в инженерно-геодезических работах, то надо иметь в виду, что быстрое развитие науки и техники, наблюдающееся в современный период, резко изменило масштабы инженерно-строительных сооружений и обусловило повышенные требования к точности и объему геодезических работ, необходимых для проектирования и строительства этих сооружений. И если при прежних формах, масштабах и габаритах сооружений инженерно-геодезические работы представляли собой измерительные действия, направленные, по существу, на решение чрезвычайно простых по идее, чисто геометрических задач, притом обычно на плоскости, то сейчас становится необходимым в ряде случаев, при строительстве современных крупных сооружений, учитывать влияние соответствующих элементов гравитационного поля Земли.

Современное строительство больших гидротехнических сооружений, связанных с созданием или использованием водосемов большого протяжения, требует учета непараллельности уровенных поверхностей. При выполнении геодезических работ, связанных с проложением тоннелей значительного протяжения в горных районах, необходимо учитывать аномальные влияния, вызванные притяжением масс горного рельефа. В последнее время выявилась необходимость достижения точности конечных результатов инженерно-геодезических работ на один порядок выше, чем ранее, например при установке магнитов при строительстве больших ускорителей (синхрофазотронов). При определенных условиях некоторые редукции, считавшиеся ранее пренебрегаемыми, уже должны учитываться.

Общее указание по учету гравитационного поля Земли при выполнении точных инженерно-геодезических работ состоит в том, что необходимо анализировать величины редукций и учитывать их, сообразуясь с условиями задания, особенностями техники исполнения измерений и, конечно, гравиметрической характеристикой района работ.

В среднем для всей Земли уклонения отвесных линий составляют величину порядка  $\pm 4''$ . Однако в отдельных районах и при не вполне удачно выбранном референц-эллипсоиде они достигают нескольких десятков секунд. Значительные уклонения отвеса наблюдаются не только на территориях горного типа, но и в районах со спокойным и равнинным характером рельефа. Это надо учитывать при использовании астрономических пунктов в качестве опорных точек для топографических съемок.

## § 70. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвесной линии

Изложенный выше метод позволяет с необходимой точностью вычислять уклонения отвесной линии по результатам измерений; при этом ошибки определения зависят от полноты и точности самих измерений. Но может оказаться, что один из видов измерений, например гравиметрические определения соответствующего радиуса в районе геодезических работ, отсутствует. В этом случае, поскольку уклонения отвесных линий вызываются неравномерным распределением масс в наружном слое Земли, естественно предположить, что непосредственная причина уклонений — притяжение избыточных масс на материках и недостаточность притягивающих масс в океанах. Но изменчивость внешних форм Земли — не главная причина уклонений отвесной линии; таковой является изменение плотностей пород, образующих земную кору. Тем не менее формы наружного рельефа Земли оказывают известное влияние на знак и величину

уклонений отвеса. Поэтому первоначально получим формулы для вычислений уклонений отвесной линии, вызванных влиянием только внешнего топографического рельефа, предполагая плотность вещества его одинаковой.

Пусть имеем некоторую точку  $A$  на земной поверхности. Если бы окружающая ее местность по рельефу совпадала с уровенной поверхностью точки  $A$  (равнина, плоскогорье), то, очевидно, влияние топографического рельефа отсутствовало бы.

Но точку  $A$  окружают некоторые формы рельефа, не совпадающие с уровенной поверхностью, например горы, имеющие значительные высоты над уровнем океана, или впадины, имеющие отрицательные высоты. Притяжение этих масс сказывается на направление отвесной линии. Определим величину этого влияния.

Возьмем в окружающем точку  $A$  рельефе в некоторой точке  $B$  элементарный объем  $d\tau$ , имеющий плотность  $\delta$  (рис. 129). Тогда элементарная масса  $dm$  этого объема получится

$$dm = \delta d\tau. \quad (70.1)$$

Сила притяжения  $dF$  в точке  $A$ , вызванная массой  $dm$ , будет

$$dF = f \frac{\delta d\tau}{r^2} \quad (70.2)$$

Горизонтальная составляющая силы  $dF_0$  определится

$$dF_0 = dF \cos \nu = \frac{f\delta d\tau}{r^2} \cos \nu. \quad (70.3)$$

Проекция горизонтальной составляющей  $dF_0$  на меридиан выразится

$$dF_x = f \frac{\delta d\tau}{r^2} \cos \nu \cos A, \quad (70.4)$$

где  $A$  — азимут направления с точки  $A$  на точку  $B$ .

Принимая во внимание, что

$$r^2 = r_0^2 + h^2 \quad (70.5)$$

и

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{h}{r_0} \quad \text{и} \quad \cos \nu = \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}}, \quad (70.6)$$

выражение (70.4) примет вид

$$dF_x = f \frac{\delta d\tau}{r_0^2 + h^2} \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}} \cos A. \quad (70.7)$$

Составляющая силы притяжения рельефа в меридиане получится

$$F_x = f\delta \iiint \sqrt{\frac{r_0^2}{r_0^2 + h^2}} \frac{\cos A}{r_0^2 + h^2} r_0 dr_0 dA dh \quad (70.8)$$

или

$$F_x = f\delta \iiint \frac{\cos A}{r_0} \frac{dr_0 dA dh}{\left(1 + \frac{h^2}{r_0^2}\right)^{3/2}}. \quad (70.9)$$

При  $h$  малом по сравнению с  $r_0$  можно принять  $\frac{h}{r} = 0$  и последнее выражение примет вид

$$F_x = f\delta \iint \frac{dr_0}{r_0} \cos A_i dA dh. \quad (70.10)$$

Вычисление  $F_x$  по формуле (70.9) или (70.10) производят методом численного интегрирования. Для этого вообразим вокруг точки  $A$  (рис. 130) вертикальные цилиндрические поверхности разных радиусов  $Ab, Ac, Ad$  и т. д. и вертикальные плоскости  $Aa_1, Aa_2, Aa_3$  и т. д., составляющие с направлением меридиана азимуты  $A_1, A_2, A_3$  и т. д. Таким образом, окружающая точку  $A$  местность разобьется на призмы. Высоту  $h$  каждой призмы будем считать постоянной. Для определения притяжения какой-либо призмы, например  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , очевидно необходимо вычислить интеграл (70.9) или (70.10) при пределах интегрирования  $A_{n-1}$  и  $A_n$ , соответствующих азимутам направлений  $Aa_2$  и  $Aa_3$  и  $r_i$  и  $r_k$ , соответствующих радиусам окружностей  $ii$  и  $kk$ .

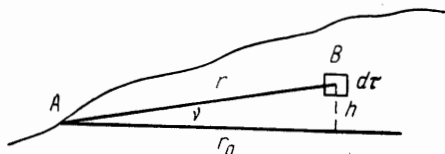


Рис. 129

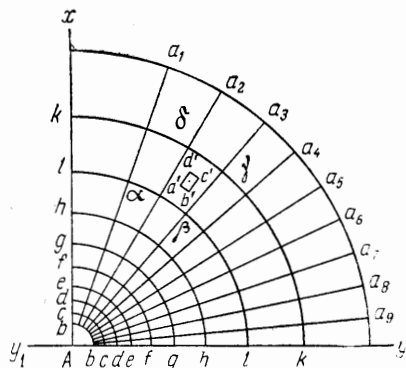


Рис. 130

В результате интегрирования (70.9) получим притяжение  $F_x$  взятой призмы

$$F_x = f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}}. \quad (70.11)$$

Интегрируя (70.10), получаем

$$F_x = f\delta h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}. \quad (70.12)$$

Продолжим вывод, взяв за исходное выражение (70.10).

Подберем азимуты радиальных плоскостей и радиусы цилиндрических поверхностей таким образом, чтобы

$$\left. \begin{aligned} (\sin A_n - \sin A_{n-1}) &= \text{пост.} = L \\ \ln \frac{r_k}{r_i} &= \text{пост.} = K \end{aligned} \right\}. \quad (70.13)$$

Тогда выражение для  $F_x$  примет вид

$$F_x = f\delta_0 K L h. \quad (70.14)$$

Составляющая притяжения, располагающаяся в плоскости меридиана для всех призм, лежащих к северу от точки  $A$ , которую обозначим  $F_x^N$ , будет равна

$$F_x^N = \sum F_x = f\delta_0 KL \sum h_n, \quad (70.15)$$

где  $\sum h_n$  — сумма высот всех призм, лежащих к северу от точки  $A$ .

Аналогичное действие  $F_x^S$  призм, лежащих к югу от точки  $A$ , будет

$$F_x^S = f\delta_0 KL \sum h_s, \quad (70.16)$$

где  $\sum h_s$  — сумма высот призм, лежащих к югу от точки  $A$ .

Суммарное притяжение в плоскости меридиана выражается так:

$$\left. \begin{aligned} F_{NS} &= F_x^N - F_x^S \\ F_{NS} &= f\delta_0 KL \{ \sum h_n - \sum h_s \} \end{aligned} \right\} \quad (70.17)$$

От притяжения в меридиональном направлении  $F_{NS}$  окружающего точку  $A$  рельефа перейдем к составляющей уклонения отвесной линии в плоскости меридиана, вызванной этим притяжением. Обозначим это уклонение через  $\xi_1$ .

На рис. 131:  $AN$  — проекция на плоскость меридиана направления отвесной линии без учета влияния топографического рельефа. Это влияние представляет собой дополнительную горизонтальную слагающую уклонения отвесной линии в меридиане, которая очень мала по сравнению с влиянием притяжения всей Земли. Под влиянием силы  $F_{NS}$ , направление отвесной линии  $AN$  изменится и пойдет по равнодействующей  $AN_1$ . Угол  $NAN_1 = \xi_1$  и будет выражать влияние топографического рельефа на уклонение отвесной линии в меридиане в точке  $A$ .

Притяжение Земли  $F_0$  выражается формулой

$$F_0 = \frac{4}{3} \pi f R_0^3 \frac{\rho_0}{R_0^2} = \frac{4}{3} f \rho_0 \pi R_0, \quad (70.18)$$

где  $R_0$  — радиус Земли в километрах,  $D_0$  — средняя плотность Земли.

Тогда по малости угла  $\xi_1$  имеем

$$\xi_1'' = \frac{F_{NS}}{F_0} \rho'' \quad (70.19)$$

или, принимая во внимание (70.17) и (70.18),

$$\xi_1'' = \frac{f\delta_0 KL \{ \sum h_n - \sum h_s \}}{\frac{4}{3} f D_0 \pi R_0} \rho'' \quad (70.20)$$

или

$$\xi_1'' = 0,00773 \frac{\delta_0}{D_0} KL \{ \sum h_n - \sum h_s \}, \quad (70.21)$$

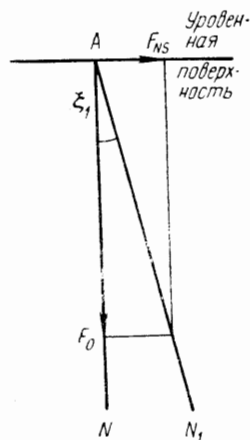


Рис. 131

так как  $\frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R_0} = 0,00773$ . Формулу для влияния рельефа на слагающую в первом вертикале получим аналогично

$$\eta_1'' = 0,00773 \frac{\delta_0}{D_0} K L_1 \{ \sum h_E - \sum h_W \}, \quad (70.22)$$

где

$$L_1 = \text{пост.} = \cos A_n - \cos A_{n-1}, \quad (70.23)$$

$\sum h_E$  и  $\sum h_W$  — суммы высот призм, расположенных соответственно в восточной и западной частях от меридиана точки  $A$ .

Для вычисления влияний масс рельефа на уклонения отвесных линий по формулам (70.21) и (70.22) используется специальная диаграмма — палетка и выполняется численное интегрирование, подробно разобранные в § 66. При вычислениях плотность земной коры в среднем можно положить  $\delta_0 = 2,7$ ; плотность Земли  $D_0 = 5,52$ .

Значения  $h$  для возвышенностей будут положительными, а для впадин (например, морей) — отрицательными. В последнем случае необходимо учитывать и массу воды.

Полученные формулы (70.21) и (70.22) соответствуют случаю, когда  $h$  мало по сравнению с  $r$ . При определении влияния ближайшего к точке  $A$  рельефа, при наличии значительных возвышений и обрывов в районе расположения точки  $A$  следует исходить из формулы (70.11). В этом случае влияние отдельной призмы на составляющие отвесной линии выразится для  $\xi$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \frac{3}{4} \frac{\delta_0}{D_0} \frac{h}{\pi R_0} (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}} \\ \Delta \eta &= \frac{3}{4} \frac{\delta_0}{D_0} \frac{h}{\pi R_0} (\cos A_n - \cos A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}} \end{aligned} \right\} \quad (70.24)$$

и аналогично для  $\eta$

или, полагая в (70.19)  $F_0 = \gamma$ ,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi'' &= \frac{\rho''}{\gamma} f h \delta_0 (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}} \\ \Delta \eta'' &= \frac{\rho''}{\gamma} f h \delta_0 (\cos A_n - \cos A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (70.25)$$

Но попытки применить формулы вида (70.25) для вычислений уклонений отвеса не дали ожидаемого результата. Выявилось, что вычисляемые по внешнему рельефу Земли уклонения отвеса в районах с крупным горным рельефом в несколько раз больше уклонений, получаемых по результатам измерений. Впервые с этим фактом столкнулись англичане при обработке материалов астрономо-геодезических измерений в Индии. Можно было ожидать, что в Индии, на севере которой расположены массивы мощной и обширной системы Гималайских гор, а на юге находится Индийский океан с большими глубинами, должны быть большие уклонения отвесной линии. Но в действительности это предположение не подтвердилось. Так, например, на пункте Калиана, расположенном на севере Индии, вблизи подножия Гималайского хребта, астроно-

мо-геодезическое уклонение, полученное из измерений как  $\phi - B$ , оказалось равным  $\pm 5,2''$ ; значение же уклонения отвеса за притяжения Гималайских гор, вычисленное по формулам (70.25), оказалось  $\pm 27,9''$ . Еще более это несоответствие проявляется вдоль береговых линий океанов, если к ним примыкают районы с горным рельефом. Если, например, на берегу океана расположены горные образования с высотами —800 м, а глубина океанического дна равна 4000 м, то для такого внешнего рельефа Земли для береговой полосы по формулам (70.25) получаются уклонения отвеса величиной порядка 30—40'', в то время как фактически, по данным измерений, его величина, как правило, колеблется в пределах 5—8''. Картина изменений уклонений отвеса в общем хотя и соответствует рельефу, но получается сильно сглаженной. Для объяснения

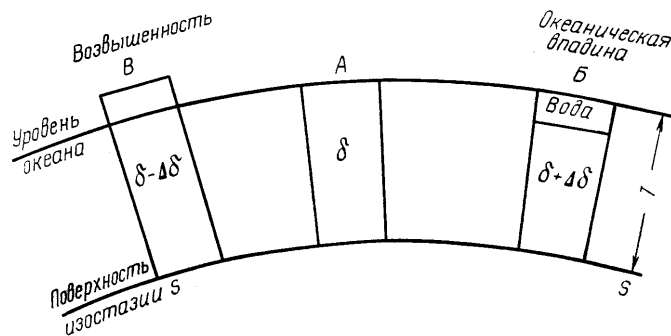


Рис. 132

этого явления была выдвинута гипотеза изостатической компенсации, или гипотеза изостазии\* (рис. 132).

Схем гипотез изостазии несколько; изложим в общих чертах гипотезу, предложенную в середине XIX в. англичанином Джоном Праттом.

Согласно этой гипотезе, масса вертикальных блоков земной коры с равными основаниями одинакова и постоянна в любой части Земли. Блоки, имеющие меньший объем и соответствующие впадинам земной поверхности, должны иметь большую плотность и, наоборот, блоки, имеющие большой объем и соответствующие возвышенностям на материках, должны иметь меньшую плотность.

Иначе говоря, различие в объемах таких блоков компенсируется соответствующим изменением плотностей вещества, из которого они состоят.

Подобная компенсация происходит в пределах постоянной глубины земной коры  $T$ , ниже которой располагаются слои одинаковой плотности. Поверхность, выше которой происходит указанная компенсация и давление на которую расположенных выше слоев одинаково и постоянно, называется поверхностью изостазии, или поверхностью изостатической компенсации. Очевидно, веса столбов наружного слоя Земли над поверхностью изостазии, имеющих равные основания, одинаковы и постоянны.

На рис. 132 показаны три столба  $A$ ,  $B$ ,  $B$ , имеющие в основании одинаковую площадь. Столб  $A$  соответствует некоторому району, в котором поверхность геоида проходит вблизи земной поверхности; столбы  $B$  и  $B$  — океанической

\* Изостазия — греческое слово, означающее равновесие.



впадине и возвышенности на материке. По гипотезе изостазии столбы  $A$ ,  $B$ ,  $B$ , расположенные выше поверхности изостазии  $SS$ , должны иметь одинаковую массу. Разница в объемах этих столбов компенсируется соответствующим различием плотностей пород, составляющих эти столбы. Если плотность столба  $A$ , имеющего некоторый средний объем, обозначить через  $\delta$ , то плотность столбов  $B$  и  $B$  будет  $\delta + \Delta\delta$  и  $\delta - \Delta\delta$  соответственно.

Следовательно, основное уравнение гипотезы Пратта для всех частей земной коры имеет вид

$$\delta_i (T + h_i) = \text{пост.} = a, \quad (70.26)$$

где  $h_i$  — высота точки  $i$ .

Если взять два столба 1 и 2, то

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{T + h_2}{T + h_1}. \quad (70.27)$$

Следовательно, согласно данной гипотезе, плотность отдельных участков земной коры обратно пропорциональна их толщине.

Для определения постоянной в уравнении (70.26) возьмем точку, имеющую  $h = 0$ .

Тогда

$$\delta_0 T = \text{пост.} = a. \quad (70.28)$$

По геофизическим данным,  $\delta_0$  — средняя плотность земной коры равна 2,67. Поэтому

$$a = 2,67T. \quad (70.29)$$

Глубина изостатической поверхности должна быть получена из опытных данных. Поясним в самых общих чертах путь ее определения. Принципиально он состоит в выборе такой глубины компенсации  $T$ , при которой наилучшим образом согласовались бы непосредственные наблюдения с результатами вычислений, основанных на гипотезе изостатической компенсации.

Допустим, что в каком-либо районе имеются совмещенные астрономические и геодезические пункты, для которых, следовательно, легко вычислить отклонения отвесной линии. Теперь, принимая гипотезу изостазии, вычисляем отклонения отвесных линий для этих пунктов при разных глубинах изостатической компенсации  $T$ . Очевидно, за глубину поверхности изостазии следует

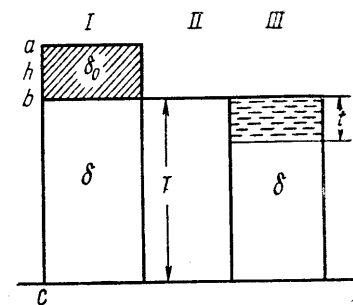


Рис. 133

принять то значение, при котором вычисленные отклонения отвесных линий окажутся наиболее близкими к определенному их значению из астрономо-геодезических измерений. Аналогично можно определить глубину поверхности изостазии, если известны для ряда пунктов измеренные значения силы тяжести. Определяемая таким путем величина  $T$  получается равной примерно 100 км. При выводе размеров эллипсоида Красовского для части астрономо-геодезической сети отклонения отвесной линии определялись на основе гипотезы изостазии Пратта; при этом глубина изостатической компенсации принята 96 км.

Применение изостатического метода для вывода отклонений отвеса в этом случае было вызвано отсутствием необходимых гравиметрических данных.

Изложим один из методов вывода уклонений отвесных линий, основанный на использовании гипотезы изостазии Пратта.

Представим себе три столба, имеющие одинаковую площадь в основании и построенные между поверхностью изостатической компенсации и физической земной поверхностью (рис. 133). Первый столб соответствует материку, второй — поверхности, для которой высота  $h$  равна нулю, и третий — океанической впадине.

Положим, что плотность пород, расположенных над уровнем моря, везде одинакова и равна  $\delta_0 = 2,67$ . Тем самым принимаем, что массы гор компенсируются только в той части столба, которая расположена ниже уровня моря, т. е. от  $b$  до  $c$ . Такое исходное положение гипотезы соответствует следующей физической трактовке: те массы, которые возвышаются над уровнем моря, выдвинуты из глубины Земли; они образуют излишек, который в точности равен недостатку, образовавшемуся внизу — ниже уровня моря. Поэтому вес столбов остается прежним и земная кора находится в равновесии.

В таком случае основное уравнение гипотезы изостазии примет несколько иной вид, чем в (70.28), т. е.

$$\delta T + \delta_0 h = \text{пост.} = a, \quad (70.30)$$

где  $\delta$  — плотность пород и столба ниже поверхности, для которой  $h = 0$ .

Заменяя  $a$ , согласно (70.28), получаем

$$\delta T + \delta_0 h = \delta_0 T, \quad (70.31)$$

откуда

$$(\delta_0 - \delta) T = \delta_0 h. \quad (70.32)$$

Обозначим  $(\delta_0 - \delta)$  через  $-\Delta$ ; очевидно, это будет недостаток плотности земной коры, компенсирующий верхние массы в высоте столба от  $a$  до  $b$ .

Перепишем (70.30), положив

$$\delta = \delta_0 - (\delta_0 - \delta) = \delta_0 + \Delta, \quad (70.33)$$

$$\delta_0 T + \delta_0 h + \Delta T = \text{пост.} = a. \quad (70.34)$$

Первые два члена полученного выражения соответствуют некомпенсированной земной коре. Поэтому изостатически уравновешенную земную кору можно рассматривать как однородную массу плотности  $\delta_0$ , в которой дополнительно равномерно размещено (ниже уровня моря) вещество отрицательной плотности  $\Delta$ .

Заменяя в (70.34) постоянную  $a$ , согласно (70.28), получаем

$$\Delta = -\frac{h}{T} \delta_0 = -2,67 \frac{h}{T}. \quad (70.35)$$

Последнее выражение определяет плотность этой добавочной отрицательной массы.

Для третьего столба — океанической впадины — уравнение изостазии имеет вид

$$\delta (T - t) + 1,03t = \delta_0 T, \quad (70.36)$$

где  $t$  — глубина океана, 1,03 — плотность морской воды.

Из (70.36) получаем

$$\delta = \frac{\delta_0 T - 1,03t}{T - t}. \quad (70.37)$$

Разность  $(\delta - \delta_0) = \Delta$  выражается

$$\Delta = \delta - \delta_0 = \frac{(\delta_0 - 1.03) t_{\text{н}}}{T - t} = \frac{1.64t}{T - t}. \quad (70.38)$$

Из уравнения (70.37) можем написать

$$\delta_0(T - t) + 1.03t + (\delta - \delta_0)(T - t) = \delta_0 T, \quad (70.39)$$

откуда следует, что компенсированную земную кору под океаном можем рассматривать как вещество, имеющее нормальную плотность  $\delta_0$ , к которому прибавлено вещество с массой  $\Delta = \delta - \delta_0$ .

Из изложенного следует, что для вычисления изостатического уклонения отвесной линии необходимо вычислить влияние на уклонение отвесной линии:

а) топографического рельефа по формулам (70.25),

б) компенсирующих масс части земной коры, расположенной между уровнем океана и поверхностью изостатической компенсации.

Сумма полученных таким образом величин и будет изостатическим уклонением отвеса.

Влияние некоторой призмы топографического рельефа на уклонение отвесной линии, согласно (70.24), выражается формулой (при  $\frac{h}{r} = 0$ ).

$$\Delta \xi_T = \frac{3}{4} \frac{\rho'' \delta_0}{\pi R_0 D_0} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k}{r_i}. \quad (70.40)$$

Аналогично можно вычислить и влияние компенсирующих масс, если вместо  $h$  взять величину глубины компенсации  $T$  (для океанов — расстояние от дна до изостатической поверхности —  $(T - t)$ ), а вместо  $\delta$  — плотность добавочной компенсирующей массы  $\Delta$ . Вследствие значительности  $T$  для вычисления влияния компенсирующей массы  $\Delta \xi_C$  следует принять полную формулу (70.24) как более точную, в данном случае принимающую вид

$$\Delta \xi_C = \frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R_0} \frac{\Delta T}{D_0} (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}}. \quad (70.41)$$

Но, согласно (70.35),

$$\Delta T = -h \delta_0,$$

поэтому

$$\Delta \xi_C = -\frac{3}{4} \frac{\rho''}{\pi R} \frac{\delta_0}{D_0} h (\sin A_n - \sin A_{n-1}) \ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}}. \quad (70.42)$$

Из сопоставления (70.42) и (70.40) получаем

$$\frac{\Delta \xi_C}{\Delta \xi_T} = - \frac{\ln \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}}}{\ln \frac{r_k}{r_i}}. \quad (70.43)$$

Обозначая

$$F = \frac{\Delta \xi_C + \Delta \xi_T}{\Delta \xi_T} = 1 - \frac{\ln \left( \frac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + T^2}} \right)}{\ln \frac{r_k}{r_i}}, \quad (70.44)$$

получаем окончательное выражение для влияния на отклонение отвесной линии колонны  $I$ , как суммы влияний топографического рельефа и внутренних компенсированных масс ее

$$\Delta\xi_{\text{изост}} = \Delta\xi_T + \Delta\xi_C = F \Delta\xi_T. \quad (70.45)$$

Суммируя влияние отдельных блоков, как это сделано при выводе формул (70.20), получаем значение изостатического отклонения отвесной линии в меридиане  $\xi_{\text{изост}}$ .

Уклонение отвесной линии в плоскости первого вертикала вычисляется аналогично.

Если бы принятая схема гипотезы соответствовала действительности, то вычисленное значение  $\xi_{\text{изост}}$  было бы равным реальному уклонению отвеса в данной точке.

Гипотеза изостазии, следуя примерно тому же ходу рассуждений, может быть использована и для вычисления изостатических аномалий силы тяжести.

Как видно, гипотеза Пратта чрезвычайно проста, что делает ее наиболее удобной для вычислений. Этим объясняется, по-видимому, тот факт, что главным образом гипотеза Пратта использовалась в задачах геодезии.

Гипотеза изостазии, особенно простейшая схема ее, изложенная выше, вызывает и некоторые критические замечания и возражения. Так, например, она чрезвычайно схематична, в ней игнорируются значения сил сцепления и трения; существует ряд районов, где изостатическая компенсация отсутствует и т. д.

Имеются более сложные схемы построения гипотезы изостазии, в которых исключаются отдельные возражения. Так, например, в гипотезе Эри, появившейся почти одновременно с гипотезой Пратта, предполагается, что земная кора всюду имеет одинаковую плотность. Отдельные части земной коры плавают в мантии и погружены в нее тем больше, чем больше их высота над уровнем океана. Погруженная в мантию каждая глыба по закону Архимеда вытесняет массу мантии, равную массе всей этой глыбы.

По гипотезе Венинг-Мейнеса, земная кора имеет двусторонние прогибы в горных районах (вверх и вниз), вследствие чего изостатическая компенсация осуществляется в региональном масштабе в пределах всего района, а не на отдельных малых частях, как это должно быть по гипотезе Пратта.

Однако при использовании различных гипотез в геодезических целях не получается существенных изменений во влиянии на результаты геодезических измерений. Это естественно, так как при любой схеме гипотезы сохраняется ее основное условие — постоянство массы в вертикальных колоннах земной коры выше поверхности изостатической компенсации. По существу, предложенные разными учеными гипотезы изостазии отличаются между собой допускаемыми закономерностями в распределении притягивающих масс земной коры в отдельных ее вертикальных колоннах.

В настоящее время считается, что гипотеза изостазии в большинстве геологических районов согласуется с выполненными геодезическими и гравиметрическими измерениями, что компенсация плотностей вещества в вертикальных столбах земной коры в целом существует, а давление земной коры на некоторой глубине в большинстве исследованных районов примерно постоянно. Иначе говоря, имеющиеся фактические данные подтверждают в целом существование изостазии, т. е. равновесия масс в земной коре.

В связи с большим развитием, которое получили гравиметрические работы, гипотеза изостазии перестает играть существенную роль в решении задач

высшей геодезии, которое сейчас может уже осуществляться на основе точных измерений и строгой теории; гипотеза же изостазии все еще остается пока гипотезой, хотя и согласующейся в среднем с данными наблюдений.

Изостазия или изостатическая компенсация масс в некотором поверхностном слое Земли — одна из важнейших особенностей строения Земли в целом.

Гипотеза изостазии была предложена на основании геодезических данных; доказательство ее справедливости основано в первую очередь на анализе и научной обработке результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ, как и выявление отдельных районов, где гипотеза изостазии не получает подтверждения. Тем самым геодезия дает геофизике и геологии ценнейший фактический материал для дальнейшей разработки теории о строении Земли и происхождения в тайны ее структуры и развития.

## Глава XI

### ВЫСОТЫ

#### § 71. Общие сведения

Высота точек земной поверхности  $H$  — одна из координат, определяющих фигуру Земли и отдельные ее точки относительно исходной отсчетной поверхности. Если геодезические координаты  $B_M$  и  $L_M$  определяют положение проекции точки  $M$  на референц-эллипсоиде, то высота  $H_M$  определяет отстояние точки  $M$  от эллипсоида по нормали к нему. Тем самым высоты всех точек Земли определяют фигуру физической поверхности Земли относительно принятого референц-эллипсоида.

Кроме того, высоты необходимы для определения работы, совершающейся при движении в гравитационном поле Земли.

Разности высот точек земной поверхности, получаемые из нивелирования, определяют разность потенциалов силы тяжести между этими точками. Если известно значение потенциала  $W_0$  в исходном футштоке, то в результате нивелирования легко вычислить значения потенциалов силы тяжести в соответствующих точках поверхности Земли по известной формуле (58.18).

Практическая роль, которую играют высоты, заключается в следующем.

Высоты точек земной поверхности определяют рельеф, который необходимо изобразить на топографических картах. Точное значение разностей высот отдельных точек поверхности Земли совершенно необходимо для проектирования и строительства различных сооружений, для различных расчетов, в которых надо учитывать положение точек в пространстве.

Знание высот необходимо для вычисления редуций в непосредственно измеренные на земной поверхности величины (углы, базисы) при переходе на поверхность относимости, без чего не может осуществляться строгая математическая обработка геодезических измерений на эллипсоиде.

Требования к точности определения высот в различных целях колеблются в очень больших пределах, но многие из них весьма высокие, и они могут быть обеспечены лишь при теоретически строгом решении возникающих вычислительных задач. Однако вопрос о точном вычислении высот точек Земли долгое время не был решен с необходимой строгостью; только исследования и предложения Молоденского внесли полную ясность в этот вопрос и дали строгое его решение.

Из непосредственных измерений получаются разности высот точек Земли. Поэтому для вычисления высот необходимо знать высоту точки, принимаемой за начальную или исходную. Примем, что высота начальной точки известна (см. главу XIII).

Геодезические высоты  $H$  принято получать из измерений как сумму двух слагаемых: расстояния от референц-эллипсоида до поверхности геоида, или квазигеоида и расстояния от одной из этих поверхностей до соответствующей точки поверхности Земли.

Оба указанных выше слагаемых должны быть отрезками нормали к поверхности референц-эллипсоида. Поясним это геометрически (рис. 134) и приведем главные и заключительные выводы, а подробное рассмотрение и доказательства этих выводов дадим в последующих параграфах этой главы.

Из рис. 134 для геодезической высоты точки  $M$  имеем:

$$H_M = H_M^g + \zeta_1^M, \quad (71.1)$$

$$H_M = H_M^y + \zeta^M. \quad (71.2)$$

В формуле (71.1)  $H_M^g$  — ортометрическая высота и  $\zeta_1^M$  — высота точки  $M$  над поверхностью геоида. Именно при помощи этих величин до последнего времени вычислялись геодезические высоты. Исследования Молоденского показали, что принципиально строго, без привлечения гипотез о внутреннем строении Земли, оба слагаемых правой части выражения (71.1) не могут быть вычислены. Зато могут быть вычислены точно оба слагаемых выражения (71.2)  $H_M^\gamma$  — нормальная высота и  $\zeta^M$  — аномалия высоты, высота квазигеоида над поверхностью референц-эллипсоида. Поэтому для вычисления геодезических высот  $H$  в СССР в настоящее время применяется формула (71.2), предусматривающая использование системы нормальных высот  $H^\gamma$  и аномалий высот  $\zeta$ .

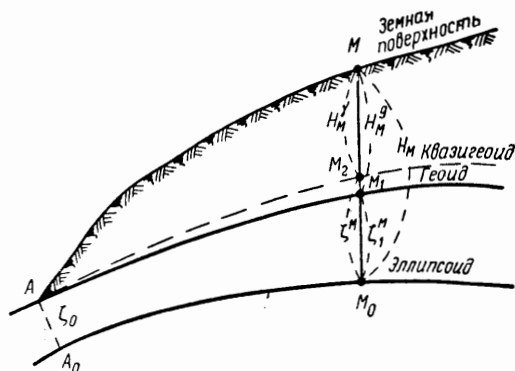


Рис. 134

Расчленение высоты  $H$  на два слагаемых вызывается практической необходимостью иметь высоты от уровня моря. В системе ортометрических высот поверхностью уровня моря служит поверхность геоида; в системе нормальных высот роль поверхности моря играет вспомогательная поверхность квазигеоида.

Принятие поверхности «уровня моря» в качестве отсчетной поверхности для высот, используемых на практике, имеет определенный физический

смысл, который заключается в том, что за исходную поверхность принимается уровенная или горизонтальная поверхность или поверхность, весьма близкая к ней. Если не принимать во внимание непараллельность уровенных поверхностей (а это всегда возможно при изображении рельефа на топографических картах и во многих случаях использования высотных данных для практических расчетов), то поверхность, проходящая через точки, имеющие одинаковые высоты  $H^g$  или  $H^\gamma$ , будет горизонтальной. Это вполне согласуется с общепринятыми представлениями о высотах точек Земли и рельефе ее поверхности. Например, в пределах некоторой области (при таком выборе рабочей отсчетной поверхности для высот) точки, имеющие одинаковые высоты, могут практически считаться находящимися на одной водной поверхности (при ее спокойном состоянии). Преимущество такого выбора отсчетной поверхности практически состоит также в независимости определения высот от референц-эллипсоида — его размеров и ориентировки. По указанным соображениям, в публикуемых каталогах приводятся нормальные высоты  $H^\gamma$  реперов и центров триангуляций\*.

Из сказанного следует, что при вычислении высот практически приходится иметь дело с двумя отсчетными поверхностями: 1) референц-эллипсоида для вычисления геодезических высот  $H$ , определяющих по высоте точки земной поверхности относительно поверхности относимости, и 2) квазигеоида для вычисления нормальных высот, используемых в практических расчетах и показываемых на картах при изображении топографического рельефа.

\* До введения системы нормальных высот приводились ортометрические высоты.

Для решения научных и практических задач геодезии необходимо знать высоту  $H$ , как сумму двух слагаемых  $H^\nu$  и  $\zeta$ , с неизменным выделением значений каждого из них для любой точки Земли.

Теперь укажем способы их определения.

Точно высоту  $H^\nu$  определяют методом геометрического нивелирования. Влияние непараллельности уровенных поверхностей поверхности квазигеоида учитывается по гравиметрическим данным. Метод тригонометрического нивелирования практически для точного определения высот непригоден вследствие незнания коэффициента земного преломления в моменты измерений.

Для вычисления аномалии высоты  $\zeta$  принципиально могла бы быть применена формула (62.14), т. е.

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (71.3)$$

или

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_S (\Delta g + \delta g) S(\psi) d\sigma. \quad (71.4)$$

Этот метод однако практически неприменим вследствие неполноты и незавершенности мировой гравиметрической съемки, так как интегрирование по формуле (71.4) необходимо производить по всей поверхности Земли. Кроме того, даже при наличии материалов мировой гравиметрической съемки, используя формулы (71.3) или (71.4), мы получили бы высоты  $\zeta$  относительно общего земного эллипсоида, а не от принятого референц-эллипсоида. Поэтому аномалии высот определяют иначе — путем последовательного вычисления малых разностей аномалий высот ( $\zeta_n - \zeta_{n-1}$ ) по выбранным профилям, аналогично тому как определяют высоты при геометрическом нивелировании. Эти разности определяют особыми методами астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования. Как и при выводе уклонов отвесных линий, наилучшее решение задачи по определению аномалий высот  $\zeta$  дает метод астрономо-гравиметрического нивелирования, основанный на совместном использовании результатов астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Геодезические высоты  $H_M$  без выделения слагаемых  $H^\nu$  и  $\zeta$  можно получить геометрически, т. е. только по астрономо-геодезическим измерениям.

Действительно, пусть заданы как исходные два пункта:  $A(B_A, L_A, H_A)$  и  $B(B_B, L_B, H_B)$ . Указанные в скобках координаты определяют положение двух пунктов относительно поверхности референц-эллипсоида. Представим себе, что земная поверхность покрыта пунктами триангуляции, на которых произведены измерения горизонтальных направлений и зенитных расстояний на смежные пункты. Допустим, что на каждом пункте также определены астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ . Тогда для пунктов триангуляции легко получить составляющие уклонов отвесных линий  $\xi$  и  $\eta$  по формулам (65.17).

Теперь от измеренных зенитных расстояний перейдем к геодезическим по формуле  $Z = Z + (Z - z)$ . Поправка  $(Z - z) = \xi \cos A_m + \eta \sin A_m$  (см. 68).

Вычисляя превышения пунктов триангуляции по полученным таким образом  $Z$  (по формулам тригонометрического нивелирования) и используя известную высоту начальной точки  $A$ , получаем геодезические высоты  $H$  всех пунктов триангуляции. Иначе говоря, на основании измерений только



геометрических элементов определится поверхность Земли относительно принятого референц-эллипсоида.

Практически такой путь изучения фигуры Земли неосуществим с достаточной точностью вследствие ошибок в измерении вертикальных углов, вызванных действием вертикальной рефракции.

Могут быть предложены и другие схемы геометрического метода изучения физической земной поверхности. Однако практически все они уступают по точности, или по затратам труда методу, основанному на использовании формулы

$$H_M = H_M^\gamma + \zeta^M.$$

## § 72. Системы счета высот

Как отмечено, для точного определения разности высот точек поверхности Земли применяется метод геометрического нивелирования, основанный на использовании горизонтального луча визирования, т. е. луча, направленного

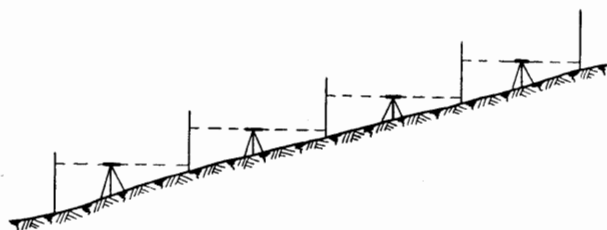


Рис. 135

по касательной к уровенной поверхности в точке наблюдения. Положение этого луча определится при помощи уровня, фиксирующего касательную как перпендикулярную к направлению силы тяжести, т. е. отвесной линии в данной точке. Разность высот между заданными точками в геометрическом нивелировании

определяется как сумма превышений  $\Delta h$  между близкими точками по ходу нивелирования. В дальнейшем будем считать, что методы точного нивелирования известны, а ошибки полевых измерений отсутствуют. Лишь при рассмотрении вопросов о достаточной точности формул и необходимости учета малых поправочных членов и редукций будут приниматься во внимание средние квадратические ошибки измерений.

Вследствие непараллельности уровенных поверхностей идеальная и простая схема геометрического нивелирования, употребляемая на первой стадии изучения этого метода и иллюстрируемая рис. 135, нарушается и становится сравнительно сложной, требующей учета на каждой станции наблюдений влияний эллипсоидальности Земли и неравномерного распределения плотности внутри ее.

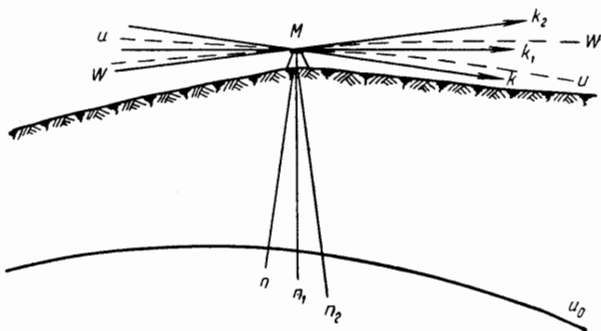


Рис. 136

Действительная схема геометрического нивелирования показана на рис. 136, на котором приведены обозначения:  $u_0$  — отсчетная поверхность, которую прием за эллипсоид вращения;  $Mn$  — нормаль к этой поверхности,  $Mk$  — прямая,

параллельная касательной к поверхности  $u_0$ . Пусть  $u$  — уровенная поверхность нормального поля Земли, проходящая через точку нивелирования (горизонт инструмента), и  $Mn_1$  — нормаль к этой поверхности. Если бы действительное гравитационное поле Земли совпадало с нормальным, то направление отвесной линии совпадало бы с нормалью  $Mn_1$ , а визирный луч представлял бы касательную  $Mk_1$  к поверхности  $u$ ; в этом случае непараллельность уровенных поверхностей выразилась бы в отсчете по рейке влиянием угла между  $Mk$  и  $Mk_1$ . Но вследствие влияния аномальных масс действительное направление отвесной линии представляется направлением отрезка  $Mn_2$ , перпендикулярным к реальной уровенной поверхности  $W$ ; тогда действительное направление визирного луча с нивелирной станции определится направлением отрезка  $Mk_2$ , как касательной к поверхности  $W$ , проходящей через станцию наблюдений. Если влияние непараллельности уровенных поверхностей  $u_0$  и  $u$ , т. е. угол между нормальными к ним  $Mn$  и  $Mn_1$ , может быть учтено сравнительно просто, по одной из формул теории нормального потенциала силы тяжести, то влияние отклонения уровенной поверхности действительного потенциала, выражающееся в отклонении действительного направления отвесной линии  $Mn_2$  от нормалей  $Mn_1$  или  $Mn$ , таким простым способом учтено быть не может, так как оно зависит от аномального распределения масс внутри Земли. Природа этого отклонения требует дополнительных измерений на каждой установке нивелира для учета действительного направления визирного луча — измерения силы тяжести.

В принципе можно представить себе и другой путь определения угла между касательными к уровенным поверхностям, проходящим через начальную точку и точку наблюдения: если на каждой станции нивелирования получить астрономические и геодезические координаты, то надлежаще вычисленные уклонения отвесной линии и будут углом между названными касательными; однако такой путь вычисления поправок нереален.

Следовательно, процесс геометрического нивелирования, простой по идее в первом приближении, существенно осложняется при более строгом его рассмотрении.

Непосредственно измеряемые превышения нивелированием при помощи горизонтального визирного луча, перпендикулярного направлению отвесной линии, представляют собой превышения относительно плоскости, касательной к уровенной поверхности, проходящей через горизонт инструмента. Для получения превышения относительно отсчетной поверхности должна быть введена поправка за непараллельность этой уровенной поверхности и поверхности отсчета, представляющая собой влияние угла между касательными к этим поверхностям по линии нивелирования; эта поправка определяется по данным гравиметрических измерений. Таким образом, при определении разности высот точек земной поверхности производятся измерения превышений при помощи горизонтального визирного луча и измерения силы тяжести вдоль нивелирного хода.

Пусть на рис. 137 изображен профиль земной поверхности, пересекающий точку  $O$ , служащую началом счета высот. Из геометрического нивелирования необходимо определить высоту точки  $M$ .

Пусть отрезки  $\Delta h$  — превышения, полученные из наблюдений на последовательных нивелирных станциях вдоль нивелируемой линии  $OM$ . Тогда сумма  $\Delta h$  вдоль выбранной линии даст некоторую величину, которую обозначим через  $H_{изм}$ , т. е.

$$H_{изм} = \sum_0^M \Delta h, \quad (72.1)$$

или, приняв  $\Delta h$  за элементарное превышение  $dh$ ,

$$H_{\text{изм}} = \int_0^M dh; \quad (72.2)$$

$H_{\text{изм}}$  зависит от пути нивелирования.

Действительно, пусть от  $O$  к  $M$  нивелирование выполняется по двум путям: 1) от точки  $O$  до  $K$  и от точки  $K$  по уровенной поверхности к точке  $M$  и 2) от точки  $O$  вдоль поверхности геоида к точке  $M_1$  и от точки  $M_1$  к точке  $M$ .

Нетрудно видеть, что в первом пути нивелирования величина  $H_{\text{изм}}$  определится отрезком  $OK$ , а во втором — отрезком  $MM_1$ , причем вследствие непараллельности уровенных поверхностей  $OK \neq M_1M$ . Выбирая какой-либо

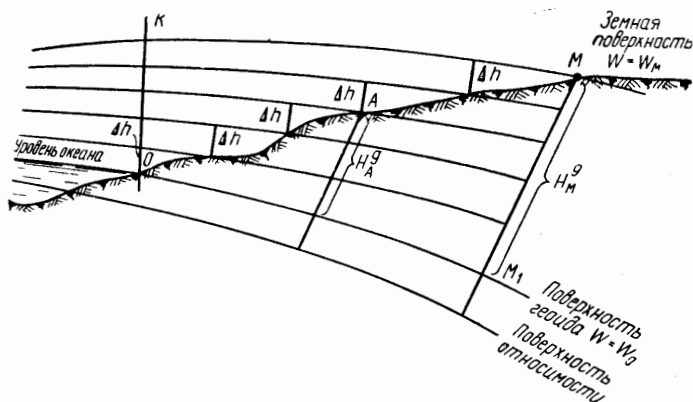


Рис. 137

иной путь нивелирного хода, получаем третье значение величины  $H_{\text{изм}}$ , не равное двум предыдущим.

Если бы уровенные поверхности были параллельны, т. е. представляли собой концентрические сферы, то величина  $H_{\text{изм}} = \sum \Delta h$  представляла бы высоту точки  $M$  как расстояние от  $M$  до геоида по нормали к последнему, т. е. до точки  $M_1$ . Такое допущение возможно только в работах малой точности (техническое нивелирование, нивелирование IV и III классов) или в точных нивелировках при очень малой протяженности нивелирного хода.

Указанная выше неопределенность в выводе высоты  $H_{\text{изм}}$ , т. е. зависимость значения высоты точки от пути нивелирования, недопустима в точных нивелирных работах на значительной территории.

Дальнейшая наша задача — изложение теории определения высот, учитывающей непараллельность уровенных поверхностей нормального поля Земли, влияния аномальных масс Земли и позволяющей однозначно определить значения высот независимо от пути нивелирования.

Напишем, как исходную, одну из основных формул, т. е.

$$dW = g dh, \quad (72.3)$$

откуда для нашего случая (см. рис. 137), используя принятые обозначения,

$$\int_{OM} dW = W_0 - W_M = \Delta W = \int_{OM} g dh, \quad (72.4)$$

где  $W_0$  и  $W_M$  — значения потенциалов силы тяжести для уровенных поверхностей, проходящих через точку  $O$  и через точку  $M$ ;  $g$  — значения силы тяжести в пунктах нивелирного хода;  $dh$  — элементарное превышение.

Потенциалы  $W_0$  и  $W$  постоянны для каждой уровенной поверхности, поэтому постоянно и  $\Delta W = \int_{OM} g dh$ . Отсюда следует, что значение  $\int_{OM} g dh$  не зависит от пути нивелирования, а только от положения начальной и конечной его точек.

На основании (58.19) можем написать

$$H_M = \frac{W_0 - W_M}{g} = \frac{\int_{OM} g dh}{g}, \quad (72.5)$$

где  $g$  — некоторое значение силы тяжести.

Приращение потенциала силы тяжести в данной точке относительно начального футштока, взятое с обратным знаком, называется **г е о п о т е н ц и а л о м**.

Геопотенциал для точки  $M$  относительно точки  $O$  будет

$$-(W_M - W_0) = \int_{OM} g dh. \quad (72.6)$$

Следует иметь в виду, что главной характеристикой высоты репера является именно геопотенциал, как непосредственно измеренная величина, а не какие-либо расстояния от данной точки до некоторых воображаемых поверхностей.

Если высота начальной точки не равна нулю, например, если начальным пунктом нивелирного хода является точка  $A$ , имеющая высоту  $H_A$ , то будем иметь

$$H_M - H_A = \frac{W_A - W_M}{g}, \quad (72.7)$$

где  $g$  — по-прежнему некоторое значение силы тяжести.

Формулы (72.5) и (72.7) — исходные для установления различных систем высот.

Существуют четыре системы геопотенциальных высот: **п р и б л и ж е н н ы е**, **о р т о м е т р и ч е с к и е**, **н о р м а л ь н ы е** и **д и н а м и ч е с к и е**.

Рассмотрим последовательно теории этих систем и получим формулы для их вычислений.

### 1. Приближенные высоты

Приближенные высоты получатся, если не принимать во внимание реальное гравитационное поле силы тяжести Земли.

К вычислению приближенных высот приходится прибегать в том случае, если вдоль линии нивелирования не производились измерения силы тяжести, являющие влияние действительного поля силы тяжести Земли; вычисление приближенных высот используется и как промежуточный этап при вычислении высот в других системах.

Из определения приближенных высот следует, что измеренные величины  $H_M$  следует исправить только за непараллельность уровенных поверхностей нормального поля.

Обозначая  $\Delta u$  — разность потенциалов уровенных поверхностей, т. е. исходной и проходящей через данную точку;  $\gamma$  — силу тяжести нормального потенциала и  $H_{\text{приб}}$  — искомую высоту, на основании (72.5) напомним

$$H_{\text{приб}}^M = \frac{u_0 - u_M}{\gamma_m^M} = \frac{\Delta u}{\gamma_m^M} = \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M}, \quad (72.8)$$

где  $\gamma_m^M$  — среднее значение нормальной силы тяжести на отвесной линии  $MM_1$ .

## 2. Ортометрические высоты

Ортометрическими высотами называются расстояния от поверхности геоида до точек земной поверхности, считающиеся по отвесным линиям, проходящим через эти точки. Для точки  $M$  (рис. 137) ортометрическая высота выразится расстоянием  $MM_1$ .

Для применения формулы (72.5) определим несколько иначе разность потенциалов  $W_0 - W_M$ . Так как точки  $O$  и  $M_1$  лежат на одной уровенной поверхности, то

$$W_0 - W_M = W_{M_1} - W_M = \int_0^M g dh = \int_{M_1}^M g dh. \quad (72.9)$$

Применив теорему Лагранжа о среднем значении функции, напомним

$$\int_{M_1}^M g dh = g_m^M \int_{M_1}^M dh = g_m^M H_M^g, \quad (72.10)$$

где  $g_m^M$  — среднее значение действительной силы тяжести на отрезке отвесной линии  $M_1M$ , а  $H_M^g = \int_{M_1}^M dh$ , согласно определению, — ортометрическая высота точки  $M$ .

Тогда для ортометрической высоты  $H_M^g$  получим

$$H_M^g = \frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = \frac{\int_0^M g dh}{g_m^M}. \quad (72.11)$$

Из (72.11) следует, что ортометрические высоты  $H_M^g$  не зависят от пути нивелирования и ортометрические высоты точек, расположенные на одной уровенной поверхности, будут иметь разные значения, так как расстояния от геоида до уровенной поверхности точки  $M$  не остаются постоянными и будут зависеть от  $g_m$ , значения которых будут различными в разных точках.

Ортометрические высоты имеют крупный недостаток принципиального характера — они не могут быть вычислены точно, так как входящая в формулу для  $H^g$  величина  $g_m$  сложным образом зависит от распределения плотностей внутри Земли, которые в настоящее время неизвестны. Величину  $H^g$  можно вычислить, задаваясь той или иной гипотезой распределения масс Земли. В этом случае точность вычисления  $H^g$  будет зависеть от степени достоверности при-

мененной гипотезы строения Земли. Вследствие этого не представляется возможным в полной мере оценить точность получаемых высот  $H^g$ .

Если применять ортометрическую систему высот, то геодезическая высота  $H_M$  точки  $M$ , показанная на рис. 134 отрезком  $MM_0$  определится

$$H_M = H_M^g + \zeta_1^M,$$

где  $\zeta_1^M$  — высота геоида над поверхностью относимости, которая, как показали специальные исследования, также не может быть вычислена точно. Поэтому при применении системы ортометрических высот задача по вычислению геодезических высот не получает точного и строгого решения.

От этого весьма существенного недостатка свободны нормальные высоты, которые ввел Молоденский при разработке общей теории исследования фигуры Земли.

В практике геодезических работ СССР применялись ортометрические высоты; во многих странах они применяются и сейчас. В СССР и социалистических странах перешли к системе нормальных высот.

### 3. Нормальные высоты

Изложим теорию нормальных высот \* несколько подробнее, чем в § 61, и получим удобные рабочие формулы для их вычислений. Обратимся к рис. 138.

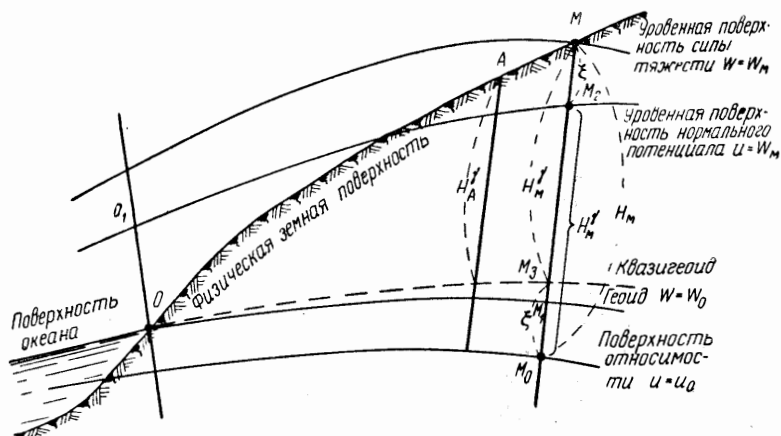


Рис. 138

Пусть основная уровенная поверхность — геоид определяется уравнением  $W = W_0 = \text{const.}$  и за поверхность относимости принят уровенный эллипсоид нормального потенциала, для которого  $u = u_0$ .

Потенциал на уровенной поверхности силы тяжести (действительной), проходящей через данную точку земной поверхности  $M$ , обозначим через  $W_M$ . Изобразим сечение уровенной поверхности нормального потенциала, для которой  $u = W_M$ ; пусть это будет кривая  $O_1M_2$ , тогда

$$W_0 - W_M = u_0 - u_{M_2}. \quad (72.12)$$

\* До 1951 г. высоты, определяемые по формуле (61.2), Молоденский называл вспомогательными; с указанного времени высоты  $H^g$  по его предложению получили название нормальных.

Обозначая через  $dH^\gamma$  элементарное превышение между уровнями поверхностями нормального поля на отвесной линии  $MM_0$  и имея в виду, что

$$W_0 - W_M = \int_{OM} g dh \text{ и } u_0 - u_{M_2} = \int_{M_0 M_2} \gamma dH^\gamma, \quad (72.13)$$

можем написать

$$\int_{OM} g dh = \int_{M_0 M_2} \gamma dH^\gamma = \gamma_m H_M^\gamma, \quad (72.14)$$

где  $\gamma_m$  — среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке отвесной линии  $M_0 M_2$ .

Из (72.14) и получим основную формулу для нормальной высоты

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m^M} = \frac{\int_{OM} g dh}{\gamma_m^M}. \quad (72.15)$$

Эта формула была получена В. Ф. Еремеевым.

Значение  $\gamma_m^M$ , т. е. нормальной силы тяжести на высоте  $\frac{1}{2} H_M^\gamma$  от эллипсоида, с достаточной точностью легко получится из (61.8), т. е.

$$\gamma_m^M = \gamma_0^M - 0,308 \cdot \frac{1}{2} H_{изм} = \gamma_0^M - 0,154 H_{изм}, \quad (72.16)$$

где  $\gamma_0^M$  — нормальная сила тяжести на поверхности относимости, вычисленная по нормальной формуле как функция широты  $B_m$ .

Из (72.15) следует, что нормальная высота однозначно определяется независимо от пути нивелирования. Точки, расположенные на одной уровневой поверхности, в общем случае будут иметь различные высоты, так как  $(W_0 - W_M)$  постоянно, но  $\gamma_m$  изменяется с изменением широты; в частном случае при расположении точек на одной параллели высоты будут одинаковыми.

Выражение (72.15) для нормальной высоты позволяет установить и физический смысл его: из непосредственных измерений получается значение  $\int_{OM} g dh$ , равное  $W_0 - W_M$ , т. е. разности потенциалов; по измеренной разности действительных потенциалов силы тяжести вычисляют высоты, но в нормальном гравитационном поле Земли, не принимая во внимание возмущающего потенциала и связанных с ним величин аномалий силы тяжести или уклонений отвесной линии.

Следствием этого получается несовпадение геодезической высоты  $H_M$  с нормальной  $H_M^\gamma$  на величину

$$\zeta = H_M - H_M^\gamma, \quad (72.17)$$

которая, таким образом, получает смысл аномалии высоты.

Нормальная высота  $H_M^\gamma$  точки  $M$  на рис. 138 изображается отрезком отвесной линии  $M_0 M_2$ , аномалия высоты  $MM_2$ , а геодезическая высота  $H_M$ , как расстояние  $MM_0$ , определится

$$H_M = H_M^\gamma + \zeta, \quad (72.18)$$

Оба слагаемых в правой части последнего выражения для  $H_M$  могут быть вычислены совершенно точно, не прибегая к использованию каких-либо гипотез; ошибка вычислений  $H_M^\gamma$  и  $\xi$  зависит только от ошибок непосредственных измерений.

В этом состоит главное и важное преимущество нормальных высот перед ортометрическими.

Если аномалии высоты  $\xi$  в каждой точке уровненного эллипсоида ( $u = u_0$ ) отложить от его поверхности вверх по нормальям, то геометрическим местом концов этих отрезков будет некоторая вспомогательная поверхность, которую Молоденский назвал квазигеоидом. Тогда нормальные высоты можно рассматривать как отрезки нормалей к эллипсоиду, отложенные от поверхности квазигеоида до физической земной поверхности (на рис. 138 для точки  $M$  — расстояние  $MM_3$ ). Для поверхности океанов в формуле (72.15) выражение  $W_0 - W_M = 0$  и, следовательно,  $H^\gamma = 0$ .

Поэтому на основании (72.18) геодезические высоты океанической поверхности равны аномалиям высот, т. е.

$$H_M = \xi. \quad (72.19)$$

Иначе говоря, на поверхности океанов геоид и квазигеоид совпадают, а аномалии высот выражают высоту геоида или квазигеоида над поверхностью уровненного эллипсоида.

Из сравнений (72.11) и (72.15) следует также, что квазигеоид совпадает с геоидом и на суше, в местах, где значения  $g_m$  и  $\gamma_m$  окажутся равными.

Нетрудно заключить, что квазигеоид приближенно выражает фигуру геоида.

Путем преобразований выражения (72.15) для  $H^\gamma$  получим более удобную формулу для практических вычислений, предложенную В. Ф. Еремеевым [22]

Цель преобразований исходной формулы (72.15) будет заключаться в выделении (в виде отдельных членов) трех слагаемых: высоты, получаемой из нивелирования, поправки за непараллельность уровненных поверхностей нормального поля и поправки за отклонения действительного поля от нормального. Геодезически такое преобразование формулы будет приближенно соответствовать схеме нивелирования, приведенной в начале этого параграфа.

Напишем:

$$\left. \begin{aligned} H_M^\gamma &= \frac{1}{\gamma_m^M} \int g \, dh = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma_m^M + \gamma_m^M - \gamma + \gamma) \, dh \\ H_M^\gamma &= \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (\gamma - \gamma_m^M) \, dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma) \, dh \end{aligned} \right\}. \quad (72.20)$$

Легко видеть, что первый член представляет собой сумму непосредственно полученных превышений из нивелирного хода, т. е.  $H_{изм}$ ; первые два члена, взятые вместе, представляют высоту точки  $M$ , вычисленную с учетом непараллельности уровненных поверхностей нормального поля, т. е.  $H_{прибл}$ , последний член представляет собой поправку за отклонение действительного гравитационного поля Земли от нормального.

Путем сравнительно несложных преобразований В. Ф. Еремеев приводит формулу (72.20) к виду, более удобному для практических вычислений

$$H_M^\gamma = \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (\gamma_0 - \gamma_0^M) \, dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int (g - \gamma) \, dh, \quad (72.21)$$



где  $\gamma_0$  — нормальное значение силы тяжести на уровне эллипсоиде в переменной точке;

$\gamma_0^M$  — то же, но в точке, лежащей на отвесной линии, проходящей через  $M$ , т. е. в  $M_0$ .

Или, принимая во внимание (72.8),

$$H_M^\gamma = H_{\text{прибл}}^M + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma) dh. \quad (72.22)$$

Формулу для разности нормальных высот двух точек, например  $M$  и  $A$ , получим как разность  $H_M^\gamma - H_A^\gamma$ , т. е.

$$H_M^\gamma - H_A^\gamma = H_{\text{прибл}}^M - H_{\text{прибл}}^A + \frac{1}{\gamma_m} \int_{AM} (g - \gamma) dh. \quad (72.23)$$

Сравним значения нормальных и ортометрических высот. Имеем

$$W_0 - W_M = \gamma_m^M H_M^\gamma = g_m^M H_M^\gamma - (g_m^M - \gamma_m^M) H_M^\gamma, \quad (72.24)$$

разделим его на  $g_m^M$ , тогда

$$\frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = H_M^g = H_M^\gamma - \frac{(g_m^M - \gamma_m^M)}{g_m^M} H_M^\gamma \quad (72.25)$$

или, на основании (72.21), окончательно

$$H_M^g = \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (\gamma_0 - \gamma_0^M) dh + \frac{1}{\gamma_m^M} \int_{OM} (g - \gamma) dh - \frac{g_m^M - \gamma_m^M}{g_m^M} H_M^\gamma. \quad (72.26)$$

Таким образом, ортометрическая высота отличается от нормальной последним членом

$$H_M^g - H_M^\gamma = \frac{g_m^M - \gamma_m^M}{g_m^M} H_M^\gamma. \quad (72.27)$$

Рис. 138 показывает, что (72.27) выражает отступление квазигеоида от геоида, т. е. отрезок  $M_1 M_3$ .

Если взять максимальное значение  $g_m - \gamma_m = 500$  млг,  $H = 4$  км, то  $H^g - H^\gamma = 2$  м; при  $(g_m - \gamma_m) = 50$  млг и  $H = 500$  м,  $H^g - H^\gamma = 2,5$  см.

Отсюда следует, что максимальное отступление квазигеоида от геоида не превосходит 2 м, а в большинстве районов характеризуется величиной порядка нескольких сантиметров.

Если ход нивелирования представляет замкнутый полигон  $ABCD A$ , то должно соблюдаться равенство

$$\int_A dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_A (\gamma_0 - \gamma^A) dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_A (g - \gamma) dh = 0. \quad (72.28)$$

Если под суммой превышений понимать непосредственно получаемую сумму превышений  $\int_A dh$ , то в этом случае теоретическая невязка полигона  $f$  определится криволинейным интегралом, т. е.

$$f = \int_A dh = - \frac{1}{\gamma_m} \int_A (\gamma - \gamma_0^A) dh - \frac{1}{\gamma_m} \int_A (g - \gamma) dh. \quad (72.29)$$

Следовательно, при вычислении невязок замкнутого нивелирного полигона за теоретическую сумму превышений в них следует принимать не нуль, а величину  $f$ .

#### 4. Динамические высоты

Нормальные высоты точек (так же как и ортометрические) одной и той же уровенной поверхности будут в общем случае в разных местах отличаться одна от другой, что в практике инженерно-геодезических работ может вызвать затруднения, а иногда и просчеты, если инженер-строитель при использовании геодезических данных для проектирования крупных инженерных сооружений не будет учитывать этого обстоятельства.

Инженеры-строители разных специальностей, не имеющие специального геодезического образования, обычно считают, например, что точки земной поверхности, имеющие одинаковые отметки, находятся «на одном уровне» и соответственно ведут свои расчеты при разработке проектов тех или иных сооружений. Приведем простейшие примеры.

Допустим, что инженер, проектирующий железную дорогу, задается целью проложить ее в данном участке пути без уклонов, с тем чтобы сила локомотива не тратилась на их преодоление, а расходовалась только для преодоления тормозящих сил трения. Для этого, очевидно, трасса дороги должна располагаться на одной уровенной поверхности, для которой потенциал силы тяжести  $W = \text{const.}$ ; расположение дороги на разных уровенных поверхностях не соответствует условиям поставленной задачи, однако проектировщик, сохраняющий одинаковые высоты трассы (нормальные, ортометрические), получит проект дороги на разных уровенных поверхностях. Для достижения поставленной цели было бы необходимо предварительно вычислить нормальные высоты точек на той уровенной поверхности, на которой намечено проложить проектируемый путь железной дороги.

Рассмотрим частный пример из практики гидротехнического строительства. Необходимо запроектировать по данным нивелирования границу затопления при создании нового большого водоема. Не учитывая непараллельности уровенных поверхностей, можно сделать ошибочный вывод, что такой границей будет горизонталь, соответствующая единому числовому значению нормальной высоты. В действительности граница затопления будет представлять на земной поверхности контур, имеющий в разных частях различные нормальные (или ортометрические) высоты. Ошибочно также принимать, что уровень какого-либо водного бассейна в спокойном состоянии имеет одинаковые нормальные высоты, и урезы воды на берегах везде имеют равные высоты.

Можно предположить, что влияние непараллельности уровенных поверхностей мало, а потому пренебрегаемо. Это, конечно, справедливо во многих случаях и, например, при топографических съемках непараллельность уровенных поверхностей не учитывается. Но когда точность определения высот имеет важное значение (например, при строительстве больших гидротехнических комплексов) и для проектирования используются **числовые данные** (в отличие от графических), то эти обстоятельства в необходимых случаях следует учитывать.

Приведем, например, разности нормальных высот северных и южных точек некоторых водоемов и средние квадратические ошибки нивелирных ходов 1 класса, соединяющих реперы, расположенные на севере и юге этих водоемов.

Из табл. 20 следует, что во всех приведенных случаях  $(H_S^\gamma - H_N^\gamma) > \Delta h$ , и эту закономерность следует признать общей, особенно для водоемов, имеющих протяженность с севера на юг и большие высоты  $H^\gamma$ .

Т а б л и ц а 20

Наименование объектов	$H_S^\gamma - H_N^\gamma$ в мм	Средняя квадратическая ошибка нивелирного хода $\Delta h$ в мм	$H^\gamma$ уреза воды (средние)
Рыбинское водохрани- лище . . . . .	8,4	$\pm 6$	100
Озеро Севан . . . . .	88	4	1900
Озеро Байкал . . . . .	165	25	450
Озеро Кукувор . . . . .	190	$\sim 10$	3200

Такие примеры можно распространить на другие виды строительства. Изложенные выше соображения должны учитываться при строительстве сооружений, больших по размеру используемой территории или предъявляющих особо высокие требования к точности геодезических данных.

В подобных случаях выгодно использовать динамические высоты. Эти высоты определяются исходя из следующих соображений.

Разность потенциалов силы тяжести определяет разности высот соответствующих точек Земли. Поэтому, по-прежнему, принимая за исходное выражение

$$H_M = \frac{W_0 - W_M}{g},$$

можно подразумевать под  $\bar{g}$  нормальное ускорение силы тяжести для средней широты Земли, т. е.  $45^\circ$ . Тогда основная формула для вычисления динамических высот примет вид

$$H_M^{\text{дин}} = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_{45^\circ}} = \frac{\int \gamma dh}{\gamma_{45^\circ}}. \quad (72.30)$$

Нетрудно из (72.30) видеть, что динамические высоты точек, расположенных на одной уровенной поверхности, будут одинаковы, так как в этом случае и числитель и знаменатель будут постоянными; динамические высоты не зависят от пути нивелирования.

Связь между нормальными и динамическими высотами получится из сопоставления выражений (72.15) и (72.30), т. е.

$$H_M^\gamma = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m^M},$$

$$H_M^{\text{дин}} = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_{45^\circ}},$$

откуда

$$H_M^{\text{дин}} = \frac{\gamma_m^M}{\gamma_{45^\circ}} H_M^\gamma = H_M^\gamma - \frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma_m^M}{\gamma_{45^\circ}} H_M^\gamma. \quad (72.31)$$

Обозначая

$$\frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma_m^M}{\gamma_{45^\circ}} = q, \quad (72.32)$$

формулу (72.31) можно записать так:

$$H_M^{\text{дин}} = H_M^\gamma - H_M^\gamma q = \int_{OM} dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_{OM} (\gamma_0 - \gamma_0^M) dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_{OM} (g - \gamma) dh - H_M^\gamma q. \quad (72.33)$$

Для коэффициента  $q$  имеется таблица [22, стр. 47], при помощи которой определяется последний член  $H_M^\gamma q$ . Так как  $\gamma_{45^\circ}$  должно быть вычислено для средней высоты точки  $M$ , то практически для вычисления  $q$  служит формула

$$q = 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_{45^\circ}} + \frac{0.0003086}{2\gamma_{45^\circ}} H_M. \quad (72.34)$$

Приведем значение  $\gamma_{45^\circ}$ , вычисленное по формуле Гельмерта,

$$\gamma_{45^\circ} = 980,616 \text{ гл.}$$

Динамические высоты значительно отличаются от нормальных или ортометрических по мере удаления от параллели  $45^\circ$ . Эти различия могут достигать 10—20 м. Для уменьшения этого различия можно вычислить динамические высоты при некотором  $\gamma_{B_m}$ , где  $B_m$  — средняя широта района применения динамических высот.

Приведем в несколько ином виде вывод формулы для динамической высоты. Рассмотрим две весьма близкие уровенные поверхности; расстояние между ними в какой-либо точке обозначим через  $dh$ . Во всех предыдущих рассуждениях мы использовали массу, равную единице; теперь используем понятие «работы, развиваемой массой единицы веса, падающей под действием силы тяжести, на расстоянии  $dh$ ». Вес материальной точки зависит от широты места; поэтому для определенности этой единицы примем широту  $\varphi = 45^\circ$ . Масса единицы веса на исходной уровенной поверхности в точке, имеющей широту  $45^\circ$ , будет равна  $\frac{1}{\gamma_{45^\circ}}$ . Следовательно, элементарная работа  $\Delta R$ , которую необходимо выполнить для перемещения этой массы на высоту  $dh$ , будет равна

$$\Delta R = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} g dh.$$

Представим себе на земной поверхности две точки  $A$  и  $M$  (см. рис. 140); работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять точку с единичной массой из точки  $A$  в точку  $M$ , выразится интегралом

$$R_A^M = \int_A^M \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} g dh. \quad (72.35)$$

Если  $dh$  выражено в метрах, за единицу веса взят 1 кг, то работа  $R_A^M$  выразится в килограммометрах (техническая система единиц).

Возьмем вместо точки  $A$  точку  $O$ , совпадающую с футштоком, принятым для начала счета высот. Тогда (72.35) для произвольной точки  $M$  примет вид

$$R_0^M = \int_0^M \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} g dh \quad (72.36)$$

или

$$R_0^M = \frac{\int_0^M g dh}{\gamma_{45^\circ}} = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_{45^\circ}}, \quad (72.37)$$

т. е. получим в правой части выражение для динамической высоты  $H_M^{\text{дин}}$  (72.30).

Покажем, что динамическая разность уровней равна разности динамических высот. Выражение (72.35) можем написать так:

$$R_A^M = \int_0^M \frac{g dh}{\gamma_{45^\circ}} - \int_0^A \frac{g dh}{\gamma_{45^\circ}} \quad (72.38)$$

или, принимая во внимание (72.36),

$$R_A^M = R_0^M - R_0^A,$$

или численно

$$R_A^M = H_M^{\text{дин}} - H_A^{\text{дин}}. \quad (72.39)$$

Следовательно, выражаясь геометрически, любые две уровенные поверхности во всех своих точках динамически равноудалены одна от другой.

Напомним, что этим свойством не обладают нормальные и ортометрические высоты.

Из (72.39) вытекает, что при использовании результатов нивелирования для инженерно-технических расчетов, связанных с учетом работы, совершаемой в гравитационном поле Земли, выгодно использовать систему динамических высот.

Преобразуем выражение (72.37) так:

$$R_0^M = \int_0^M \frac{g}{\gamma_{45^\circ}} dh = \int_0^M \frac{\gamma_{45^\circ} - \gamma_{45^\circ} + g}{\gamma_{45^\circ}} dh = \int_0^M dh + \int_0^M \frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} dh. \quad (72.40)$$

Обозначим

$$\frac{g - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}} = q',$$

тогда

$$R_0^M = \int_0^M dh + \int_0^M q' dh. \quad (72.41)$$

В (72.41) первый интеграл численно представляет сумму непосредственно измеренных превышений, т. е.  $H_M^{\text{изм}}$ , а второй — динамическую поправку  $\Delta H_M^{\text{дин}}$ .

Для более простого выявления сущности этой поправки рассмотрим ее значение в нормальном поле Земли, т. е. положим, что  $g = \gamma$ . Тогда для  $R_0^M$ , согласно (72.40),

$$R_0^M = \int_0^M \frac{\gamma}{\gamma_{45^\circ}} dh = \int_0^M (1 + q'_0) dh = \int_0^M dh + \int_0^M q'_0 dh, \quad (72.42)$$

где

$$q'_0 = \frac{\gamma - \gamma_{45^\circ}}{\gamma_{45^\circ}}.$$

На основании формулы Клеро (59.34) и (61.5)

$$\gamma = \gamma_{45^\circ} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi - \frac{\partial \gamma}{\partial H} H \right)$$

или

$$\frac{\gamma}{\gamma_{45^\circ}} = \left( 1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi - \frac{\partial \gamma}{\partial H} H \right). \quad (72.43)$$

Тогда

$$R_0^M = \int_0^M dh + \int_0^M \left( -\frac{\beta}{2} \cos 2\varphi - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H \right) dh. \quad (72.44)$$

Следовательно, динамическая поправка  $\Delta H_M^{\text{дин}}$  определяется суммой двух слагаемых:

$$\Delta H_M^{\text{дин}} = -\frac{\beta}{2} \int_0^M \cos 2\varphi dh - \frac{\partial h}{\partial h} \int_0^M H dh = -\frac{\beta}{2} \int_0^M \cos 2\varphi dh - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{H_M^2 - H_0^2}{2}. \quad (72.45)$$

Первое слагаемое  $-\frac{\beta}{2} \int_0^M \cos 2\varphi dh$  можно назвать «поправкой за широту»; второе слагаемое  $\frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{H_M^2 - H_0^2}{2} = -0,3086 \frac{H_M}{2}$  — «поправкой за высоту».

При вычислении материалов государственных геодезических сетей динамические высоты не применяются.

### § 73. Астрономическое и астрономо-гравиметрическое нивелирование

Астрономическое и астрономо-гравиметрическое нивелирование — методы определения превышений точек квазигеоида (геоида) относительно поверхности референц-эллипсоида.

Для уяснения сущности обоих методов нивелирования рассмотрим следующий простейший случай, на котором наряду с освещением основной идеи

данного вида нивелирования просто покажем и различие между обоими методами.

Пусть  $A$  (рис. 139) — начальная точка триангуляции, для которой  $\xi_0 = 0$ . Для получения приближенной формулы допустим, что профиль земной поверхности совпадает с некоторой уровенной поверхностью  $W_A = C$ , т. е.  $H^\gamma \cong \text{пост.}$  Возьмем точку  $A_1$ , бесконечно близкую к точке  $A$ . Прямая  $A_1 n_1$  — нормаль к эллипсоиду, прямая  $A_1 n_2$  — отвесная линия.

Обозначим:

$\vartheta$  — уклонение отвесной линии в азимуте сечения  $AA_1$ , тогда угол при точке  $A$  между сечением уровенной поверхности  $W_A = C$  и эллипсоидом также будет  $\vartheta$ ;

$d\xi$  — превышение точки  $A_1$  над точкой  $A$  относительно эллипсоида;

$ds$  — расстояние  $AA_1$ .

Таким образом,

$$d\xi = -\vartheta ds. \quad (73.1)$$

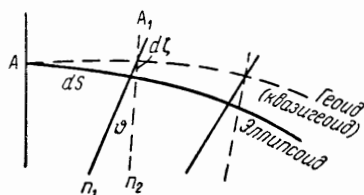


Рис. 139

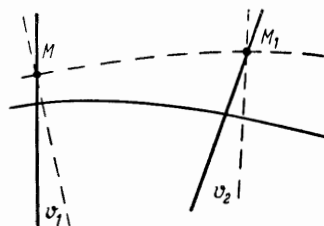


Рис. 140

Геодезическая высота уровенной поверхности  $W_A = C$  над эллипсоидом в точке  $B$ , находящейся на конечном расстоянии  $s$  от точки  $A$ , изменится на величину

$$\xi_B - \xi_A = - \int_{AB} \vartheta ds. \quad (73.2)$$

Это и будет искомая формула нивелирования, практически точная при  $H^\gamma \cong \text{const.}$  Для общего случая  $H^\gamma \neq \text{const}$  интеграл  $\int_{AB} \vartheta ds$  будет главным членом формулы астрономического нивелирования; поправочный член будет выражать влияние непараллельности уровенных поверхностей.

Как видно, принципиальная схема нивелирования данного вида чрезвычайно проста; существенные затруднения возникают при вычислении интеграла  $\int \vartheta ds$ , на чем и остановимся подробнее.

Практически при вычислении превышений  $d\xi$  под последними можно понимать превышения  $\Delta\xi = \xi_i - \xi_{i-1}$  между точками, расположенными на конечном, но достаточно близком расстоянии  $s$ .

Но, согласно формуле (73.2), для вычисления  $\xi$  уклонение  $\vartheta$  должно быть известно в каждой точке нивелирования; поэтому, если расстояние между точками нивелирования принимается конечным, а закон изменения  $\vartheta$  неизвестен, то приходится задаться некоторым условием или предположением о характере изменения  $\vartheta$  в пределах этого расстояния  $s$ . Наиболее простым и важным усло-

вием будет линейность изменения  $\vartheta$ . Из этого условия одновременно следует, что смежные точки нивелирования должны быть достаточно близки.

Опытные данные позволили установить, что поставленное условие во многих случаях будет выполняться с некоторой приемлемой точностью, если расстояние  $s$  между смежными точками нивелирования будет порядка 10–20 км, в равнинной местности с плавными и равномерными изменениями уклонов отвесных линий и 3–5 км в горных и аномальных районах.

Однако и при таких расстояниях могут быть заметные отступления от предположенного закона линейного изменения уклона  $\vartheta$ , снижающие точность нивелирования.

Рабочие формулы для вычисления превышений точек квазигеоида при некотором конечном значении  $s$  в рассматриваемом случае получатся следующим образом.

Возьмем некоторую линию астрономического или астрономо-гравиметрического нивелирования от прежней начальной точки  $A$  до некоторой точки  $B$ . Пусть  $MM_1$  — две произвольные смежные точки этой линии нивелирования (рис. 140).

Введем обозначения:

$\vartheta_1''$  и  $\vartheta_2''$  — уклоны отвесных линий в точках  $M$  и  $M_1$ ;

$s_M$  — расстояние  $MM_1$ .

Учитывая предположенную линейность измерения  $\vartheta$ , можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_M + ks \\ \vartheta_{M_1} &= \vartheta_M + ks_M \\ k &= \frac{\vartheta_{M_1} - \vartheta_M}{s_M} \end{aligned} \right\} \quad (73.3)$$

Тогда на основании формулы (73.1) получим для интервала  $MM_1$

$$\zeta_1 = - \int_0^{s_M} \left( \vartheta_{M''} + \frac{\vartheta_{M_1''} - \vartheta_{M''}}{s_M} \right) ds = - \frac{s_M}{2} (\vartheta_{M''} + \vartheta_{M_1''}). \quad (73.4)$$

Рассматривая линию  $AB$ , состоящую из отрезков, аналогичных  $MM_1$ , получаем для нее

$$\begin{aligned} \zeta &= - \frac{1}{\rho''} \int_{AB} \vartheta'' ds = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots) = \\ &= - \frac{\vartheta_1'' + \vartheta_2''}{2\rho''} s_1 - \frac{\vartheta_2'' + \vartheta_3''}{2\rho''} s_2 - \frac{\vartheta_3'' + \vartheta_4''}{2\rho''} s_3 - \dots \end{aligned} \quad (73.5)$$

Остановимся на специфических особенностях и различии обоих методов нивелирования.

В методе астрономического нивелирования уклоны  $\vartheta$  получаются из астрономических и геодезических измерений, т. е. по формуле

$$\vartheta = \xi_{ar} \cos A + \eta_{ar} \sin A, \quad (73.6)$$

где

$$\xi_{ar}'' = \varphi - B - 0,171'' H \sin 2B,$$

$$\eta_{ar}'' = (\lambda - L) \cos B,$$



$A$  — азимут вертикальной плоскости, в которой расположен данный отрезок линии нивелирования.

Отсюда следует, что в каждой точке хода астрономического нивелирования должны быть известны астрономические и геодезические координаты. Иначе говоря, если ход астрономического нивелирования расположен по ряду триангуляции 1 класса, то на каждом пункте, а в большинстве районов и между ними, на пунктах 2 и даже 3 класса должны выполняться точные астрономические определения широт и долгот.

При астрономо-гравиметрическом нивелировании и уклонения отвесных линий  $\vartheta$  при вычислении интеграла  $\int \vartheta ds$  определяются по методу, изложенному в § 66. Для этого необходимо иметь сравнительно редкую сеть совмещенных астрономических и геодезических пунктов, для которых величины  $\xi_{ag}$ ,  $\eta_{ag}$  и  $\Theta_{ag}$  вычисляются по формулам (65.17) и (65.19). Тогда уклонения отвесных линий в точках, расположенных между астрономо-геодезическими пунктами, получаются путем интерполирования с привлечением результатов гравиметрической съемки. В этом случае уклонения отвеса между астрономо-геодезическими пунктами могут быть вычислены как угодно часто. Точнее говоря, уклонения отвесных линий в этом случае могут быть весьма точно проинтерполированы между редкими астрономо-геодезическими пунктами. Поэтому для астрономо-гравиметрического нивелирования интеграл  $\int \vartheta ds$  может быть вычислен точно, без какого-либо предположения о характере изменений  $\vartheta$ .

Из сказанного ясно вытекает преимущество астрономо-гравиметрического метода нивелирования по сравнению с астрономическим методом. Метод астрономо-гравиметрического нивелирования позволяет без существенных дополнительных затрат труда получать высоты квазигеоида с достаточной строгостью и точностью. Ошибки определения высот по этому методу могут быть (при соответствующей, реально выполняемой программе полевых измерений) доведены до весьма малых величин.

Идея астрономо-гравиметрического нивелирования была предложена Ф. Н. Красовским и разработана М. С. Молоденским, под руководством которого выполнены обширные теоретические исследования по обоснованию и анализу различных сторон этого метода.

### 1. Формулы астрономического нивелирования

Приведем вывод формулы астрономического нивелирования, впервые полученной М. С. Молоденским.

Пусть дана на поверхности Земли точка  $M$ , имеющая геодезическую высоту  $H = H^v + \xi_{ag}$  над референц-эллипсоидом (рис. 141). Возьмем точку  $M_1$ , расположенную от точки  $M$  на бесконечно малом расстоянии  $ds$ , имеющем азимут  $A$ .

Далее пусть:

$z_{гeод}$  и  $z_{aстр}$  — геодезический и астрономический зенит точки  $M$ ;

$\Theta_{ag}$  — составляющая угла между  $z_{гeод}$  и  $z_{aстр}$  в рассматриваемой плоскости;

$dH = M_1k$  и  $dh = M_1L$  — элементарные превышения точки  $M_1$  над точкой  $M$  относительно референц-эллипсоида ( $H = \text{const}$ ) и уровенной поверхности точки  $M$  ( $W = \text{const}$ ) соответственно;

$ds_n = Mk$  — проекция отрезка  $ds$  на поверхность  $H = \text{const}$  (или  $u = \text{const}$  — по малости угла  $\epsilon$ ).

Получим проекцию ломаной  $MkM_1$  на отвесную линию, равную отрезку  $M_1L = dh$ . Действительно, из рис. 141 получаем

$$dh = d(H^\gamma + \zeta_{ar}) \cos \Theta_{ar} + ds_H \sin \Theta_{ar} \quad (73.7)$$

или, пренебрегая величинами порядка  $\Theta^2$ ,

$$dh = d(H^\gamma + \zeta_{ar}) + \Theta_{ar} ds_H = dH + \Theta_{ar} ds_H. \quad (73.8)$$

Откуда

$$dH = dh - \Theta_{ar} ds_H. \quad (73.9)$$

Из формулы (73.8) следует, что превышения точек земной поверхности относительно референц-эллипсоида могут определяться на основе астрономических и геодезических измерений, без привлечения гравиметрических данных, т. е. чисто геометрически. Действительно,  $dh$  — превышение, получаемое непосредственно из геометрического нивелирования,  $ds$  —

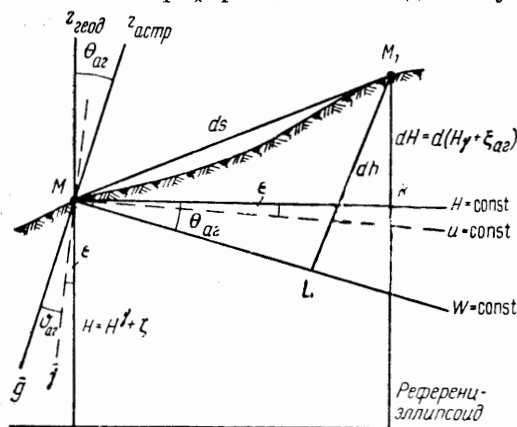


Рис. 141

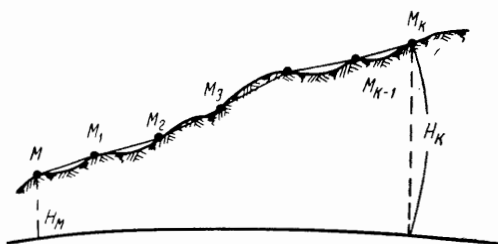


Рис. 142

элемент линейного расстояния, получаемого из триангуляции, а  $\Theta$  — угол, вычисляемый как функция астрономических и геодезических координат по формуле (65.19).

Если имеем ряд последовательных передач высоты от точки  $M$  через превышения  $dh$  между точками  $MM_1$ ,  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$ , ...,  $M_{k-1}M_k$  (рис. 142), то разность высот  $H_{M_k} - H_M$ , считаемая по нормали от референц-эллипсоида, определится так:

$$H_{M_k} - H_M = \int_M^{M_k} dh - \int_M^{M_k} \Theta ds. \quad (73.10)$$

Полученная формула практического значения не имеет; для ее использования необходимо было бы на каждой станции нивелирования иметь астрономические и геодезические координаты.

Для решения задач высшей геодезии необходимо знать высоту  $H$  для каждого пункта триангуляции (полигонометрии) высших классов; для которых нормальные высоты заранее определены из геометрического нивелирования. Следовательно, для вычисления  $H$  по формуле  $H = H^\gamma + \zeta$  необходимо получить формулу для вычисления приращений аномалий высот  $d\zeta$ , или, иначе, приращений высот квазигеоида над референц-эллипсоидом.

Но если из чисто геометрических измерений оказалось возможным строго выразить сумму слагаемых  $H^\gamma + \zeta = H$ , то каждое из этих слагаемых может

быть определено только с дополнительным использованием теории нормального поля Земли и привлечением гравиметрических измерений. Это понятно, так как нормальные высоты и аномалии высоты — функции величин, определяемых по результатам гравиметрических измерений на поверхности Земли.

Переходя к выводу формулы для превышений точек квазигеоида, из (73.8) напомним

$$-d\zeta_{ar} = dH^\gamma - dh + \Theta_{ar} ds_H. \quad (73.11)$$

Дифференцируя (72.20), можно получить

$$dH^\gamma - dh = \frac{g - \gamma}{\gamma} dh - \frac{H^\gamma d\gamma_0}{\gamma}. \quad (73.12)$$

Последнее слагаемое правой части выражения (73.12) перепишем так:

$$\frac{H^\gamma d\gamma_0}{\gamma} = \frac{H^\gamma}{\gamma} \frac{d\gamma_0}{ds_H} ds_H. \quad (73.13)$$

Проектируя отрезок  $ds_H$  на меридиан, можем написать

$$ds_H \cos A = M dB = R dB \quad (73.14)$$

или

$$\frac{1}{ds_H} = \frac{\cos A}{R dB}. \quad (73.15)$$

Тогда выражение (73.13) преобразуется

$$\frac{H^\gamma}{\gamma} \frac{d\gamma_0}{ds_H} ds_H = \frac{H^\gamma}{\gamma} \frac{d\gamma_0}{R dB} \cos A ds_H. \quad (73.16)$$

Производную  $\frac{d\gamma_0}{dB}$  найдем из уравнения Клеро

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_s \beta \sin^2 B, \quad (73.17)$$

из которого пишем

$$\frac{d\gamma}{dB} = \beta \gamma_s \sin 2B. \quad (73.18)$$

Поэтому последний член выражения (73.12) примет вид

$$\frac{H d\gamma_0}{\gamma} = \left( \frac{\beta H \sin 2B}{R} \right) \cos A ds_H. \quad (73.19)$$

Принимая во внимание, что, согласно (65.20),

$$\frac{\beta H \sin 2B}{R} \cos A = \varepsilon = \Theta_{ar} - \vartheta_{ar} \quad (73.20)$$

можем написать

$$\frac{H d\gamma_0}{\gamma} = \varepsilon ds_H = (\Theta_{ar} - \vartheta_{ar}) ds_H. \quad (73.21)$$

Тогда на основании (73.20) и (73.12) искомое выражение (73.11) получится

$$-d\zeta_{ar} = \frac{g - \gamma}{\gamma} dh - (\Theta_{ar} - \vartheta_{ar}) ds_H + \Theta_{ar} ds_H \quad (73.22)$$

или окончательно

$$-d\zeta_{ar} = \vartheta_{ar} ds_H + \frac{(g \cdot \gamma)}{\gamma} dh. \quad (73.23)$$

В результате интегрирования (73.23) вдоль некоторого астрономо-геодезического хода  $AB$  получим искомую формулу астрономического нивелирования высот квазигеоида

$$-(\zeta_{ar}^B - \zeta_{ar}^A) = \int_{AB} \vartheta_{ar} ds_H + \frac{1}{\gamma_m} \int_{AB} (g - \gamma) dh. \quad (73.24)$$

Как видим, полученная точная формула астрономического нивелирования для общего случая отличается от приближенной (73.2) добавочным членом  $\frac{1}{\gamma_m} \int (g - \gamma) dh$ , учитывающим непараллельность уровенных поверхностей в пунктах нивелирования поверхности квазигеоида в соответствующих его точках. Этот член зависит от  $(g - \gamma)$ , т. е. от аномалий силы тяжести; это подтверждает, что поверхность квазигеоида относительно референц-эллипсоида из одних астрономо-геодезических измерений не определяется.

В отношении определения главного члена формулы  $-\int \vartheta ds_H$  из астрономо-геодезических измерений можно повторить лишь сказанное выше, что с некоторым приближением он может быть вычислен при большой дополнительной затрате труда на астрономические наблюдения на каждом пункте триангуляции через 10—20 км в неаномальном районе и через 3—5 км — в аномальном.

От этого основного недостатка свободен метод астрономо-гравиметрического нивелирования, вывод формулы которого приводится далее.

## 2. Формулы астрономо-гравиметрического нивелирования

Основная идея астрономо-гравиметрического нивелирования пояснена выше. Исходной формулой будет служить (73.24). Следовательно, задача сводится к определению интеграла  $\int_{AB} \vartheta_{ar} ds_H$  на основании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений.

Представим себе, что в некоторой области  $\sigma$ , окружающей пункты  $AB$  (рис. 143), имеется гравиметрическая съемка, позволяющая для любой точки в пределах области  $\sigma$  иметь аномалии силы тяжести  $(g - \gamma)$ ; остальную часть земной поверхности обозначим через  $\Sigma$ .

Пусть некоторая точка  $C$  расположена на отрезке  $AB$ .

Можем написать

$$\vartheta_{ar}^C = \vartheta_{\sigma}^C + \vartheta_{\Sigma}^C + \Delta\vartheta, \quad (73.25)$$

где  $\vartheta_{\sigma}^C$  и  $\vartheta_{\Sigma}^C$  — составные части астрономо-геодезического уклонения отвесной линии в точке  $C$ , вызванные аномалиями силы тяжести на поверхностях  $\sigma$  и  $\Sigma$  соответственно;  $\Delta\vartheta$  — составная часть уклонения отвеса, вызванная несовпадением референц-эллипсоида с общим земным эллипсоидом (составляющая угла между эллипсоидами во взятом направлении).

Область  $\sigma$  установим таким образом, чтобы влияние аномалий на  $\vartheta$  остальной части земной поверхности, т. е.  $\vartheta_{\Sigma}^C$ , могло быть по линии  $AB$  признано практически изменяющимся линейно, нелинейная часть изменения  $\vartheta$  в области  $\sigma$  должна быть определена при помощи аномалий силы тяжести в этой области.

Следовательно, гравиметрические данные области  $\sigma$  используются для нелинейной интерполяции уклонения  $\vartheta_{\sigma}^C$  между точками  $A$  и  $B$ ; астрономо-геодезические уклонения в точках  $A$  и  $B$  служат для линейной интерполяции  $\vartheta_{\Sigma}^C$  влияния аномалий области  $\Sigma$  и влияния  $\Delta\vartheta$  угла между референц-эллипсоидом и гравиметрическим эллипсоидом.

Приняв во внимание (73.24) и (73.25), напомним

$$-(\zeta_{ar}^B - \zeta_{ar}^A) = \int_{AB} \vartheta_{\sigma} ds_H + \frac{1}{\gamma_m} \int_{AB} (g - \gamma) dh + \int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds_H. \quad (73.26)$$

Обозначим

$$-(\zeta_{\sigma}^B - \zeta_{\sigma}^A) = \int_{AB} \vartheta_{\sigma} ds_H + \frac{1}{\gamma_m} \int_{AB} (g - \gamma) dh, \quad (73.27)$$

после чего

$$-(\zeta_{ar}^B - \zeta_{ar}^A) = -(\zeta_{\sigma}^B - \zeta_{\sigma}^A) + \int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds_H. \quad (73.28)$$

Пусть на рис. 144 точки  $A_0$  и  $B_0$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на референц-эллипсоид, принимаемый за плоскость. Построим прямоугольную систему коор-

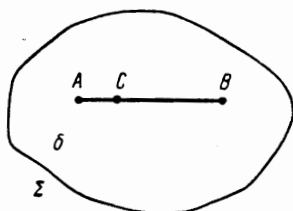


Рис. 143

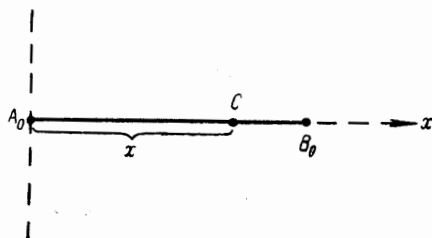


Рис. 144

динат с началом в точке  $A_0$ ; ось  $x$  совместим с прямой  $A_0B_0$ .  $C$  — текущая точка с координатами  $(x, 0)$ .

Согласно условию,  $(\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta)$  должна быть линейной функцией, поэтому полагаем

$$\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta = a + bx. \quad (73.29)$$

Тогда определяемый интеграл выразится

$$\int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds = \int_0^s (a + bx) dx = as + b \frac{s^2}{2}. \quad (73.30)$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  напомним выражение для подынтегральной функции в точках  $A_0$  и  $B_0$ .

В точке  $A_0$

$$x = 0, \quad [\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_A = a.$$

В точке  $B_0$

$$x = s, \quad [\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_B = a + bs.$$

Откуда

$$b = \frac{[\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_B - [\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_A}{s}. \quad (73.31)$$

Делаем подстановку выражений коэффициентов  $a$  и  $b$  в (73.30), получаем

$$\int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds = [\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_A s + \frac{[\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_B - [\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta]_A}{2s} s^2 \quad (73.32)$$

или

$$\int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds = \frac{s}{2} [(\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta)_A + (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta)_B]. \quad (73.33)$$

Так как, согласно (73.25),

$$\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta = \vartheta_{ar} - \vartheta_{\sigma}, \quad (73.34)$$

то (73.33) примет вид

$$\int_{AB} (\vartheta_{\Sigma} + \Delta\vartheta) ds = [(\vartheta_{ar}^B + \vartheta_{ar}^A) - (\vartheta_{\sigma}^B + \vartheta_{\sigma}^A)] \frac{s}{2}. \quad (73.35)$$

После подстановки (73.35) в (73.28) получим

$$-(\zeta_{ar}^B - \zeta_{ar}^A) = \frac{1}{2} (\vartheta_{ar}^B + \vartheta_{ar}^A) s - \left[ (\zeta_{\sigma}^B - \zeta_{\sigma}^A) + (\vartheta_{\sigma}^B - \vartheta_{\sigma}^A) \frac{s}{2} \right]. \quad (73.36)$$

Полученное выражение (73.36) и является формулой астрономо-гравиметрического нивелирования, полученной Молоденским еще в 1937 г.

Первый член (73.36) представляет собой формулу астрономического нивелирования (без учета непараллельности уровенных поверхностей), второй член — поправку за нелинейность изменения уклонения  $\vartheta$  и различие в параметрах общего эллипсоида и референц-эллипсоида.

Величины  $\vartheta_{ar}^A$  и  $\vartheta_{ar}^B$  получают просто по формуле (65.18); значения величин  $\zeta_{\sigma}^A$  и  $\vartheta_{\sigma}^A$  можно определять методом численного интегрирования по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса, т. е. по формулам (62.26) и (64.8) или в горных районах по формулам Молоденского.

Практически вычисления по формуле (73.36) производят с применением специальной эллиптической палетки. Формулу (73.36) часто используют в виде

$$\frac{\zeta_{ar}^B - \zeta_{ar}^A}{s} \rho'' = -\frac{1}{2} (\vartheta_{ar}^B + \vartheta_{ar}^A)'' + \frac{\Delta\zeta_{\Sigma}}{s} \rho'', \quad (73.37)$$

где  $\Delta\zeta_{\Sigma}$  — поправка, стоящая в формуле (73.36) в квадратных скобках.

Левая часть полученной формулы (73.37) представляет собой средний наклон квазигеоида над референц-эллипсоидом на линии  $AB$ , выраженный в секундах дуги.

Для вычисления высот квазигеоида необходимо знать высоту его относительно референц-эллипсоида в одной из точек. Эта высота определяется обычно в начальном пункте триангуляции способом, описанным в главе XIII. Далее, определяя разности высот между последовательно расположенными точками квазигеоида по формуле (73.36), получают профиль его поверхности относительно поверхности референц-эллипсоида. Имея ряд таких профилей, составляют карту высот квазигеоида.

Остановимся на зависимости между изменениями высот квазигеоида (или геоида) и уклонений отвесных линий.

На рис. 145 изображена гора в виде равнобедренного треугольника. Избыток массы, обусловленный наличием горы, очевидно, вызовет уклонения отвесных линий по направлению к горе. Поверхность эллипсоида и нормали к ней изображены сплошными линиями, а пунктиром показан профиль квазигеоида (или геоида) и направления отвесных линий. В точках  $a$  и  $e$ , достаточно удаленных от горы, влияние ее массы не ощущается, поэтому в данных точках нормаль совпадает с отвесной линией. Ближе к горе отвесные линии начинают

уклоняться, в результате чего поверхность квазигеоида отступает от поверхности эллипсоида; у подножия горы изменение кривизны его сечения происходит наиболее сильно, этому соответствуют значительные отклонения отвесных линий в точках *b* и *d*. Отступление квазигеоида от эллипсоида, характеризующееся на рис. 145 отрезком  $cc_1$ , может быть невелико, но этому малому отступлению могут соответствовать большие отклонения отвесных линий.

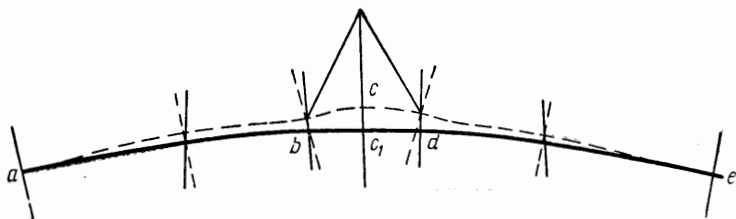


Рис. 145

И, наоборот, в точке *c*, являющейся вершиной волны квазигеоида, направление отвесной линии совпадает с нормалью к поверхности эллипсоида. Таким образом, приходим к выводу, что малые отступления квазигеоида от эллипсоида могут вызвать большие отклонения отвесных линий и, наоборот, большие отступления квазигеоида от эллипсоида могут не вызывать заметных отклонений отвеса.

Существенны характер и закономерности отступлений квазигеоида или геоида от поверхности эллипсоида, конечно, при правильно подобранных его

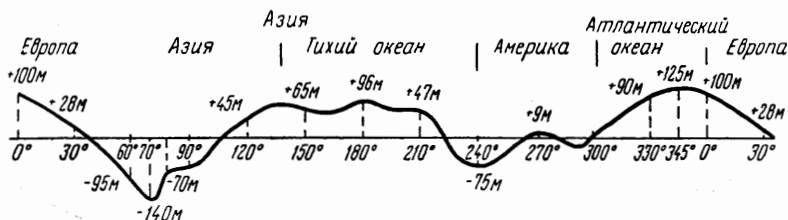


Рис. 146

размерах и ориентировке. Выше отмечено, что общие очертания фигуры квазигеоида не совпадают с общим рельефом земной поверхности. Возникает вопрос, каков все же характер отступлений квазигеоида или геоида от эллипсоида? Не существует ли крупных волн геоида? Немецкий геодезист Гельмерт в 90-х годах прошлого столетия пришел к выводу, что общих отступлений геоида от эллипсоида не существует. Несколько раньше профессор Московского университета Ф. А. Слудский пришел к противоположному заключению: он указывал на существование общих, систематических отступлений геоида от эллипсоида. По исследованиям Ф. А. Слудского, повышения геоида над эллипсоидом происходят в океанах, а понижения — на материках. Позднейшие исследования подтвердили выводы русского ученого: сейчас доказано существование общих громадных волн геоида, охватывающих целые континенты и океаны, отступлениям геоида от эллипсоида сопутствуют общие систематические отклонения отвесных линий. Характерно для отступлений геоида от эллипсоида медленное

их изменение на огромных расстояниях, исчисляемых в тысячах километров. Поверхность геоида, изменяя свою кривизну по различным сечениям, в с ю д у о с т а е т с я в ы п у к л о й. Наибольшие отклонения геоида от эллипсоида около 150 м. На рис. 146 приведен профиль геоида, экстраполированный на земной экватор. На рис. 147 показано существование больших волн геоида, изменяющихся по долготе. Окружность изображает экватор земного эллипсоида. Отложим от точек экватора под соответствующими долготами величины отклонений геоида от эллипсоида и соединим плавной кривой, которая будет сечением геоида по экватору \*. Из рис. 147 следует, что в общем эта кривая приближается к эллипсу. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что фигурой Земли, наиболее приближающейся к геоиду (квазигеоиду), является трехосный эллипсоид, а не эллипсоид вращения. Долгота большой оси экваториального эллипса равна приблизительно  $0^\circ$ , разность большой и малой полуосей этого эллипса приближенно может быть получена по максимальным положительным и отрицательным отклонениям геоида от эллипсоида, т. е.

$$\frac{140 + 125 + 96 + 75}{2} = 218 \text{ м.}$$

Соответствующее этой разности сжатие экваториального эллипса  $i$  будет

$$i = \frac{a-b}{a} = \frac{218}{6\,378\,000} \approx \frac{1}{30\,000}.$$

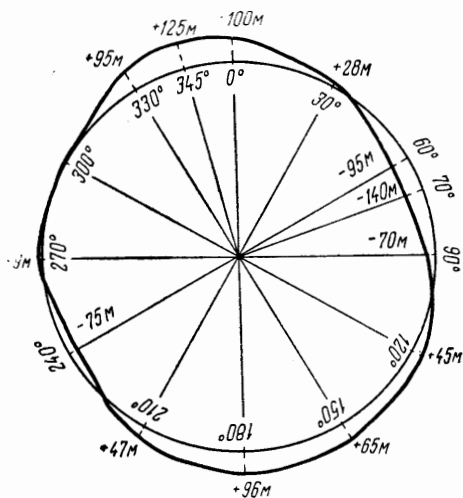


Рис. 147

Укажем, что вывод размеров эллипсоида Красовского сделан с учетом эллиптичности экватора, причем была принята долгота наибольшего меридиана  $10^\circ$  и  $i = 1 : 30\,000$  (эти данные приняты на основании соответствующей обработки материалов градусных измерений).

Кроме указанных о б щ и х б о л ь ш и х волн геоида, которые вызваны причинами, сказывающимися во всех точках земного шара, существуют мелкие волны геоида (или квазигеоида). Они вызваны местными причинами, действие которых ограничено небольшой областью. Этими местными причинами могут быть горные хребты, резкое падение рельефа в береговой полосе и т. д. Местные отступления геоида являются малыми, но вследствие большого изменения кривизны уровенной поверхности они могут вызывать большие уклоны отвесных линий до нескольких десятков секунд. Примеров этому много, приведем некоторые из них. На Западном Кавказе уклоны  $\xi$  по меридиану на расстоянии около 300 км изменяются от  $+27$  до  $-20''$ . На меридианном профиле около г. Орджоникидзе уклоны  $\xi$  колеблются в пределах от  $+35$  до  $-18''$  на расстоянии около 50 км; разность уклонов на таком сравнительно малом расстоянии доходит до  $53''$ . В районе озера Байкал разности уклонов отвесных линий отдельных пунктов, расположенных на разных берегах озера (60 км),

\* То, что профиль геоида на рис. 147 не везде выпуклый, не противоречит сказанному выше, а объясняется неравенством горизонтального и вертикального масштабов.



достигают 40" и т. д. Приведенные примеры связаны с резкими изменениями формы рельефа Земли. Но наблюдаются значительные изменения уклонов отвесных линий и при совершенно ровном и спокойном рельефе. Ярким примером может служить так называемая «местная московская аттракция», установленная профессором б. Межевого института Б. Я. Швейцером в 60-х годах прошлого столетия. Ниже приводятся значения уклонов  $\xi$ , определенных на меридиане, проходящем через колокольню Ивана Великого московского Кремля:

Троицкое, к северу на 21 км, \*  $\xi = 0,6''$

Останкино, к северу на 8 км,  $\xi = 5,1$

Колокольня Ивана Великого,  $\xi = 7,5$

Коломенское, к югу на 9 км,  $\xi = 0,0$

Суханово, к югу на 25 км,  $\xi = +8,1$

Матвеевское, к югу на 47 км,  $\xi = 0,0$

---

\* Имеется в виду от колокольни Ивана Великого.

На обсерватории Государственного астрономического института им. Штернберга (ГАИШ) в Москве, на Красной Пресне, отклонение отвеса по меридиану  $\xi = -10,6''$ , а для Ленино (б. Царицыно), расположенного на том же меридиане,  $\xi = 0$ .

Таким образом, изменения уклонов отвесных линий на меридиане, проходящем через колокольню Ивана Великого, достигают 15,6" на протяжении 25 км, а на меридиане старой обсерватории ГАИШ отклонение изменяется на 10,6" на протяжении 14 км. Подобные большие колебания уклонов отвесных линий — результат изменений в плотностях пород, расположенных ниже поверхности Земли.

Из этого примера следует, что спокойный и равнинный рельеф местности может также сопровождаться большими отклонениями отвесных линий.

## Глава XII

### РЕДУКЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА

#### § 74. Общие сведения

Под р е д у к ц и о н н о й п р о б л е м о й в высшей геодезии условимся понимать совокупность задач по переходу от непосредственно измеренных величин на поверхности Земли к соответствующим им величинам на поверхности относимости — обычно на поверхности принятого референц-эллипсоида.

В отдельных случаях может возникать и обратная задача: переход от известных величин на поверхности относимости на какую-либо другую поверхность и, в частности, на земную. По существу, если известны необходимые исходные данные, нет различий между прямой и обратной задачами.

Редуцирование непосредственных измерений на поверхность эллипсоида необходимо для того, чтобы иметь возможность выполнить совместную математическую обработку результатов измерений, пользуясь свойствами и геометрическими зависимостями, существующими между элементами поверхности эллипсоида. Эта математическая обработка включает: уравнивательные вычисления с целью получения вероятнейших значений уравниваемых величин, решение различного рода математических задач по определению необходимых для практики функций величин, измеряемых непосредственно. Примером таких задач могут служить: решение сферических и сфероидических треугольников, вычисление площадей, геодезических координат пунктов и т. п.

Условимся, что поверхность, на которую должны редуцироваться непосредственные измерения, известна, т. е. заранее определена; определено также и положение этой поверхности в теле Земли.

Математически не имеет значения, какая поверхность и, если говорить об эллипсоиде, какие его размеры приняты в качестве поверхности относимости; но практически важно, чтобы поверхность относимости имела наименьшие отступления от реальной Земли и была, по возможности, параллельна уровненным поверхностям реальной Земли. Тогда вычисленные на поверхности относимости величины будут мало отличаться от их значений на земной поверхности. При малости расхождений между обеими поверхностями будут меньше (по числовой величине) и редукции. Это весьма существенно, так как при малости редуций упрощаются выводы формул, облегчаются практические вычисления; исходные аргументы для вычисления редуций могут определяться менее точно.

Заметим попутно, что редуцирование непосредственно измеренных величин на поверхность эллипсоида является способом упрощения вычислений, позволяющим уменьшить число независимых аргументов с трех ( $B, L, H$ ) до двух ( $B, L$ ). Можно построить теорию вычислений геодезических сетей, выражая положение каждой точки функцией трех координат ( $B, L$  и  $H$ ) или прямоугольных пространственных координат ( $X, Y, Z$ ). Тогда необходимость решения большинства редуционных задач отпала бы, но зато уравнивательные вычисления и решение различных вычислительных геодезических задач существенно усложнились бы. Поэтому проще и удобнее производить редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида и выполнять последующую математическую обработку результатов измерений на этой поверхности, особенно при малых по сравнению с радиусом Земли величинах  $H$  — геодезических высот.

К решению редукционных задач, составляющих в совокупности редукционную проблему, предъявляются некоторые общие требования. Они вытекают из условия сохранения в редуцированных величинах той же точности, которая была достигнута в непосредственных измерениях. Следовательно, ошибки редукций и их влияние должны быть меньше в пять — десять раз ошибок самих измерений.

Для этого необходимо знать с достаточной точностью величины, характеризующие отступления реальной Земли от принятой поверхности относимости, т. е. аргументы для вычисления соответствующих редукций: высоты точек поверхности Земли, отклонения отвесных линий, аномалии силы тяжести. Эти величины должны определяться только по результатам измерений, но не на основе каких-либо гипотетических данных. Без этого соответствующие редукционные задачи не могут решаться точно. Выполнение этого условия представляло серьезную проблему. До исследований Молоденского мы не имели метода строгого определения указанных величин. Существовавшие ранее методы либо были практически невыполнимы, либо основывались на привлечении данных о плотности и строении Земли, которые с необходимой достоверностью неизвестны и до настоящего времени. И сейчас по поводу определения тех или иных величин можно высказать пожелания о необходимости повышения точности, но это следствие не слабой разработки теории, а результат незавершенности или неполноценности выполненных на Земле измерений (например, незавершенности мировой гравиметрической съемки, несвязанности геодезических сетей разных континентов, малой плотности гравиметрической съемки в горных районах и т. п.).

Выше приведены основы теории и соответствующие формулы, определяющие исходные величины, необходимые для точного вычисления редукций. Поэтому будем считать исходные величины для редуцирования с необходимой точностью известными.

При получении формул для вычисления редукций необходимо обеспечивать их точность, которая должна соответствовать точности непосредственных измерений. При этом ошибки в значениях редукций, вызванные неточностью формул, должны быть практически пренебрегаемыми по сравнению с ошибками измерений. При этом важно учитывать и характер (систематический или случайный) влияния ошибок редукций на редуцированные элементы геодезической сети.

Если влияние редукций, пренебрегаемо малое для единичного редуцирования какой-либо величины, вносит систематические искажения в геодезическую сеть в целом, то решение об учете редукций данного вида должно быть сделано с учетом этого обстоятельства. Например, поправка в направление за высоту наблюдаемого пункта для отдельного направления обычно пренебрегаемо мала, но для геодезического ряда, у которого стороны имеют примерно одинаковый азимут, эта редукция будет иметь один знак. Поэтому пренебрежение этой редукцией будет равносильно действию систематической ошибки, влияние которой в целом может быть заметным. Поэтому указанная редукция в триангуляции 1 класса почти всегда должна учитываться.

Существуют два метода редуцирования результатов непосредственных измерений на поверхность референц-эллипсоида — метод проектирования и метод развертывания.

По методу проектирования непосредственно измеренные величины математически редуцируются точно с поверхности Земли на поверхность эллипсоида. Редукции за переход от непосредственно измеренных величин

к их проекциям вычисляют по формулам, выражающим указанные поправки в функции величин, определяющих взаимное положение земной поверхности и поверхности референц-эллипсоида, т. е. геодезических высот и уклонов отвесных линий.

Длины измеренных базисов проектируются на поверхность референц-эллипсоида нормалью к нему. В измеренные направления вводятся поправки за уклоны отвесных линий относительно нормалей к эллипсоиду. При вычислении поправки за высоту наблюдаемой точки принимают расстояние от объекта визирования до поверхности эллипсоида по нормали к нему и т. д.

По методу развешивания непосредственно измеренные величины редуцируются на поверхность геоида. В этом случае редукции вычисляются в функции величин, определяющих взаимное положение земной поверхности и геоида. Так, например, при редукции длин измеренных базисов вносят поправки за высоты, отсчитанные от уровня моря, т. е. от геоида, причем редукция производится по нормальям к последнему, т. е. при помощи направлений отвесных линий. В измеренные углы никаких поправок не вводится.

Редуцированные на поверхность геоида геодезические величины считаются как бы редуцированными на поверхность референц-эллипсоида; иначе говоря, при методе развешивания пренебрегают несовпадением геоида с референц-эллипсоидом. Исследования показывают, что отступления геоида даже от наилучше выбранного референц-эллипсоида могут достигать 150 м. Отсюда легко сделать вывод, что пренебрегать несовпадением геоида и референц-эллипсоида нельзя.

Геометрически метод развешивания можно представить так: редуцированные на поверхность геоида величины как бы укладываются, развешиваются на другой поверхности — поверхности эллипсоида, откуда и возникло название метода.

Сравнение обоих методов редуцирования позволяет сделать следующие общие выводы.

1. Метод проектирования — строгий метод перехода от измеренных геодезических величин к их проекциям на поверхность референц-эллипсоида, сохраняющий взаимное положение точек земной поверхности и создающий возможность строгой обработки сколь угодно обширной астрономо-геодезической сети. Для применения этого метода необходимо предварительно установить размеры референц-эллипсоида и его ориентировки в теле Земли.

При этом не требуется использования наилучше установленного референц-эллипсоида. Принципиально метод обеспечивает возможность строгой математической обработки и при значительных отклонениях референц-эллипсоида от наиболее подходящего эллипсоида, но из практических соображений, указанных в начале настоящего параграфа, необходимо, чтобы референц-эллипсоид был лишь достаточно близок к наилучше подходящему эллипсоиду.

2. Метод развешивания — нестрогий метод; его применение вызывает искажения (систематического характера) элементов астрономо-геодезических сетей при их обработке, вызванные приближенностью результатов решения редукционных задач. Величина этих искажений зависит от размера астрономо-геодезической сети и ошибочности принятых при вычислениях параметров референц-эллипсоида. Для достижения возможно точных результатов обработки материалов астрономо-геодезической сети при методе развешивания необходимо, чтобы референц-эллипсоид в пределах астрономо-геодезической

сети был наилучшим подходящим к геоиду. Однако и в этом случае искажения уменьшаются, но не исчезнут, так как останутся влияния отступлений геоида от этого эллипсоида. Таким образом, для вполне точной математической обработки обширных астрономо-геодезических сетей метод развертывания непригоден.

Точное редуцирование измеренных величин на поверхность геоида требует знания плотностей Земли вне геоида; эти данные неизвестны, поэтому, строго говоря, точное редуцирование на геоид невозможно. Впрочем, ошибки, возникающие вследствие приближенности решения этой задачи, будут несравненно меньше искажений, обусловленных нестрогостью метода развертывания.

Из изложенного следует, что для обработки астрономо-геодезических сетей следует применять метод проектирования, что и осуществляется в СССР в настоящее время.

### § 75. Редукция базиса на поверхность референц-эллипсоида

Пусть на земной поверхности измерен базис между точками  $A$  и  $B$  (рис. 148). Наша задача — определить его проекцию на поверхность референц-эллипсоида нормальными к последнему в конечных точках базиса.

Если  $AA_1$  и  $BB_1$  — нормали к референц-эллипсоиду, то требуется найти длину кривой  $A_1B_1$  как дуги нормального сечения поверхности эллипсоида, имеющего азимут  $A$ .

Возьмем некоторый малый отрезок измеренного базиса  $dl$  (рис. 149),

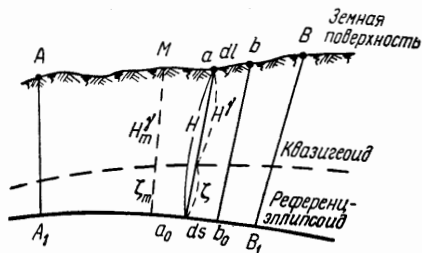


Рис. 148

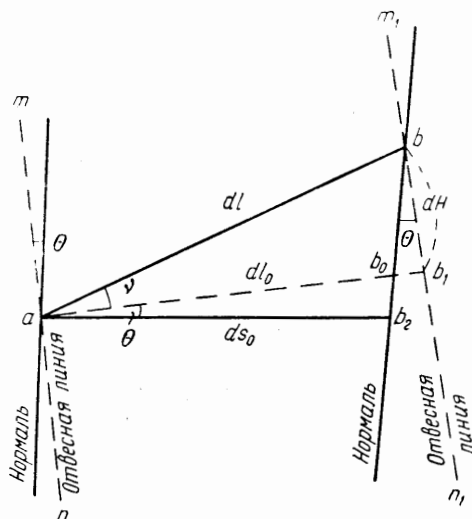


Рис. 149

за который примем один пролет, равный длине инварной проволоки (24-метровой), и поставим себе целью найти его проекцию на референц-эллипсоид.

Искомая редукция этого отрезка составит из трех слагаемых редукций: а) за переход к проекции отрезка на уровенную поверхность горизонта инструмента (поправка за приведение к горизонту); б) за непараллельность уровенной поверхности горизонта инструмента и поверхности эллипсоида; в) за высоту базиса над референц-эллипсоидом.

На рис. 149:

- $dl$  — длина непосредственно измеренного отрезка  $ab$ ;
- $dl_0$  — проекция отрезка  $dl$  на уровенную поверхность, проходящую через точку  $a$ , т. е. горизонт инструмента; отрезок  $dl_0$  перпендикулярен направлениям отвесных линий  $tn$  и  $t_1n_1$ ;

$ds_0$  — проекция отрезка  $dl$  на кривую  $ab_2$ , параллельную нормальному сечению поверхности эллипсоида в плоскости базиса;

$\nu$  — угол наклона отрезка  $dl$  к горизонту точки  $a$ ;

$\Theta$  — относительное уклонение отвесной линии в вертикальной плоскости базиса;

$dH$  — превышение одного конца пролета над другим, получаемое из нивелирования целиков.

Из рис. 149 непосредственно следует, что

$$dl_0 = dl \cos \nu \quad (75.1)$$

$$ds_0 = dl_0 - \Theta dH. \quad (75.2)$$

Для получения проекции отрезка  $dl$  на поверхность референц-эллипсоида, т. е.  $ds$ , обратимся к рис. 150, из которого

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\rho_A}{\rho_A + H}. \quad (75.3)$$

где  $\rho_A$  — радиус кривизны нормального сечения  $a_0b_0$ , вычисляемый по формуле (6.8), и  $H = H^\nu + \xi$ .

Составим производную пропорцию

$$\frac{ds_0 - ds}{ds_0} = \frac{H}{\rho_A + H}. \quad (75.4)$$

Далее

$$ds_0 - ds = \frac{H}{\rho_A + H} ds_0 = \frac{H}{\rho_A \left(1 + \frac{H}{\rho_A}\right)} ds_0 = \frac{H}{\rho_A} ds_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} ds_0. \quad (75.5)$$

Заменяя  $ds_0$  в (75.5) через его выражение (75.2) и пренебрегая малыми величинами третьего элемента, получаем

$$dl_0 - \Theta dH - ds = \frac{H}{\rho_A} dl_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} dl_0, \quad (75.6)$$

откуда, принимая во внимание (75.1),

$$ds = dl \cos \nu - \frac{H}{\rho_A} dl_0 + \frac{H^2}{\rho_A^2} dl_0 - \Theta dH_{изм}, \quad (75.7)$$

$$s = \int ds. \quad (75.8)$$

Учитывая требования, предъявляемые к профилю базиса, значения  $H$  можно заменить средним значением высоты базиса  $H_m$ .

Тогда (75.8) окончательно примет вид

$$s = l_0 + \frac{H_m}{\rho_A} l_0 + \frac{H_m^2}{\rho_A^2} l_0 - \int_{AB} \Theta dH. \quad (75.9)$$

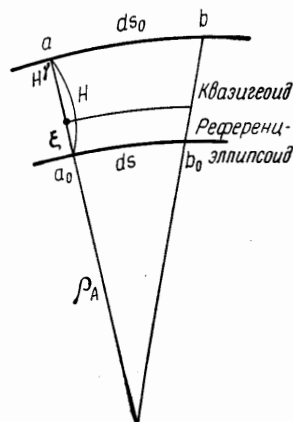


Рис. 150

Для расчета требуемой точности определения  $H$  из (75.9) напомним

$$\frac{\Delta s}{l_0} = \frac{\Delta H}{\rho_A}.$$

Для того чтобы относительная ошибка редукции базиса на поверхность референц-эллипсоида была меньше  $1 : 2\,000\,000$ , необходимо, чтобы

$$\Delta H = \Delta H^* + \Delta \zeta$$

было меньше трех метров.

## § 76. Поправка в измеренные горизонтальные направления за высоту наблюдаемых пунктов

Эта поправка вытекает из геометрических соображений и обусловлена высотой точки визирования  $H$  над референц-эллипсоидом.

Пусть с пункта  $A$  (рис. 151) наблюдается предмет  $B$ , имеющий геодезическую высоту  $H_2$  над поверхностью эллипсоида; пусть  $a$  и  $b$  — проекции точек  $A$  и  $B$  на поверхность эллипсоида. Если бы точка  $B$  находилась непосредственно на поверхности эллипсоида ( $H_2 = 0$ ), т. е. в точке  $b$ , то азимут направления  $ab$ , который обозначим  $A_{ист}$ , был бы равен углу между плоскостью меридиана  $Ran_a$  и плоскостью, проходящей через точки  $a, b, n_a$ . Однако благодаря тому, что наблюдаемый предмет  $B$  не находится на поверхности эллипсоида, а расположен на высоте  $H_2$ , визирная плоскость при наведении на предмет  $B$  займет положение  $ABb'n_a$ . Измеренный азимут направления  $AB$  будет равен углу между плоскостью меридиана  $AaPn_a$  и плоскостью  $AaBb'n_a$ . Обозначим его  $A_{изм}$ . Таким образом, малый угол  $bab'$ , равный  $A_{ист} - A_{изм}$ , будет выражать погрешность в направлении  $AB$ , обусловленную несовпадением визирных плоскостей, проходящих через действительный объект визирования — точку  $B$  и через проекцию этой точки на эллипсоид по нормали  $b$ .

Чтобы от измеренного на земной поверхности направления  $AB$  перейти к проекции этого направления  $ab$  на поверхности эллипсоида, необходимо ввести в измеренное направление поправку  $\delta$

$$\delta = A_{ист} - A_{изм}. \quad (76.1)$$

Из (15.4) напомним

$$n_a n_b = ae^2 (B_2 - B_1) \cos B_m. \quad (76.2)$$

Согласно (26.37), приближенно

$$B_2 - B_1 = \frac{s \cos A_{1.2}}{M_m}; \quad (76.3)$$

следовательно,

$$n_a n_b = ae^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos B_m, \quad (76.4)$$

где  $s$  — длина дуги  $ab$ .

Опустив из  $n_a$  перпендикуляр  $n_a R$  на нормаль в точке  $B$ , будем иметь

$$R n_a = n_a n_b \cos B_2 \quad (76.5)$$

или

$$R n_a = a e^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2, \quad (76.6)$$

где  $B_m$  заменили через  $B_2$  ввиду малой величины искомой поправки.

Определим угол  $n_b B n_a$ , который обозначим через  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{a e^2 s \cos A_{1.2} \cos^2 B_2}{M_m B R}, \quad (76.7)$$

или, полагая  $BR \approx a$ ,

$$\alpha = e^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2. \quad (76.8)$$

Зная угол  $\alpha$  и высоту  $H_2$ , определяем дугу  $bb_1$

$$bb_1 = H_2 e^2 \frac{s}{M_m} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2. \quad (76.9)$$

Из треугольника  $bb'a$ , в котором угол при точке  $b$  равен  $A_{2.1} - 180^\circ$  находим искомую поправку  $\delta$

$$\frac{\sin \delta}{\sin (A_{2.1} - 180^\circ)} = \frac{bb'}{s}. \quad (76.10)$$

Отсюда

$$\delta'' = \frac{H}{M_m} e^2 \rho'' \sin A_{1.2} \cos A_{1.2} \cos^2 B_2, \quad (76.11)$$

где положено, что

$$\sin (A_{2.1} - 180^\circ) = \sin A_{1.2}.$$

Окончательно имеем

$$\delta'' = H_2 [1]_m \frac{e^2}{2} \sin 2A_{1.2} \cos^2 B_2. \quad (76.12)$$

Геодезическая высота  $H$  по-прежнему вычисляется по формуле  $H = H^\gamma + \zeta$ .

Если  $B_2 = 45^\circ$ , то

$$\text{при } H_2 = 1000 \text{ м} \quad \delta \leq 0,05'',$$

$$\text{при } H_2 = 200 \text{ м} \quad \delta \leq 0,008''.$$

Отсюда следует, что данной поправкой нельзя пренебрегать, особенно в всхолмленных и горных районах; она, как правило, должна учитываться при вычислении направлений в триангуляции 1 и 2 классов.

Из формулы (76.12) следует, что поправка за высоту наблюдаемой точки не зависит от расстояния  $s$  между пунктами  $A$  и  $B$ . Следовательно, эта поправка подлежит учету при развитии точной триангуляции независимо от расстояния между пунктами.

## § 77. Редукция измеренных горизонтальных направлений при переходе к поверхности референц-эллипсоида

Формула для вычисления настоящей редукции получена при выводе уравнения Лапласа (см. § 67).

Она имеет вид

$$\Delta M = \frac{u \sin (A - \Theta)}{\operatorname{tg} z} = \frac{\eta \cos A - \xi \sin A}{\operatorname{tg} z}. \quad (77.1)$$



Поясним геометрический смысл этой редукции.

Непосредственно измеренный угол на земной поверхности определяется двугранным углом, ребром которого является линия, совпадающая с вертикальной осью инструмента, т. е. отвесная линия. Угол в соответствующей точке на поверхности эллипсоида измеряется двугранным углом, гранями которого служат нормальные плоскости, а ребром — нормаль к поверхности эллипсоида. Угол между отвесной линией и нормалью, т. е. уклонение отвесной линии, вызывает необходимость введения в измеренные направления рассматриваемой редукции.

Эта редукция аналогична поправке за наклон  $J$  горизонтальной оси теодолита  $x = \frac{I}{\text{tg } z}$ ; очевидно, в этом случае  $J$  соответствует величине  $(\eta \cos A - \xi \sin A)$ .

Числовое значение редукции  $\Delta M$  мало, оно выражается обычно в сотых долях секунды. Если положить уклонение отвесной линии  $u = 10''$ ,  $\sin(A - \Theta) = 1$  и  $z = 89^\circ 30'$  ( $\text{tg } 89^\circ 30' = 120$ ), то  $\Delta M = 0,08''$ , т. е. на порядок меньше ошибки измерения направления ( $0,6-0,7''$ ).

Следовательно, при небольших углах наклона и средних по величине уклонениях отвесной линии этой редукцией, казалось бы, можно пренебречь. Так следует поступать и при учете редукций в одиночные направления, например при вычислении азимута Лапласа на отдельных пунктах. Но в измеренные горизонтальные направления триангуляционных рядов 1 класса (или полигонометрии 1 класса) рассматриваемая редукция, как правило, должна вводиться, так как накопление влияния ее может носить систематический характер. В этом случае пренебрежение настоящей редукцией заметно скажется на точности вычисления элементов ряда (в первую очередь на величине ошибки в азимутах направлений сторон и поперечном сдвиге ряда). При этом неудачно установленные размеры эллипсоида и его ориентировка вызовут постоянную систематическую часть в уклонениях отвесных линий. Но даже если размеры эллипсоида и его ориентировка установлены достаточно правильно, приходится иметь в виду, что отступления эллипсоида от геоида (или квазигеоида), вызывающие уклонения отвеса, носят двойкий характер: отступления местные, случайные и отступления, охватывающие значительную площадь и характеризующие собой крупные волны квазигеоида относительно референц-эллипсоида. Эти крупные волны квазигеоида будут обуславливать в редукциях систематическую часть, пренебрегать которой нельзя.

Поэтому рассматриваемая редукция  $\Delta M$ , вычисляемая по формуле (77.1), вводится в направления в триангуляции 1 класса.

В горных районах, где уклонения отвесной линии достигают нескольких десятков секунд, а зенитные расстояния могут иметь значительные отклонения от  $90^\circ$ , учет этой редукции должен быть особо тщательным. В частности, в таких районах редукции рассматриваемого вида должны вводиться и в измеренные направления с пунктов триангуляции 2 класса.

## § 78. Редукции, вызываемые кривизной силовой линии

По ходу изложения вопросов, рассмотренных выше, влияние кривизны силовой линии на результаты непосредственных измерений, выполненных на поверхности Земли, уже показано.

Не повторяя доказательств, изложим для полноты картины основные выводы.

1. Силовая линия — кривая двойкой кривизны, однако изложенная выше

теория решения основных задач высшей геодезии требует учета кривизны силовой линии в нормальном поле силы тяжести, т. е. как плоской кривой, расположенной в плоскости меридиана.

## 2. Практически пренебрегаемы:

а) разность длины силовой линии, как кривой от данной точки  $M$  до поверхности эллипсоида и геодезической высоты  $H$ ;

б) различие между напряжениями силы тяжести по касательной к силовой линии (отвесной линии) и направлению нормали к эллипсоиду;

в) различие между направлениями нормалей к поверхности эллипсоида, проведенных из точки с высотой  $H$  и из точки пересечения силовой линией поверхности эллипсоида.

Кривизну силовой линии практически необходимо учитывать при вычислении слагающей уклонения отвеса в меридиане из сравнения астрономической и геодезической широт путем введения поправки  $-0,171''$ ,  $H \sin 2B$ .

Тогда

$$\xi = \varphi - B - 0,171'' H \sin 2B. \quad (78.1)$$

## § 79. О редукциях силы тяжести

При решении задач высшей геодезии на основе теории Молоденского возникает по существу одна редукционная задача по переносу нормального значения силы тяжести по нормали во внешнем пространстве относительно притягивающих масс — это редукция в свободном воздухе, вычисляемая просто по формуле (см. § 61)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} H = -0,308 H \text{ мЛг.} \quad (79.1)$$

До появления работ Молоденского по изучению фигуры Земли и ее внешнего гравитационного поля редукционная проблема гравиметрии была одной из труднейших, не получившей и до настоящего времени точного решения. При прежних взглядах на задачу изучения фигуры Земли как на изучение геоида возникала необходимость редуцирования силы тяжести с поверхности Земли на геоид, т. е. через пространство, занятое притягивающими массами. Кроме того, при применении теории Стокса для определения фигуры геоида должно быть выполнено условие — отсутствие притягивающих масс вне поверхности геоида. Это требование ставило задачу так называемой регуляризации Земли, т. е. удаления внешних масс, но без нарушения физических параметров реальной Земли — ее массы, фигуры, центра тяжести и вообще внешнего реального гравитационного поля. Эта задача точно не решена и до сих пор, так как она требует знания плотностей всех внешних масс по отношению к геоиду. Попытки решения задачи по определению геоида без регуляризации Земли на основе только выполненных измерений также не привели к положительному результату, так как требовались дополнительные сведения о внутреннем гравитационном поле Земли.

Теория Молоденского полностью освобождает от необходимости решения редукционной задачи в описанном плане; в этом, в частности, ее важное научное и практическое достоинство. Изложенная в общем виде прежняя постановка редукционной проблемы гравиметрии для геодезии сейчас не представляет практического интереса. Понятие о ней приводится для сведения, как об одном из трудных рубежей в истории развития науки, который преодолен школой советских геодезистов.

## § 80. Редукционная задача при линейных измерениях свето- и радиогодезическими приборами

Характерная особенность измерения расстояний свето- и радиогодезическими приборами заключается в том, что расстояние между заданными точками измеряют непосредственно, а не путем измерения и суммирования отдельных отрезков измеряемой линии \*. Кроме того, расстояния между заданными точками определяют безотносительно какой-либо уровенной поверхности. Иначе говоря, измеренные свето- и радиогодезическими приборами расстояния, или как еще их называют, «наклонные дальности», в процессе измерения не связаны с направлениями отвесной линии

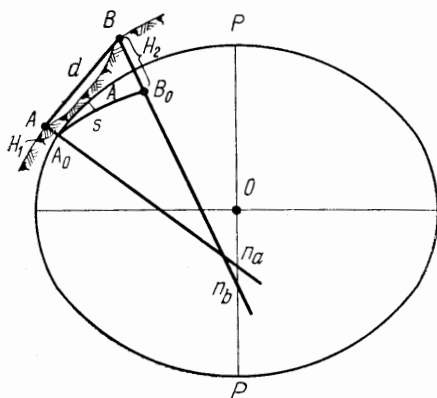


Рис. 152

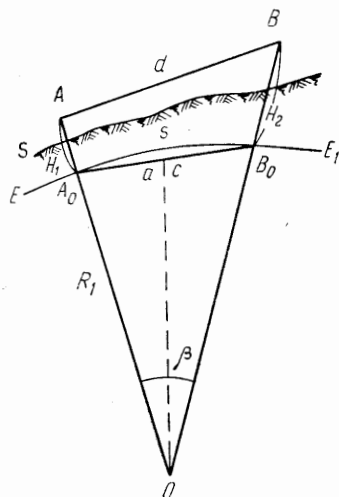


Рис. 153

(в отличие от измерений базисными приборами старого типа, когда длина каждого пролета приводится к соответствующей уровенной поверхности). Поэтому для редуцирования непосредственно измеренных свето- и радиодальномерами расстояний на поверхность референц-эллипсоида необходимы дополнительные данные. Пусть, например, измерено расстояние  $d$  между точками  $A$  и  $B$  (рис. 152). Из простых геометрических соображений следует, что для перехода от измеренной наклонной дальности  $d$  к геодезической линии  $s$  между точками  $A_0$  и  $B_0$  — проекциями точек  $A$  и  $B$  на эллипсоид — необходимо дополнительно знать геодезические высоты этих точек  $H_1$  и  $H_2$  и, кроме того, приближенно широту одной точки и азимут  $A$  направления  $AB$ . Эти дополнительные данные должны быть получены заранее из других видов геодезических измерений. Таким образом, редуциционная задача сводится к вычислению разности  $(d - s)$ , определяемой из геометрической зависимости.

Как известно, в настоящее время свето- и радиогодезические приборы для измерения расстояний подразделяются по классу точности и дальности действия на два основных типа:

- а) светодальномеры и радиодальномеры,
- б) радиогодезические системы (РГС).

\* Предполагается, что все поправки, как инструментального характера, так и за влияние внешней среды, введены; измеренные расстояния — прямые.

Светодальномерами и радиодальномерами измеряют длины базисов, исходных сторон триангуляции, сторон полигонометрических ходов и сторон трилатерации.

Наивысшая реальная точность измерений расстояний этими инструментами, характеризуется ошибкой порядка  $1 : 400\,000$ . Указанная точность измерений достигается при расстояниях порядка  $15\text{--}40$  км, типичных в геодезических работах высокой точности. В этом случае на основании выводов § 15 и 16 длину геодезической линии можно не различать от длины окружности, поэтому редукционная задача заключается в нахождении поправки за переход от измеренного расстояния к его проекции на сферическую поверхность надлежаще взятого радиуса.

С применением радиогеодезических систем можно измерять расстояния до  $600\text{--}900$  км, однако относительная ошибка таких измерений примерно на порядок больше, чем при измерении расстояний светодальномерами и радиодальномерами не менее  $1 : 50\,000\text{--}1 : 100\,000$ . При измерении значительно более коротких расстояний ( $50\text{--}100$  км и меньше) относительная ошибка измерений расстояний при помощи РГС становится столь значительной, что этот вид измерений выходит из класса точных геодезических измерений. Поэтому редукционная задача при радиогеодезических измерениях решается простейшим путем: или совсем не вводится поправка рассматриваемого вида (при малых величинах измеряемых расстояний и незначительных высотах конечных точек), или вычисляется поправка как и при измерении светодальномерами и радиодальномерами, принимая Землю за сферу соответствующе установленного радиуса.

С учетом изложенного получим выражение для редукции измеренной наклонной дальности на сферу радиуса  $R$ .

Пусть  $S$  — земная поверхность (рис. 153),  $EE_1$  — поверхность сферы радиуса  $R$ . Высоты конечных точек измеряемого расстояния  $A$  и  $B$  над поверхностью эллипсоида по-прежнему обозначим через  $H_1$  и  $H_2$ .

Из треугольника  $ABO$  имеем

$$d^2 = (R_1 + H_1)^2 + (R_1 + H_2)^2 - 2(R_1 + H_1)(R_1 + H_2) \cos \beta. \quad (80.1)$$

Выразим угол  $\beta$  при центре сферы из решения треугольника  $A_0B_0O$ , т. е.

$$\begin{aligned} c^2 &= 2R_1^2 - 2R_1^2 \cos \beta, \\ \cos \beta &= \frac{2R_1^2 - c^2}{2R_1^2}, \end{aligned} \quad (80.2)$$

где  $c$  — длина хорды  $A_0B_0$ .

После подстановки (80.2) в (80.1) и простых преобразований получим

$$c = \sqrt{\frac{d^2 - (H_1 - H_2)^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_1}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R_1}\right)}}. \quad (80.3)$$

Из рис. 153 пишем:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{c}{2R_1}, \quad (80.4)$$

$$s = 2R \arcsin \frac{c}{2R_1}, \quad (80.5)$$

$$s = c + \frac{c^3}{24R_1^2} + \frac{3c^5}{640R_1^4}. \quad (80.6)$$

Формулы (80.3) и (80.6) решают задачу.

При редуцировании точно измеренных расстояний, произведенных светодальномерами и радиодальномерами, радиус кривизны  $R_1$  можно вычислить по формуле

$$R_1 = R \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 B \cos 2A \right), \quad (80.7)$$

где  $R$  — средний радиус кривизны.

При сравнительно малых расстояниях ( $d < 15$  км) и средней и малой точности измерений достаточно считать  $R_1 = R$ .

Учитывая все возрастающую точность и дальность действия новых средств линейных геодезических измерений, приводим более точные формулы рассматриваемой редукции.

Обозначим через  $c_{эл}$  длину хорды, соединяющей проекции  $A_0 B_0$  на эллипсоиде вращения. Без вывода напомним

$$c_{эл} = c \left( 1 + \frac{H_m}{N} \eta^2 \cos^2 A + \frac{H_1^2 + H_2^2}{2N^2} \eta^2 \cos^2 A + \frac{H_1 + 2H_2}{2N^2} c \eta^2 \operatorname{tg} B \cos A \right). \quad (80.8)$$

Тогда длина геодезической линии  $s_{эл}$  на поверхности эллипсоида, соединяющей точки  $A_0$  и  $B_0$ , определится

$$s_{эл} = c_{эл} + \frac{c_{эл}^3}{24R^2} + \frac{3c_{эл}^5}{640R^4}, \quad (80.9)$$

где  $R = \sqrt{R_1 R_2}$ ;

$R_1$  и  $R_2$  — средние радиусы кривизны в точках  $A_0$  и  $B_0$ .

## Глава XIII

### ГРАДУСНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

#### § 81. Общие сведения

Под градусными измерениями обычно понимают совокупность астрономических, геодезических и гравиметрических работ, предназначенных для определения фигуры Земли.

Задача градусных измерений заключается в определении:

- 1) параметров референц-эллипсоида как рабочей координатной поверхности, необходимой для решения многих задач геодезии и картографии;
- 2) вспомогательной поверхности — квазигеоида, весьма близкой к поверхности геоида на суше и совпадающей с ней на морях и океанах;
- 3) действительной фигуры Земли, т. е. ее физической поверхности;
- 4) параметров земного эллипсоида, наилучшим образом представляющего фигуру Земли в целом, — общего земного эллипсоида.

При рассмотрении вопросов, составляющих содержание предшествующих глав, считалось, что поверхность референц-эллипсоида определена, т. е. известна. Поэтому в первую очередь здесь рассмотрим решение первой задачи, т. е. вывод параметров референц-эллипсоида.

При оценке выводов параметров референц-эллипсоида обычно принимается во внимание степень близости его к эллипсоиду, наилучшему для всей Земли, т. е. к общему земному эллипсоиду. Это в свою очередь зависит от территории, на которой исполнены астрономо-геодезические и гравиметрические измерения, результаты которых были использованы при выводе параметров референц-эллипсоида. Чем больше территория, на которой произведены градусные измерения определенной густоты, тем больше эллипсоид, выведенный на основе этих измерений, приближается к общему земному эллипсоиду. Поэтому задача определения референц-эллипсоида непосредственно примыкает к задаче определения эллипсоида, наилучшим образом представляющего фигуру Земли в целом.

Изучение поверхности квазигеоида выполняется путем определения аномалий высот  $\zeta$  (или уклонов отвесных линий  $\xi$  и  $\eta$ ) относительно референц-эллипсоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования.

Изучение формы физической земной поверхности осуществляется путем определения нормальных высот  $H^y$  относительно поверхности квазигеоида или геодезических высот  $H$  относительно референц-эллипсоида; для этого, помимо астрономо-гравиметрического нивелирования, необходимо выполнять геометрическое нивелирование.

Методы решения второй и третьей задач изложены в главах X и XI, поэтому будем считать их известными.

Вывод общего земного эллипсоида требует наличия градусных измерений всей поверхности Земли или значительной ее части. Ранее указывалось, что фигура геоида, помимо случайных, местных волн, имеет общие волны, охватывающие территории материков, влияющие на фигуру Земли в целом. Поэтому для решения этой задачи и необходимо градусными измерениями охватить поверхность всех материков. Эти градусные измерения в отдельных и даже крупных частях поверхности Земли должны охватывать возможно большую поверхность земного шара. Водные пространства не

позволяют равномерно покрыть градусными измерениями всю поверхность земного шара, но на морях и океанах могут производиться работы по измерению силы тяжести.

Исследования показывают, что градусные измерения, позволяющие надежно определить размеры большой полуоси, в соединении с гравиметрическими наблюдениями на суше и на море, надежно определяющими сжатие эллипсоида, дают возможность успешно решать задачу определения общего земного эллипсоида. В настоящее время градусными измерениями еще не охвачены все материки, а имеющиеся не связаны между собой; измерения силы тяжести на океанах исполнены не полностью, поэтому вывод общего земного эллипсоида пока еще дело будущего. Современная постановка задачи по выводу общего земного эллипсоида и метод ее решения изложены в § 87.

Установим, какими параметрами определяется референц-эллипсоид. Напомним его определение: референц-эллипсоидом называется эллипсоид с определенными размерами и определенным образом ориентированный (расположенный) в теле Земли.

Размеры эллипсоида определяются двумя параметрами — полуосями  $a$  и  $b$  или большой полуосью  $a$  и сжатием  $\alpha$ .

Ориентирование эллипсоида в теле Земли выполняется путем установления исходных геодезических дат, определяющихся значениями геодезических координат, принимаемых в исходном пункте триангуляции. Эти координаты  $B_0, L_0, A_0, H_0$ , т. е. геодезические широта, долгота, азимут и высота в точке триангуляции, принимаемой за начальную. Они определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0,171'' H_0 \sin 2B_0 \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0 \sec \varphi \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi \\ H_0 &= H^\gamma + \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad (81.1)$$

Таким образом, исходными величинами, позволяющими определить параметры референц-эллипсоида, являются:

$$a, b, \varphi_0, \lambda_0, \alpha_0, H_0^\gamma, \xi_0, \eta_0, \zeta_0.$$

Значения  $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$  определяются непосредственно из астрономических наблюдений; методы этих наблюдений рассматриваются в геодезической астрономии, поэтому будем считать их известными. Нормальная высота  $H^\gamma$  определяется из результатов геометрического нивелирования; методы вычисления нормальных высот изложены в главе XI, § 72. Поэтому в этой главе рассмотрены методы определения величин  $a$  и  $b$  (или  $a$  и  $\alpha$ ), характеризующих размеры земного эллипсоида, и  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  — слагающих уклонений отвесных линий и аномалии высоты в начальном пункте триангуляции, позволяющих по формулам (81.1) перейти к значениям исходных геодезических дат. Тем самым будут определены размеры и ориентировка референц-эллипсоида в теле Земли.

Перечисленные параметры определяются под условием возможной геометрической близости поверхности референц-эллипсоида к поверхности геоида (квазигеоида), так как референц-эллипсоид является вспомогательной или рабочей координатной поверхностью, заменяющей при обработке геодезических измерений уровенную поверхность Земли; поэтому естественно потребовать возможной близости между этими поверхностями.

Математическое условие геометрической близости референц-эллипсоида к уровенной поверхности реальной Земли обычно выражают так:

$$\sum (\xi^2 + \eta^2)_i = \min \quad (81.2)$$

или

$$\sum \xi^2 = \min. \quad (81.3)$$

В выражении (81.2) суммирование распространяется на астрономические пункты, входящие в данную астрономо-геодезическую сеть; в выражении (81.3) — на всю территорию, для которой известны аномалии высоты. При указанном выборе параметров, независимо от их значений, и выполнении зависимостей (81.4) малая ось референц-эллипсоида и плоскость экватора будут всегда параллельны оси вращения Земли и плоскости земного экватора. В общем случае центр референц-эллипсоида не будет совпадать с центром тяжести Земли.

Принципиально возможны два метода определения параметров земного эллипсоида: геометрический, основанный на использовании астрономо-геодезических измерений, и физический, основанный на использовании гравиметрических измерений. Как и при выводе уклонов отвесных линий и высот, наилучшее решение дает совместное использование обоих методов.

При выводе размеров и ориентировки эллипсоида геометрическим методом, т. е. из астрономо-геодезических измерений, различают метод дуг и метод площадей.

Метод дуг основан на использовании измеренных длин дуг на земной поверхности и астрономических определений широт и долгот на концах этих дуг. Определение размеров и ориентировки земного эллипсоида из измерений дуг по меридианам и параллелям называют градусными измерениями по меридиану и градусными измерениями по параллели. Дуги могут быть связаны между собой и не иметь между собой связи. Из результатов определений по методу дуг определяют размеры эллипсоида и ориентировку эллипсоида, наилучше подходящего не к фигуре геоида на какой-либо площади, а наилучше подходящего к профилю геоида по использованным дугам градусных измерений.

Метод дуг был использован в § 50 для пояснения идеи вывода размеров эллипсоида из градусных измерений.

Метод площадей основан на использовании астрономо-геодезической сети, по возможности равномерно покрывающей территорию, притом с некоторой определенной густотой. Густота пунктов астрономо-геодезической сети для применения метода площадей должна удовлетворять основному требованию — возможности вывода размеров и ориентировки эллипсоида, наилучше подходящего к поверхности геоида на принятой территории, и одновременно выявлению формы, «рельефа» геоида на этой территории. Согласно исследованиям проф. Красовского, астрономо-геодезическая сеть, отвечающая требованиям обработки ее по методу площадей, необязательно должна представлять собой сплошную сеть; по его исследованиям достаточно, если астрономо-геодезическая сеть будет состоять из связанных между собой рядов триангуляции по меридианам и параллелям, расположенным между смежными рядами одного направления, на расстоянии около 200—300 км, с определением астрономических пунктов по рядам примерно через 70 км (исключая горные районы).



Метод дуг применялся ранее, когда градусные измерения представляли собой разрозненные отдельные ряды триангуляции; примером такого ряда является знаменитая дуга Струве. В настоящее время астрономо-геодезические сети строятся с густотой, обеспечивающей применение метода площадей. В частности, вывод размеров эллипсоида Красовского был произведен по методу площадей.

Однако и в настоящее время целесообразно при выводе параметров референц-эллипсоида использовать при обработке астрономо-геодезической сети отдельные значительные дуги по меридианам и параллелям. Поясним эту мысль при помощи рис. 154. Пусть заштрихованный прямоугольник  $ABCD$  схематически представляет собой территорию, на которой развита значительная астрономо-геодезическая сеть, пригодная для обработки по методу площадей.

К этой большой сети примыкают по меридианным направлениям три дуги  $ab$ ,  $cd$  и  $ef$  значительного протяжения. Несомненно, присоединение этих дуг к астрономо-геодезической сети  $ABCD$  существенно расширит данные для вывода размеров эллипсоида и при надлежащей обработке приблизит этот вывод к размерам общего земного эллипсоида.

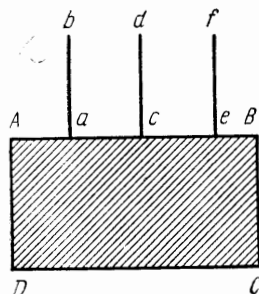


Рис. 154

Как метод дуг, так и метод площадей представляют собой по существу один метод — астрономо-геодезический, позволяющий определять параметры местного референц-эллипсоида, т. е. земного эллипсоида, наиболее подходящего к квазигеоиду для территории, на которой расположены выполненные астрономо-геодезические измерения.

Физический метод, т. е. метод, основанный на использовании одних гравиметрических измерений для определения всех параметров эллипсоида, не применяется; этот метод не позволяет с достаточной точностью определить линейный или масштабный параметр эллипсоида, например длину большой полуоси.

Определив независимо от геодезических измерений массу Земли, можно было бы получить из гравиметрических измерений и значение большой полуоси. Однако с необходимой точностью независимо от геодезических и гравиметрических данных масса Земли в настоящее время не определяется. Поэтому линейный параметр эллипсоида всегда выводится с использованием материалов геодезических измерений.

Второй параметр, определяющий форму земного эллипсоида, — сжатие может быть определен из одних гравиметрических измерений, притом с большей достоверностью, чем астрономо-геодезическим методом. При этом весьма важным обстоятельством является возможность получения и, следовательно, использования гравиметрических данных для всей поверхности Земли, т. е. и на суше, и на океанах. Этот метод определения сжатия непосредственно вытекает из второй формулы Клеро (см. § 59).

С большой точностью определяется сжатие также из наблюдений искусственных спутников Земли. Сведения об этом методе приведены в гл. XVII.

Существуют решения задачи по определению всех параметров земного эллипсоида, основанные на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических данных.

Приведем основные характеристики программы градусных измерений, осуществляемой в СССР.

Градусными измерениями в СССР являются ряды триангуляции 1 класса,

прокладываемые по меридианам и параллелям на расстоянии около 200 км и образующие полигоны периметром 800—1000 км. Длины базисных сторон определяют в местах пересечения рядов, т. е. через 200 км; астрономические определения (широты, долготы и азимуты) — на двух пунктах каждой базисной стороны. Через каждые 60—100 км в промежутках между базисными сторонами на пунктах триангуляции определяют широты и долготы. Гравиметрические пункты определяют в порядке производства общей гравиметрической съемки со средней густотой один пункт на 1000 км<sup>2</sup>, обеспечивающей выполнение астрономо-гравиметрического нивелирования по всем рядам астрономо-геодезической сети СССР. Кроме того, вдоль отдельных рядов триангуляции 1 класса производят дополнительное сгущение гравиметрической съемки. Одновременно в геодезических целях используют результаты специальных гравиметрических измерений, выполняемых, например, при разведке полезных ископаемых.

Ряды, по которым с большей точностью производят астрономо-гравиметрическое нивелирование, называются главными дугами градусных измерений СССР или основными линиями астрономо-гравиметрического нивелирования.

На всех пунктах астрономо-геодезических сетей определяют нормальные высоты. Программная точность измерений астрономо-геодезической сети СССР 1 класса характеризуется показателями, приведенными на стр. 7.

Постановка работ по градусным измерениям в СССР имеет ряд важных достоинств: они охватывают громадную территорию, произведены в весьма короткий срок, что обеспечило единообразие выполнения программных требований и высокую точность; в состав градусных измерений на территории СССР входят работы по астрономо-гравиметрическому нивелированию.

Совместная постановка астрономо-геодезических и гравиметрических работ является весьма существенной особенностью градусных измерений в СССР, которая при высоком уровне технического исполнения позволяет отнести последние к наиболее современным. Эта программа градусных измерений впервые стала осуществляться в СССР.

Отметим, что с конца сороковых годов началось развитие триангуляции 2 класса внутри полигонов 1 класса с точностью, близкой к триангуляции 1 класса.

Градусные измерения не являются отдельной частью основных астрономо-геодезических и гравиметрических работ, выполняемых в стране. Они представляют органическую часть и следствие исполнения первоклассных триангуляционных работ для создания опорной геодезической сети в государстве, необходимой для картографирования его территории и для других практических нужд. Запросы практики и науки не вступают в противоречие, а, наоборот, взаимно дополняют друг друга, обеспечивая в комплексе наилучшее разрешение обеих задач.

## § 82. Градусные измерения по меридиану и параллели, метод дуг

Идея определения размеров и сжатия земного эллипсоида из градусных измерений по меридиану и параллели освещена в § 50. Хотя метод дуг в настоящее время применяется мало, он имеет методическое значение и в наиболее простом виде иллюстрирует решение задачи по выводу параметров земного эллипсоида на основании астрономо-геодезических измерений.

Пусть имеем ряд триангуляции 1 класса, на концах которого исполнены астрономические определения широт, долгот и азимутов (рис. 155), проложенный между точками  $A$  и  $B$  приблизительно по направлению меридиана.

Для дальнейшего составления уравнений градусных измерений по меридиану необходимо определить длину и азимут геодезической линии, соединяющей конечные точки звена, и затем получить проекцию этой линии на меридиан, проходящий через одну из ее конечных точек, например через точку  $A$ , т. е. получить длину дуги меридиана между параллелями, имеющими широты  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ . Для указанной цели произведем следующие предварительные вычисления:

1. Уравнивание ряда за условия фигур, базисов и, если возможно, азимутов и окончательное решение треугольников.

2. Вычисление длины  $D$  и азимута  $T$  геодезической линии, соединяющей конечные точки ряда  $A$  и  $B$ .

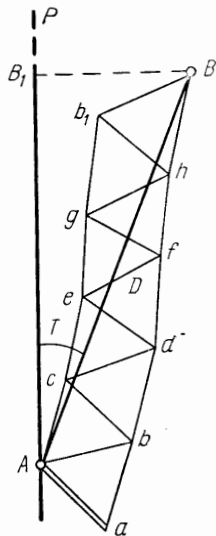


Рис. 155

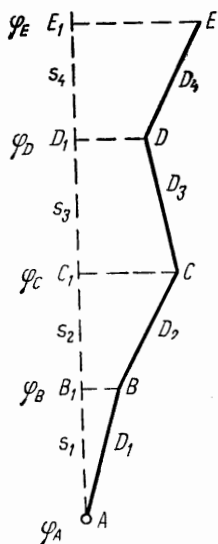


Рис. 156

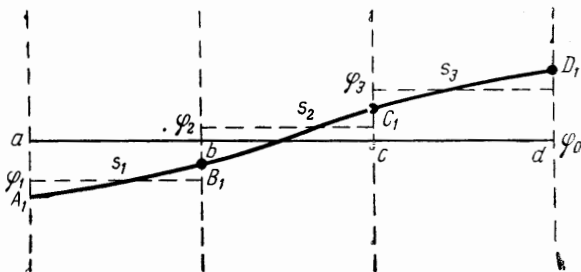


Рис. 157

Вывод длины и азимута геодезической линии может производиться путем последовательного вычисления полярных координат точек  $b, c, d, \dots, B$  с началом координат в точке  $A$ . Полярными координатами будут азимуты и длины линий  $Ab, Ac, Ad, \dots, AB$ . Очевидно, полярные координаты точки  $B$  и будут искомыми значениями  $D = AB$  и  $T = \angle PAB$ .

Длину и азимут геодезической линии дуги можно получить также из решения обратной геодезической задачи по дуге  $AB$  после вычисления координат пунктов ряда.

3. Проектирование на меридиан  $AP$  дуги  $D$  при помощи параллели точки  $B$  или вычисление расстояния  $AB_1 = s$  между параллелями точек  $A$  и  $B$ . Будем иметь

$$s = D \cos T_m + \Delta s,$$

где  $\Delta s$  — поправочный член,

$$T_m = \frac{T_{AB} + T_{BA} \pm 180^\circ}{2}. \quad (82.1)$$

Обычно дуга, по которой производится градусное измерение, состоит из нескольких частных дуг  $AB, BC, CD$  и т. д. (рис. 156). Тогда соответственно получаем длины дуг меридианов  $s_1, s_2, s_3, s_4$  и т. д., которые в дальнейшем будем рассматривать как непосредственно измеренные.

Проектирование дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  на меридиан совершается с ошибкой

$$\Delta s = -D \sin T_m dT_m. \quad (82.2)$$

При  $T_m = 10^\circ$  и  $dT_m = \pm 4''$

$$\Delta s = -D \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{50\,000} = -D \frac{1}{300\,000},$$

или при  $D = 200$  км

$$\Delta s = 0,7 \text{ м.}$$

Эта ошибка пренебрегаемо мала по сравнению с ошибками астрономических данных, входящих в уравнения градусных измерений, и влияниями уклонов отвесных линий.

При градусных измерениях по параллели порядок предварительной обработки геодезических материалов остается в основном таким же, как и при градусных измерениях по меридиану. Он отличается только тем, что предварительно для каждой частной дуги вычисляют ее длину по параллели по средней широте этой дуги. Таким образом, для дуги по параллели в целом отдельные частные дуги ее будут отнесены к разным широтам. Длины этих частных дуг приводят к длине дуги параллели, имеющей среднюю широту для всего ряда по параллели. Обозначим:  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$  — длины дуг параллелей, отнесенные к средней широте каждой дуги  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k$  соответственно (рис. 157);  $s_1^0, s_2^0, \dots, s_k^0$  — длины дуг параллелей, отнесенные к средней для всей дуги широте  $\varphi_0$ . Тогда на основании (8.2) искомая длина некоторой дуги  $s_k^0$  вычислится из отношения

$$\frac{s_k^0}{s_k} = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_k}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_0}} \frac{\sec \varphi_k}{\sec \varphi_0}. \quad (82.3)$$

В результате будем иметь значения для всех частных дуг градусного измерения по параллели, отнесенные к одной широте.

После указанной предварительной обработки материалов градусных измерений переходят к составлению и решению уравнений.

Для получения уравнений градусных измерений по меридиану напомним формулу (7.11) для длины дуги меридиана

$$s = a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e^2 \right\}. \quad (82.4)$$

В формуле (82.4)  $B_2$  и  $B_1$  — геодезические широты, отнесенные к определяемому эллипсоиду,  $a$  и  $e$  — искомые значения большой полуоси и эксцентриситета определяемого эллипсоида. Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ e^2 &= e_0^2 + \Delta e^2 \end{aligned} \right\}, \quad (82.5)$$

где  $a_0$  и  $e_0^2$  — некоторые приближенные значения большой полуоси и квадрата эксцентриситета эллипсоида, принятого при обработке градусных измерений.

Подставим значения (82.5) в формулу (82.4)

$$\begin{aligned} s &= a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e_0^2 \right\} + \\ &+ \Delta a \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e_0^2 \right\} - a_0 \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) \Delta e^2 \right\}. \end{aligned} \quad (82.6)$$

Найдем выражение для длины радиуса кривизны меридиана  $M^\circ$  на эллипсоиде с параметрами  $a_0$  и  $e_0$  при средней широте  $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$  :

$$M_m^\circ = a_0 (1 - e_0^2) (1 - e^2 \sin^2 B_m)^{-3/2} = a_0 (1 - e_0^2) \left(1 + \frac{3}{2} e_0^2 \sin^2 B_m\right),$$

но

$$\sin^2 B_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B_m,$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} M_m^\circ &= a_0 (1 - e_0^2) \left\{ 1 + \frac{3}{2} e_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B_m \right) \right\} \\ M_m^\circ &= a_0 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) e_0^2 \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (82.7)$$

Разделив (82.6) на (82.7), получим

$$\frac{s}{M_m^\circ} \rho'' = (B_2 - B_1)'' + (B_2 - B_1)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2 - B_1)'' \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) \Delta e^2. \quad (82.8)$$

Выражение  $\frac{s}{M_m^\circ} \rho''$  представляет собой с принятой точностью разность широт точек на эллипсоиде с размерами  $a_0$  и  $e_0$ , соответствующую расстоянию  $s$  и средней широте  $B_m$ .

Обозначим

$$\frac{s}{M_m^\circ} \rho'' = (B_2^\circ - B_1^\circ). \quad (82.9)$$

На основании формулы (65.17) имеем:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 - 0,171'' \sin 2B_1 H_1 \\ B_2 &= \varphi_2 - \xi_2 - 0,171'' \sin 2B_2 H_2 \end{aligned} \right\}, \quad (82.10)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — астрономические широты точек  $A$  и  $B$  дуги,

$\xi_1$  и  $\xi_2$  — слагающие уклонений отвесных линий в меридиане в этих же точках, отнесенные к поверхности искомого эллипсоида,

$H_1$  и  $H_2$  — высоты этих точек.

Теперь уравнение (82.8) примет вид

$$\begin{aligned} (B_2^\circ - B_1^\circ)'' &= \{(\varphi_2 - \xi_2) - (\varphi_1 - \xi_1)\} - 0,171'' (H_2 \sin 2B_2 - H_1 \sin 2B_1) + \\ &+ (B_2 - B_1) \frac{\Delta a}{a} - (B_2 - B_1)'' \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m \right) \Delta e^2, \end{aligned} \quad (82.11)$$

откуда

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + \{(\varphi_2 - \varphi_1)'' - 0,171'' (\sin 2B_2^\circ H_2 - \sin 2B_1^\circ H_1) - (B_2^\circ - B_1^\circ)''\} + \\ &+ (B_2^\circ - B_1^\circ)'' \frac{\Delta a}{a_0} - (B_2^\circ - B_1^\circ)'' \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2B_m^\circ \right) \Delta e^2. \end{aligned} \quad (82.12)$$



Если обозначить:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= P_1; & q_1 &= Q_1; \\
 p_1 + p_2 &= P_2; & q_1 + q_2 &= Q_2; \\
 p_1 + p_2 + p_3 &= P_3; & q_1 + q_2 + q_3 &= Q_3; \\
 &\dots & &\dots \\
 p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} &= P_{n-1}; & q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{n-1} &= Q_{n-1}; \\
 l_1 &= L_1; \\
 l_1 + l_2 &= L_2; \\
 l_1 + l_2 + l_3 &= L_3; \\
 &\dots \\
 l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{n-1} &= L_{n-1},
 \end{aligned}$$

то уравнения (82.15) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_1 &= \xi_1 \\
 \xi_2 &= \xi_1 + P_1 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_1 \Delta e^2 + L_1 \\
 \xi_3 &= \xi_1 + P_2 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_2 \Delta e^2 + L_2 \\
 \xi_4 &= \xi_1 + P_3 \frac{\Delta a}{a_0} + Q_3 \Delta e^2 + L_3 \\
 &\dots \\
 \xi_n &= \xi_1 + P_{n-1} \frac{\Delta a}{a_0} + Q_{n-1} \Delta e^2 + L_{n-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (82.16)$$

Уравнения (82.16) независимы между собой, если рассматривать  $\xi_1$  как неизвестную величину, подлежащую определению. Очевидно, эта система может рассматриваться как система независимых уравнений погрешностей, решение которых следует производить по способу наименьших квадратов. Эти уравнения содержат три неизвестных:  $\xi_1$ ,  $\frac{\Delta a}{a_0}$ ,  $\Delta e^2$ .

Геометрически выражения (82.16) представляют собой уравнения градусных измерений для дуг  $AB_1$ ,  $AC_1$ ,  $AD_1$ ,  $AE_1$  (см. рис. 160). В этом легко убедиться, подставив в уравнения (82.15) значения коэффициентов  $p$ ,  $q$  и  $l$ .

Появление третьего неизвестного  $\xi_1$  понятно: уравнения (82.16) решаются по способу наименьших квадратов под условием  $\sum \xi^2 = \min$ , или, иначе говоря, под условием наибольшего приближения искомого эллипсоида к геоиду. Но для этого недостаточно определить только размеры эллипсоида, еще необходимо установить и взаимное расположение эллипсоида и геоида, т. е. соответствующим образом ориентировать эллипсоид относительно геоида. Определив  $\xi_1$ , тем самым определим геодезическую широту первой точки дуги по формуле

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1 - 0,471'' \sin 2B_1 H_1. \quad (82.17)$$

Последним уравнением определяется направление нормали к поверхности эллипсоида относительно направления нормали к геоиду в плоскости мери-

диана в начальной точке; тем самым определяется положение меридианного сечения эллипсоида относительно меридианного сечения геоида при совпадении плоскостей обоих сечений.

Уравнения (82.16) решают по способу наименьших квадратов обычным путем: составляют три нормальных уравнения с тремя неизвестными:  $\xi_1$ ,  $\frac{\Delta a}{a_0}$ ,  $\Delta e^2$ , из которых и определяют значения последних. Значения величин  $\xi$  для остальных пунктов вычисляют из уравнений (82.16).

Ошибку единицы веса вычисляют по формуле

$$\pm \sqrt{\frac{\sum \xi_i^2}{n-3}}. \quad (82.18)$$

Очевидно, эта величина одновременно будет средним квадратическим значением случайного местного уклонения отвесных линий в меридиане данной дуги.

Вычисление размеров эллипсоида указанным путем и его ориентирование в меридианной плоскости приводят к определению эллипсоида, наилучшим образом подходящего к геоиду по данной меридианной дуге.

Изложенный метод обработки градусных измерений соответствует методу разв е р т ы в а н и я. Действительно, в свободном члене уравнения (82.12) величина  $(B_2^{\circ} - B_1^{\circ})$  вычисляется по формуле (82.9) при помощи дуги  $s$  на эллипсоиде с размерами и сжатием  $a_0$  и  $e_0^2$ , тогда как длина дуги  $s$ , определяемая выражением (82.4), относится к искомому эллипсоиду с размерами  $a$  и  $e^2$ . До разработки Красовским предложений о переходе к методу проектирования измеренные на земной поверхности расстояния приводились к уровню моря, т. е. редуцировались на поверхность геоида, полагая, что несовпадением геоида и наилучше подходящего к нему эллипсоида можно пренебрегать. Таким образом, в нашем выводе при вычислении  $(B_2^{\circ} - B_1^{\circ})$  дуга  $s$ , отнесенная к поверхности геоида, откладывалась, разв е р т ы в а л а с ь на другой поверхности — поверхности эллипсоида с параметрами  $a_0$  и  $e_0^2$ . Вызываемая этим погрешность в свободном члене уравнения (82.12) зависит от приближенности принятых величин  $a_0$  и  $e_0^2$  и от пренебрежения несовпадением геоида с искомым эллипсоидом. При обработке больших дуг и вообще обширных астрономо-геодезических сетей эта неточность в обработке будет приводить к заметным ошибкам в выводах параметров референц-эллипсоида.

Улучшения результатов вывода параметров эллипсоида при применении метода разв е р т ы в а н и я можно было бы добиться определением искомых величин при помощи двух приближений, а именно: определить изложенным путем  $a$ ,  $e^2$  и  $\xi_1$  и принять их значения за  $a_0$ ,  $e_0^2$ , после этого повторить уравнивание звеньев на поверхности эллипсоида с этими размерами и вновь решить уравнения градусных измерений (в которых изменятся только свободные члены) и получить во втором приближении искомые величины  $a$ ,  $e^2$  и  $\xi_1$ . В этом случае погрешность вывода будет обусловлена только несовпадением наилучше подходящего эллипсоида с геоидом. Решение, свободное от этой погрешности, получится при применении метода проектирования.

Метод разв е р т ы в а н и я, несмотря на его недостатки, рассматривается в настоящей книге по двум причинам: во-первых, все выводы размеров земного эллипсоида, выполненные до настоящего времени, были произведены по этому методу; во-вторых, применение метода разв е р т ы в а н и я неизбежно для определения параметров эллипсоида в начальном этапе изучения общей фигуры Земли.



Если градусное измерение исполнено по параллели, то ход рассуждений при выводе уравнений погрешностей такой же, как и для градусных измерений по меридиану. Разница заключается в том, что вместо разности широт входят разности долгот, умноженные на косинус широты данной дуги параллели, и вместо слагающих уклонений по меридиану слагающие уклонений отвесных линий в первом вертикале. Не приводя вывода, напомним уравнения градусных измерений по параллели в окончательном виде:

[illegible]

$$\begin{aligned}
p_1' &= (L_2^0 - L_1^0) \cos B_0; & q_1' &= \frac{1}{2} (L_2^0 - L_1^0) \cos B_0 \sin^2 B_0, \\
p_2' &= (L_3^0 - L_2^0) \cos B_0; & q_2' &= \frac{1}{2} (L_3^0 - L_2^0) \cos B_0 \sin^2 B_0, \\
&\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\
p_{n-1}' &= (L_n^0 - L_{n-1}^0) \cos B_0; & q_{n-1}' &= \frac{1}{2} (L_n^0 - L_{n-1}^0) \cos B_0 \sin^2 B_0, \\
l_1^\bullet &= [(\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2^0 - L_1^0)] \cos B_0, \\
l_2' &= [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L_3^0 - L_2^0)] \cos B_0, \\
&\dots\dots\dots \\
l_{n-1}' &= [(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L_n^0 - L_{n-1}^0)] \cos B_0
\end{aligned}$$
$$\begin{array}{ll} P'_1 = p'_1; & Q'_1 = q'_1; \\ P'_2 = p'_1 + p'_2; & Q'_2 = q'_1 + q'_2; \\ \dots & \dots \\ P'_{n-1} = p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{n-1}; & Q'_{n-1} = q'_1 + q'_2 + \dots + q'_{n-1}; \\ L'_1 = l'_1, & \\ L'_2 = l'_1 + l'_2, & \\ \dots & \dots \\ L'_{n-1} = l'_1 + l'_2 + \dots + l'_{n-1}. & \end{array}$$

372

диус, т. е.  $r$ , и, зная широту параллели, вычислить только размер большой полуоси и, конечно,  $\eta_1$ .

Для определения всех величин —  $a$ ,  $e^2$  и  $\eta_1$  необходимо иметь минимум две дуги параллели, расположенные под существенно разными широтами.

Поправку астрономического азимута за уклонение отвесной линии в начальной точке дуги вычисляют по формуле

$$\Delta A = \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (82.20)$$

В приведенных выводах уравнений градусных измерений размеры эллипсоида определялись большой полуосью  $a = a_0 + \Delta a$  и квадратом эксцентриситета  $e^2 = e_0^2 + \Delta e^2$ . Было бы нетрудно вместо  $\Delta e^2$  в указанные уравнения ввести  $\Delta \alpha$ , т. е. поправку к некоторому приближенному значению сжатия. Эта замена может быть произведена на основании формул:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2,$$

$$\Delta e^2 = 2\Delta\alpha - 2\alpha\Delta\alpha.$$

Приведенные выше уравнения градусных измерений по меридианам и параллелям не являются вполне строгими, так как при их выводе мы ограничились использованием главных членов коэффициентов при неизвестных  $\Delta a$  и  $\Delta e^2$ . Конечно, это не изменяет принципиальной стороны вывода.

Практически вывод размеров эллипсоида производится из совместной обработки градусных измерений по меридианам и параллелям. Задача решается под условием  $\sum \xi^2 + \sum \eta^2 = \min$ . Одновременно получают поправки  $\xi_1$  и  $\eta_1 \sec B_1$  в астрономические координаты того пункта, который принимают за начальный. Обозначая через  $B_0$ ,  $L_0$  и  $A_0$  геодезические координаты начального пункта триангуляции и геодезический азимут с этого пункта, получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_1 - \xi_1 \\ L_0 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec B_0 \\ A_0 &= \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} B_0 \end{aligned} \right\}. \quad (82.24)$$

Выше изложен чисто астрономо-геодезический метод определения размеров, сжатия и ориентировки эллипсоида из градусных измерений по меридианам и параллелям. Для этого метода характерно то, что за случайные ошибки измерений принимают слагающие астрономо-геодезических уклонений отвесных линий. Принятие при выводе уравнений величин  $\xi$  и  $\eta$  как единственных ошибок геодезических и астрономических измерений вполне обосновано, так как влияние ошибок этих измерений пренебрегаемо мало по сравнению с уклонениями отвесных линий. Действительно, длина дуги звена триангуляции 1 класса определится с ошибкой около  $\pm 0,7$  м, что в разности широт соответствует величине  $\pm 0,02''$ ; собственно астрономические определения широт и долгот характеризуются ошибками порядка  $\pm 0,3$  и  $\pm 0,5''$  соответственно. Эти ошибки пренебрегаемы по сравнению с уклонениями отвесных линий, средняя величина которых равна 4—5". Однако предположение о случайном характере уклонений отвесных линий не обосновано, оно условно. Следовательно, строго говоря, применение на основе этого предположения способа наименьших квадратов для нахождения неизвестных  $a$ ,  $e^2$ ,  $\xi$  и  $\eta$  под условием минимума  $\{\sum \xi^2 + \sum \eta^2\}$  также не обосновано, так как уклонения  $\xi_i$  и  $\eta_i$

зависимы между собой. Но при использовании результатов только астрономо-геодезической сети описанное решение задачи — единственно возможное. Кроме того, несмотря на принципиальную нестрогость такого решения задачи, оно приводит к результатам, достаточно близко определяющим размеры и ориентировку эллипсоида в границах расположения использованных дуг градусных измерений. Чем больше территория, покрытая астрономо-геодезической сетью (или чем больше протяженность дуг градусных измерений), тем больше оснований считать отклонения отвесных линий случайными величинами и тем меньше влияет на результат указанная нестрогость решения задачи.

В изложенном методе обработки градусных измерений предполагается, что ряды триангуляции 1 класса, служащие дугами градусных измерений, предварительно уравнены и из последующей обработки определяются только параметры земного эллипсоида. Предварительно уравнивают ряды для получения более точных значений длин дуг меридианов и параллелей, используемых для вывода размеров сжатия и ориентировки эллипсоида.

Осветим в общих чертах использование гравиметрических материалов и гипотезы изостазии при астрономо-геодезическом выводе параметров эллипсоида.

Допустим, что независимо от материалов астрономо-геодезической сети в астрономических пунктах каким-либо методом определены абсолютные отклонения отвеса  $\xi_{аб}$  и  $\eta_{аб}$  и, тогда используя их, можно вычислить геодезические координаты:

$$\left. \begin{aligned} B^{\circ} &= \varphi - \xi_{аб} - 0,171'' \sin 2BH \\ L^{\circ} &= \lambda - \eta_{аб} \sec \varphi \\ A^{\circ} &= \alpha - \eta_{аб} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (82.22)$$

Поскольку отклонения  $\xi_{аб}$  и  $\eta_{аб}$  определены относительно нормали к поверхности общего земного эллипсоида, то и геодезические координаты, вычисленные по формуле (82.22), будут отнесены к поверхности общего земного эллипсоида. Используя при составлении уравнений градусных измерений вместо  $\varphi$ ,  $\lambda$  геодезические координаты  $B^{\circ}$ ,  $L^{\circ}$ , очевидно, из решения этих уравнений найдем поправки за переход от принятых приближенных значений  $a_0$  и  $e_0^2$  к  $a$  и  $e^2$  общего земного эллипсоида. В этом случае в уравнениях градусных измерений вида (82.16), (82.19) величины  $\xi$  и  $\eta$  должны быть заменены  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , т. е. ошибками определения  $\xi_{аб}$  и  $\eta_{аб}$ .

Принципиально значения отклонений отвесных линий, близкие к абсолютным, могли бы быть получены:

а) путем вывода их значений по формулам Венинг-Мейнеса с использованием материалов гравиметрической съемки при условии выполнения ее на всей земной поверхности;

б) путем вычисления топографо-изостатических отклонений отвеса по формулам § 72 при условии полного соответствия гипотезы изостазии действительному строению Земли и распределению плотностей в ее теле.

Но оба пути вывода «абсолютных» отклонений отвеса сейчас практически неприменимы: первый — вследствие незавершенности мировой гравиметрической съемки, а второй — вследствие приближенности гипотезы изостатической компенсации, несоответствия ее в отдельных районах земного шара действительному распределению компенсирующих масс в земной коре и невозможности

выявления неправильностей строения глубинных частей земной коры в равнинных районах.

Первый путь — принципиально строгий метод решения данной задачи, поскольку он основан на использовании результатов точных измерений.

Второй путь — приближенный, неточный, поскольку его применение основывается на гипотезе, лишь в общем находящей себе подтверждение.

Специальными исследованиями установлено, что использование топографо-изостатических редукций целесообразно при отсутствии гравиметрических данных, особенно в районах горного типа [27] и [31]. В этом случае применение гипотезы изостатической компенсации улучшает выводы параметров земного эллипсоида. При наличии же гравиметрической съемки, в пределах зоны некоторого радиуса, следует отдать предпочтение методу вывода уклонений отвеса, основанному на использовании гравиметрических данных.

Остановимся на последнем несколько подробнее.

Пусть вокруг астрономических пунктов астрономо-геодезической сети имеются гравиметрические определения в зоне некоторого радиуса  $r$ . Если астрономические координаты этих пунктов исправить за влияние уклонений отвеса, вычисленных по аномалиям силы тяжести, определенных из измерений на территории этой зоны, то ошибки вычисленных гравиметрических уклонений будут зависеть: от неучета аномалий дальних зон (т. е. аномалий в области вне зоны радиуса  $r$ ) и от ошибок вывода уклонений отвеса по аномалиям, взятым вокруг астрономического пункта зоны радиуса  $r$ .

Если вокруг астрономических пунктов учесть гравиметрические поправки, вычисленные по аномалиям силы тяжести в зоне радиуса около 1200 км, то средняя квадратическая ошибка их определения составит величину порядка 3,5" [40]. Следовательно, средняя квадратическая ошибка остаточных ошибок градусных измерений, т. е.  $\delta\xi$ , и  $\delta\eta$ , при учете указанным образом гравиметрических поправок будет характеризоваться величиной порядка  $\pm 3-4''$ , тогда как без такого учета эти ошибки доходили бы во многих районах до значения 10—20". Таким образом, переход от астрономических координат к геодезическим путем введения гравиметрических поправок, вычисленных по аномалиям зоны ограниченного радиуса, существенно повышает точность определения размеров и ориентировки земного эллипсоида. Но следует иметь в виду, что учет гравиметрических поправок  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  сек  $\varphi$ , вычисленных по аномалиям зоны указанного ограниченного радиуса, исключает влияние в основном только местных или областных отступлений геоида от эллипсоида. Поскольку при выводе этих поправок не были учтены аномалии дальних зон, постольку они и не отражают влияния волн геоида большого протяжения относительно эллипсоида. Геометрически учет таких поправок означает выравнивание профиля геоида путем сглаживания мелких неровностей его поверхности, не изменяя, однако, общих наклонов геоида относительно эллипсоида. Следовательно, выведенный с учетом гравиметрических поправок в астрономические координаты эллипсоид будет местным, т. е. наиболее подходящим для территории расположения астрономо-геодезической сети (или дуги); но его вывод будет освобожден от влияния случайных, мелких искривлений, могущих внести те или иные искажения в окончательный вывод. По этому поводу Ф. Н. Красовский приводит простую и образную аналогию: «Так, для правильного получения уклона некоторого участка шоссе, мы при нивелировании шоссе, конечно, не ставим рейку на случайные выбоины» [31, стр. 417]. Введение гравиметрических поправок  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  сек  $\varphi$  в астрономические координаты как раз и означает устранение «выбоин» геоида, т. е. его выравнивание.

При завершении в СССР общей гравиметрической съемки и выполнении детальных гравиметрических съемок вокруг астропунктов представится возможность для значительной части астропунктов увеличить радиус зоны для вычисления  $\xi_{гр}$  и  $\eta_{гр}$  в два-три раза и даже более. В этом случае ошибки уравнений градусных измерений, т. е. величины  $\delta\xi$  и  $\delta\eta$ , уменьшатся примерно до 2"; при этом существенным явится и больший учет влияния значительных по притяжению волн геоида.

Использование гравиметрических данных для исправления астрономических координат не изменяет, по существу, рассматриваемого метода как астрономо-геодезического; гравиметрические данные в этом случае играют, хотя и важную, все же вспомогательную роль.

Если для вывода параметров эллипсоида взять  $k$  дуг градусных измерений по меридиану, не имеющих между собой связи, то из совместной обработки таких материалов будут получены, по существу  $k$  референц-эллипсоидов, имеющих одинаковые размеры, но разную ориентировку. Математически это выразится в том, что из решений уравнений вида (82.12) по  $k$  дугам получены будут  $k + 2$  независимых неизвестных  $a, e^2, \xi_1, \xi'_1, \dots, \xi_1^k$ , где  $\xi_1, \xi'_1, \dots, \xi_1^k$  — отклонения отвеса в меридиане в первой точке каждой дуги.

Такой вывод параметров эллипсоида более ценен, чем вывод из одной дуги, однако степень приближения их к параметрам общего земного эллипсоида, вследствие неучета влияния больших волн геоида или неполного их учета, будет неясной; оценка точности по формуле (82.18) будет формальной, характеризующей лишь степень приближения к геоиду (квазигеоиду) по профилям использованных дуг (как в и случае одной дуги).

Например, значение полуоси  $a$  эллипсоида Бесселя получено формально с ошибкой  $\pm 210$  м, тогда как в действительности эта ошибка в несколько раз больше.

Из изложенного следует, что вывод единых исходных геодезических дат из совместной обработки дуг, не связанных между собой, как и астрономо-геодезических сетей, невозможен. Такая совместная обработка дуг (и сетей) целесообразна для вывода только размеров эллипсоида.

### § 83. Уравнения градусных измерений при применении метода развертывания; метод площадей

Если вывод размеров, сжатия и ориентировки эллипсоида производится из обработки астрономо-геодезической сети, отвечающей требованиям применения метода площадей (см. § 81), то вывод уравнений градусных измерений основывается на использовании дифференциальных формул.

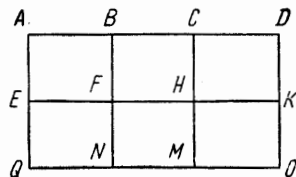


Рис. 158

Пусть на рис. 158 изображена некоторая астрономо-геодезическая сеть в виде системы рядов триангуляции 1 класса, образующих полигоны. В местах пересечения рядов, т. е. в точках  $A, B, C, D, E, F, \dots, K, \dots, O$ , исполнены астрономические определения 1 класса и получены координаты пунктов  $\varphi, \lambda$  и азимуты направлений  $\alpha$ . Вычислим геодезические координаты этих точек и азимуты с них на некотором референц-эллипсоиде, размер и форма которого

характеризуется большой полуосью  $a_0$  и сжатием  $\alpha_0$ . При вычислении примем за исходный пункт точку  $A$  с геодезическими координатами  $B_1^\circ, L_1^\circ$  и геодезическим азимутом  $A_1^\circ$ . Обозначим через  $a = a_0 + \Delta a$  и  $\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$  параметры эллипсоида, наиболее подходящего по своим размерам и ориентировке к геоиду в пределах той территории, на которой расположена астрономо-геодезическая сеть.

Пусть астрономо-геодезическая сеть уравнена и по уравненным элементам вычислены длины и азимуты геодезических линий, соединяющих смежные узловые точки сети  $A, B, C, D, \dots, K, \dots, O$  и геодезические координаты этих точек  $B_B^\circ, L_B^\circ, A_B^\circ, \dots, B_K^\circ, L_K^\circ, A_K^\circ$ .

Введем обозначения:  $B_1, L_1, A_1, \dots, B_k, L_k, A_k$  — геодезические координаты точек  $A, \dots, K$  на искомом эллипсоиде;  $\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k$  — составляющие уклонения отвесных линий относительно нормалей к искомому эллипсоиду в тех же точках.

Задача заключается в определении большой полуоси  $a$  и сжатия  $\alpha$  наиболее подходящего эллипсоида (или поправок  $\Delta a$  и  $\Delta \alpha$ ) и поправок в принятые исходные геодезические данные.

Указанные величины определяют по-прежнему под условием геометрической близости искомого эллипсоида к геоиду, выражающимся уравнением  $\sum (\xi^2 + \eta^2) = \min$ . Для этого необходимо выразить  $\xi$  и  $\eta$  для всех точек как функции искоемых величин  $\Delta a, \Delta \alpha, \xi_1, \eta_1$  и полученные уравнения погрешностей решить по способу наименьших квадратов. Составим эти уравнения.

Для исходного пункта:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_1^\circ + dB_1 = \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 &= L_1^\circ + dL_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_1 &= A_1^\circ + dA_1 = \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}; \quad (83.1)$$

для точки  $K$ :

$$\left. \begin{aligned} B_k &= B_k^\circ + dB_k = \varphi_k - \xi_k \\ L_k &= L_k^\circ + dL_k = \lambda_k - \eta_k \sec \varphi_k \\ A_k &= A_k^\circ + dA_k = \alpha_k - \eta_k \operatorname{tg} \varphi_k \end{aligned} \right\}. \quad (83.2)$$

В этих уравнениях  $dB, dL, dA$  — поправки геодезических координат и азимута при переходе от системы координат на референц-эллипсоиде к системе координат на искомом эллипсоиде.

Из уравнений (83.2) получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k^\circ - dB_k \\ \eta_k \sec \varphi_k &= \lambda_k - L_k^\circ - dL_k \\ \eta_k \operatorname{tg} \varphi_k &= \alpha_k - A_k^\circ - dA_k \end{aligned} \right\}. \quad (83.3)$$

Второе уравнение, умноженное на  $\sin \varphi_k$ , обращается в третье, если под  $A_k^\circ$  понимать азимут Лапласа (что и бывает в действительности), поэтому третье уравнение — следствие второго и его использовать не следует.

Для выражения неизвестных величин  $dB_k$  и  $dL_k$  воспользуемся дифференциальными формулами. Так как эти величины обусловлены различием в полуоси и сжатии эллипсоидов на  $\Delta a$  и  $\Delta \alpha$  соответственно и различием в их

ориентировке (т. е. в исходных геодезических данных в пункте  $A$  на  $dB_1, dL_1$  и  $dA_1$ ), то можем написать

$$\left. \begin{aligned} dB_k &= \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) dB_1 + \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) dA_1 + \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial a} \right) \Delta a + \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial \alpha} \right) \Delta \alpha \\ dL_k &= dL_1 + \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) dB_1 + \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) dA_1 + \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial a} \right) \Delta a + \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial \alpha} \right) \Delta \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (83.4)$$

Обозначая производные в первом уравнении (83.4) через  $p$ , а во втором — через  $q$ , получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) &= p_1^{1,k}; & \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) &= p_2^{1,k}; \\ \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial a} \right) &= p_3^{1,k}; & \left( \frac{\partial B_k^\circ}{\partial \alpha} \right) &= p_4^{1,k}; \\ \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial B_1^\circ} \right) &= q_1^{1,k}; & \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial A_1^\circ} \right) &= q_2^{1,k}; \\ \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial a} \right) &= q_3^{1,k}; & \left( \frac{\partial l_{1,k}^\circ}{\partial \alpha} \right) &= q_4^{1,k}. \end{aligned}$$

С этими обозначениями и с учетом формул (83.4) уравнения градусных измерений (83.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k^\circ - p_1^{1,k} dB_1 - p_2^{1,k} dA_1 - p_3^{1,k} \Delta a - p_4^{1,k} \Delta \alpha \\ \eta_k \sec \varphi_k &= \lambda_k - L_k^\circ - dL_1 - q_1^{1,k} dB_1 - q_2^{1,k} dA_1 - q_3^{1,k} \Delta a - q_4^{1,k} \Delta \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (83.5)$$

Из (83.1) получим:

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= \varphi_1 - B_1^\circ - \xi_1 \\ dL_1 &= \lambda_1 - L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ dA_1 &= \alpha_1 - A_1^\circ - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (83.6)$$

Принимая во внимание (83.6), уравнения (83.5) переписываем так:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k^\circ - p_1^{1,k} (\varphi_1 - B_1^\circ) + p_1^{1,k} \xi_1 - p_2^{1,k} (\alpha_1 - A_1^\circ) + \\ &\quad + p_2^{1,k} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_3^{1,k} \Delta a - p_4^{1,k} \Delta \alpha \\ \eta_k \sec \varphi_k &= \lambda_k - L_k^\circ - (\lambda_1 - L_1^\circ) + \eta_1 \sec \varphi_1 - q_1^{1,k} (\varphi_1 - B_1^\circ) + \\ &\quad + q_1^{1,k} \xi_1 - q_2^{1,k} (\alpha_1 - A_1^\circ) + q_2^{1,k} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - q_3^{1,k} \Delta a - q_4^{1,k} \Delta \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (83.7)$$

Если референц-эллипсоид ориентирован в исходном пункте по астрономическим данным, то  $\varphi_1 = B_1^\circ$ ;  $\lambda_1 = L_1^\circ$ ;  $\alpha_1 = A_1^\circ$ . В этом случае уравнения (83.7) примут более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_k &= \varphi_k - B_k^\circ + p_1^{1,k} \xi_1 + p_2^{1,k} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - p_3^{1,k} \Delta a - p_4^{1,k} \Delta \alpha \\ \eta_k \sec \varphi_k &= (\lambda_k - L_k^\circ) + q_1^{1,k} \xi_1 + [1 + q_2^{1,k} \sin \varphi_1] \eta_1 \sec \varphi_1 - q_3^{1,k} \Delta a - q_4^{1,k} \Delta \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (83.8)$$

Уравнения (83.7) и (83.8) — окончательные; о вычислении коэффициентов  $p$  и  $q$  будет сказано ниже. Эти уравнения представляют собой широтное

и долготное уравнения градусных измерений, составленные для пункта  $K$ ; для всех остальных пунктов  $B, C, D, \dots, O$  эти уравнения будут иметь аналогичный вид. Для начальной точки сети  $A$  получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 \\ \eta_1 \sec \varphi_1 &= \eta_1 \sec \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (83.9)$$

Решая уравнения (83.8), составленные для всех точек, вместе с (83.9) по способу наименьших квадратов при условии  $\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \min$ , находим размеры и ориентировку искомого эллипсоида, т. е.

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a \\ \alpha &= \alpha_0 + \Delta \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (83.10)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_1 &= \alpha_1 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \end{aligned} \right\}. \quad (83.11)$$

Уравнения (83.8), составленные для точек  $B, C, \dots, O$ , отнесены к начальной точке триангуляции  $A$ , следовательно, коэффициенты  $p$  и  $q$  соответствуют геодезическим линиям, соединяющим каждую из точек  $B, C, D, E, \dots, K, \dots, O$  с начальной точкой триангуляции  $A$ . Длины этих геодезических линий для такой территории, как СССР, будут выражены сотнями и тысячами километров. Коэффициенты  $p$  и  $q$ , обозначающие частные производные в уравнениях (83.4), очевидно, — не что иное как коэффициенты, стоящие перед  $dB_1, dA_1, \Delta \alpha$  и  $\Delta a$  в дифференциальных формулах.

Но при выводе упомянутых формул в главе V имелись в виду расстояния, соответствующие длинам сторон треугольников триангуляции, т. е. расстояния, во много раз меньшие расстояний, с которыми приходится иметь дело при вычислении коэффициентов  $p$  и  $q$ . Поэтому для их вычисления следует пользоваться более точными дифференциальными формулами [31, стр. 278—291 и 339—342].

При выводе уравнений градусных измерений (83.7) и (83.8) ошибками в определении астрономических координат  $\varphi, \lambda, \alpha$  и в результатах вычислений геодезических координат  $B^\circ, L^\circ$  и  $A^\circ$  можно пренебречь, так как они малы по сравнению с величинами  $\xi$  и  $\eta$ . Если астрономические координаты были предварительно исправлены гравиметрическими поправками, то под величинами  $\xi$  и  $\eta$  следует понимать погрешность этих поправок, т. е.  $\delta \xi$  и  $\delta \eta$ .

Изложенный метод составления уравнений градусных измерений также основан на методе развертывания.

#### § 84. Методы установления исходных геодезических дат

Здесь рассмотрим методы установления исходных геодезических дат для отдельной триангуляции.

Простейшим образом ориентирование референц-эллипсоида может быть произведено по одному астрономическому пункту. Рассмотрим этот случай. Пусть на пункте  $A$ , принимаемом за исходный, произведены астрономические определения широты  $\varphi_0$ , долготы  $\lambda_0$  и азимута направления  $\alpha_0$  с пункта  $A$  на пункт  $B$ . Практически ориентирование эллипсоида по одному астрономическому пункту производится просто: полагают, что геодезические координаты



в начальной точке равны астрономическим и высота геоида над эллипсоидом в этой точке равна нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - 0,171'' \sin 2B_0 H_0^\gamma \\ L_0 &= \lambda_0 & H_0 &= H_0^\gamma \\ A_0 &= \alpha_0 \end{aligned} \right\}. \quad (84.1)$$

Рассмотрим геометрический смысл такого ориентирования референц-эллипсоида. Равенство геодезических и астрономических координат в исходном

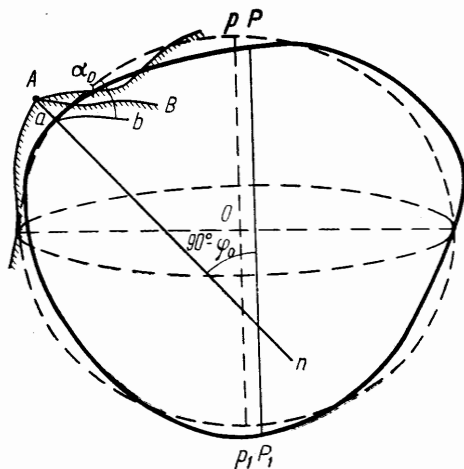


Рис. 159

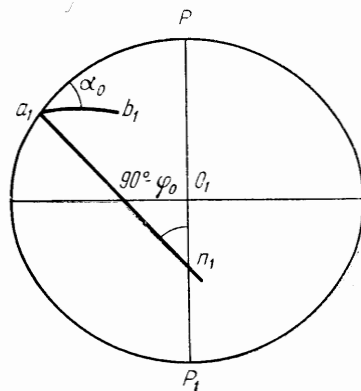


Рис. 160

пункте означает, что в этом случае направление нормали к поверхности референц-эллипсоида совпадает с направлением отвесной линии; эллипсоид в данной точке касается геоида.

Пусть на рис. 159 представлено тело Земли: жирной кривой показано сечение геоида плоскостью астрономического меридиана точки  $A$ ; линия  $PP_1$  — ось вращения Земли;  $Aan$  — направление отвесной линии. Угол между  $An$  и  $PP_1$  равен  $90^\circ - \varphi_0$ . Точка  $a$  — проекция точки  $A$  на поверхность геоида. Угол между плоскостью астрономического меридиана  $APP_1$  и вертикальной плоскостью, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , — астрономический азимут  $\alpha_0$ .

Найдем на поверхности выбранного эллипсоида (рис. 160) точку, в которой нормаль к поверхности составляет с малой осью  $PP_1$  угол  $90^\circ - \varphi_0$  и нормальное сечение  $a_1b_1$ , имеющее азимут  $\alpha_0$ . Теперь ориентирование эллипсоида в теле Земли можно представить себе следующим образом: расположим эллипсоид так, чтобы точка  $a_1$  совпала с точкой  $a$ , а нормаль  $a_1n_1$  — с отвесной линией  $an$ . После этого эллипсоид может еще вращаться вокруг линии  $an$ . Для того чтобы окончательно определить его положение в теле Земли, совмещаем плоскость нормального сечения  $a_1b_1$  с плоскостью вертикального сечения  $ab$ , после чего плоскость геодезического меридиана  $a_1pp_1$  совместится с плоскостью астрономического меридиана  $app_1$ , и положение эллипсоида будет вполне определено. Это положение эллипсоида показано на рис. 159 пунктиром. При этом малая ось эллипсоида будет параллельна оси вращения Земли, и экватор эллипсоида займет положение, параллельное земному экватору.

Указанный прием ориентирования эллипсоида носит название ориентирования по одному астрономическому пункту.

Так как отклонения отвесных линий различны в разных точках земной поверхности и размеры референц-эллипсоида не равны размерам общего земного эллипсоида, то эллипсоид, ориентированный по разным астрономическим пунктам, будет занимать различное положение в теле Земли. В силу того, что местные отклонения отвесных линий могут быть весьма значительны, можно, ориентируя эллипсоид по одному случайно выбранному астропункту, придать ему грубо неверное положение в теле Земли.

При неправильной ориентировке эллипсоида получаются систематические отступления эллипсоида от геоида, притом все возрастающие по мере удаления от исходного пункта. Это в свою очередь вызовет систематические относительные отклонения отвесных линий, выводимые астрономо-геодезическим путем. Такой характер отступлений поверхности референц-эллипсоида от геоида приводит к увеличению значений редукций длин и углов, вследствие чего увеличатся несовпадения значений элементов, измеренных непосредственно и вычисленных на поверхности референц-эллипсоида. При нестрогой обработке триангуляции (например, при методе развертывания) неправильная ориентировка эллипсоида вызывает дополнительные искажения уравненных элементов триангуляции.

Если в одном районе вычислить триангуляцию с ориентировкой эллипсоида по одному астрономическому пункту, а в другом районе — с использованием тех же размеров эллипсоида, но ориентированного по другому астрономическому пункту, то на соединении этих двух триангуляций могут получиться грубые расхождения в значениях координат одних и тех же пунктов, которые повлекут за собой недопустимые разрывы (или перекрытия) в топографических материалах. Бывали случаи, когда эти расхождения в координатах достигали порядка 900 м.

Причиной ненадежности ориентирования эллипсоида по одной астрономической точке являются местные отклонения отвесных линий. Ошибки собственно астрономических наблюдений могут быть сведены к величинам, меньшим  $+0,5''$ , в то время как отклонения отвесных линий достигают  $4-5''$  и более.

Для небольших стран вопрос о выборе исходных геодезических дат не имеет практического значения, так как неправильный выбор этих дат начинает сказываться при известном удалении от исходного пункта. Для такой огромной территории, как СССР, вопрос правильного установления исходных геодезических дат имеет важнейшее практическое значение.

Задача установления исходных геодезических дат  $B_0$ ,  $L_0$  и  $A_0$  сводится к определению слагающих отклонения отвесной линии в исходном пункте.

Для этого могут быть применены два способа.

Первый способ заключается в выводе отклонений  $\xi$  и  $\eta$  из обработки градусных измерений (§ 82); из решения уравнений градусных измерений определяют слагающие отклонений отвесных линий  $\xi_1$  и  $\eta_1$  для начальной точки одной из дуг градусного измерения или астрономо-геодезической сети. Так как уравнения градусных измерений решают под условием  $\sum (\xi^2 + \eta^2) = \min$ , то, выводя из этого условия для исходного пункта значения  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , тем самым ориентируем эллипсоид не по одному пункту, а по всем астрономическим пунктам, участвующим в обработке градусных измерений.

Благодаря этому ослабляется влияние местных случайных уклонений отвесных линий в отдельных астрономических пунктах на вывод  $\xi_0$  и  $\eta_0$ . При таком выводе исходных геодезических дат обеспечивается более близкое расположение референц-эллипсоида к геоиду в пределах той территории, которая охвачена данными градусными измерениями.

Второй способ основан на использовании гравиметрических данных. Пусть на пункте, принимаемом за исходный, определены с возможно большей точностью астрономические координаты  $\varphi_0, \lambda_0, \alpha_0$ . Пользуясь формулами, выражающими уклонения отвесных линий в функции аномалий силы тяжести, получаем для исходного пункта гравиметрические уклонения отвесной линии  $\xi_0^{gp}$  и  $\eta_0^{gp}$ . Тогда исходные геодезические даты вычисляют по формулам:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 - \xi_0^{gp} - 0,171'' \sin 2BH_0 \\ L_0 &= \lambda_0 - \eta_0^{gp} \sec \varphi_0 \\ A_0 &= \alpha_0 - \eta_0^{gp} \operatorname{tg} \varphi_0 \end{aligned} \right\}. \quad (84.2)$$

Точность такого вывода исходных геодезических дат зависит от ошибок астрономических определений на исходном пункте и от ошибок вывода гравиметрических уклонений  $\xi^{gp}$  и  $\eta_0^{gp}$ . Поэтому для применения этого способа необходимо знать аномалии для всей Земли и во всяком случае в зоне радиуса больше 1000 км. Поскольку гравиметрическая съемка проведена не во всем мире, то влияние дальних зон не может быть учтено. Как указывалось в главе X. на значения уклонений отвесных линий большое влияние оказывают аномалии силы тяжести в зоне радиуса от 0 до 30—40 км; поэтому необходимость точного учета аномалий в этой зоне требует постановки вокруг данного пункта спе-

циальной съемки для надежного вывода горизонтального градиента силы тяжести.

Таким образом, применение этого способа для установления геодезических координат исходного пункта в настоящее время наталкивается на затруднения в связи с незавершенностью мировой гравиметрической съемки. Тем не менее этот способ

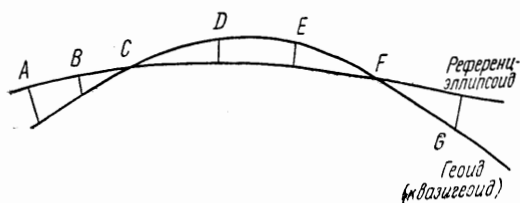


Рис. 161

заслуживает серьезного внимания, поскольку влияние дальних зон незначительно, а развитие гравиметрических работ в большинстве стран происходит весьма интенсивно.

Кроме того, результаты, полученные этим способом в сочетании с исходными геодезическими датами, выведенными из градусных измерений, позволяют иметь независимый контроль.

Однако установление для исходного пункта величин  $\xi_0$  и  $\eta_0$ , а следовательно, и  $B_0, L_0, A_0$  еще не определяет положения референц-эллипсоида по высоте. Определение высоты  $\zeta_0$  геоида (квазигеоида) над эллипсоидом в начальной точке производится также под условием их максимальной близости. Если обозначить через  $\zeta$  высоты геоида (квазигеоида) над референц-эллипсоидом в отдельных пунктах градусных измерений, то условие их близости обычно пишут в форме

$$\sum \zeta = 0, \quad (84.3)$$

Пусть на рис. 161  $A, B, \dots, G$  — точки дуг градусных измерений, для которых определены уклонения отвесных линий относительно выбранного референц-эллипсоида.

Применяя метод астрономо-гравиметрического нивелирования, вычисляем превышения поверхности геоида (квазигеоида) относительно поверхности референц-эллипсоида для каждой пары смежных точек дуги  $A, \dots, G$ . Полагая высоту поверхности геоида в точке  $A$  равной  $\zeta_0$ , получаем следующие выражения для высот поверхности геоида (квазигеоида) в точках  $A, B, C, \dots, G$ :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_A &= \zeta_0 \\ \zeta_B &= \zeta_0 + h_{AB} \\ \zeta_C &= \zeta_0 + [h_{AB} + h_{BC}] \\ &\dots\dots\dots \\ \zeta_G &= \zeta_0 + [h_{AB} + h_{BC} + \dots + h_G] \end{aligned} \right\}. \quad (84.4)$$

Решая уравнения (84.4) под условием  $\sum \zeta = 0$ , находим искомое  $\zeta_0$ .

Кроме метода раздельного определения величин  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$  и  $\zeta_0$ , возможно их совместное определение (§ 87).

## § 85. Уравнения градусных измерений при применении метода проектирования

Допустим, что для обработки триангуляции принят некоторый референц-эллипсоид с размерами  $a_0$ ,  $\alpha_0$  и ориентировкой, определяемой координатами в исходном пункте  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$ ,  $\xi_0$ . Эти параметры референц-эллипсоида можно получить по одному из рассмотренных выше методов \*. Пусть все геодезические измерения, выполненные до и после вывода референц-эллипсоида, редуцированы на поверхность референц-эллипсоида и последующая обработка измерений производилась по методу проектирования. Предположим, что встала задача определения новых размеров и ориентировки эллипсоида, наилучшим образом подходящего к территории, на которой выполнены астрономо-геодезические и гравиметрические измерения. Эту задачу можно сформулировать как определение поправок к параметрам первоначально установленного референц-эллипсоида —  $a_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $A_0$ ,  $\xi_0$ .

Координаты начальной точки астрономо-геодезической сети на поверхности искомого эллипсоида определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} B_0 + \delta B_0 &= \varphi_0 - \xi_0 - 0,171'' \sin 2B_0 H_0 \\ L_0 + \delta L_0 &= \lambda_0 - \eta_0' \sec \varphi_0 \\ A_0 + \delta A_0 &= \alpha_0 - \eta_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \\ \xi_0' + \delta \xi_0 &= \xi_0 \end{aligned} \right\}, \quad (85.1)$$

где  $\xi_0, \eta_0$  — составляющие уклонений отвеса относительно нормали к поверхности наиболее подходящего эллипсоида;

\* Таким образом, в начальной стадии изучения фигуры Земли применение метода развертывания неизбежно для определения в первом приближении параметров земного эллипсоида.

$\xi_0$  — высота геоида (квазигеоида) по отношению к той же поверхности. Для произвольного астрономо-геодезического пункта сети будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B + \delta B &= \varphi - \xi - 0,171'' \sin 2BH \\ L + \delta L &= \lambda - \eta \sec \varphi \\ A + \delta A &= \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi \\ \zeta' + \delta \zeta &= \zeta \end{aligned} \right\}, \quad (85.2)$$

где  $B, L, A, \zeta'$  — геодезические координаты, отнесенные к первоначально установленному референц-эллипсоиду;

$\delta B, \delta L, \delta A, \delta \zeta$  — поправки, обусловленные переходом к искомому эллипсоиду.

Иначе говоря, левые части уравнений (85.2) представляют координаты взятого астрономо-геодезического пункта, отнесенные к поверхности искомого наилучшего подходящего эллипсоида.

Поставим целью составить уравнения градусных измерений таким образом, чтобы поправки за изменение ориентирования эллипсоида выразить через разность прямоугольных пространственных координат центра наилучшего подходящего эллипсоида и первоначально установленного референц-эллипсоида. За начало прямоугольной пространственной системы координат примем центр референц-эллипсоида с размерами  $a_0$  и  $\alpha_0$ ; оси координат расположим так, как указано в § 3. Тогда указанная разность определится координатами  $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$  центра искомого эллипсоида (предполагается, что выполнено условие параллельности оси вращения Земли и малых осей обоих эллипсоидов).

Положение некоторой точки геоида (квазигеоида) в этой системе координат может быть определено через геодезические координаты относительно референц-эллипсоида соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + \zeta') \cos B \cos L \\ y &= (N + \zeta') \cos B \sin L \\ z &= N(1 - e^2) \sin B + \zeta' \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (85.3)$$

где  $B, L, \zeta'$  — координаты этой точки геоида относительно первоначально установленного референц-эллипсоида;

$N$  — радиус сечения первого вертикала на этом же эллипсоиде.

Пусть для той же точки геоида, но относительно искомого эллипсоида прямоугольными координатами будут:  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ ; изменения координат  $\delta x, \delta y, \delta z$  вызваны изменениями геодезических координат, большой полуоси и сжатия.

Поэтому можем написать:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial B} \delta B + \frac{\partial x}{\partial L} \delta L + \frac{\partial x}{\partial \zeta'} \delta \zeta + \frac{\partial x}{\partial a} \delta a + \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta \alpha \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial B} \delta B + \frac{\partial y}{\partial L} \delta L + \frac{\partial y}{\partial \zeta'} \delta \zeta + \frac{\partial y}{\partial a} \delta a + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial B} \delta B + \frac{\partial z}{\partial L} \delta L + \frac{\partial z}{\partial \zeta'} \delta \zeta + \frac{\partial z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \delta \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (85.4)$$

Напомним, что при условии параллельности оси вращения Земли малой оси эллипсоида, обеспечиваемой соблюдением уравнения Лапласа на астрономо-геодезических пунктах, третье уравнение в системах (85.1) и (85.2) является

следствием второго. Поэтому в правой части полученных выражений (85.4) члены с  $\delta A$  отсутствуют.

Вычисляя частные производные из выражений (85.3) и обозначая  $\delta a' = \frac{\delta a}{a}$ ,  $\delta a' = \frac{\delta \alpha}{1-\alpha}$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= N \cos B \cos L \delta a' + M \cos B \cos L \sin^2 B \delta \alpha' - \\ &\quad - (M + \xi) \sin B \cos L \delta B - (N + \xi) \cos B \sin L \delta L + \cos B \cos L \delta \zeta \\ \delta y &= N \cos B \sin L \delta a' + M \cos B \sin L \sin^2 B \delta \alpha' - \\ &\quad - (M + \xi) \sin B \sin L \delta B + (N + \xi) \cos B \cos L \delta L + \cos B \sin L \delta \zeta \\ \delta z &= N (1 - e^2) \sin B \delta \alpha' - M (1 + \cos^2 B - e^2 \sin^2 B) \sin B \delta \alpha' + \\ &\quad + (M + \xi) \cos B \delta B + \sin B \delta \zeta \end{aligned} \right\} \quad (85.5)$$

Решим эти уравнения относительно изменений геодезических координат  $\delta B$ ,  $\delta L$ ,  $\delta \zeta$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta \zeta &= \cos B \cos L \delta x + \cos B \sin L \delta y + \sin B \delta z - \\ &\quad - N (1 - e^2 \sin^2 B) \delta a' + M (1 - e^2 \sin^2 B) \sin^2 B \delta \alpha' \\ \delta B &= -\frac{1}{M} \sin B \cos L \delta x - \frac{1}{M} \sin B \sin L \delta y + \frac{1}{M} \cos B \delta z + \\ &\quad + \frac{N}{M} e^2 \sin B \cos B \delta \alpha' + (2 - e^2 \sin^2 B) \sin B \cos B \delta \alpha' \\ \delta L &= -\frac{1}{N} \sec B \sin L \delta x + \frac{1}{N} \sec B \cos L \delta y \end{aligned} \right\} \quad (85.6)$$

При этом были опущены члены, выражающие влияние отступлений геоида от эллипсоида, т. е. члены с  $\xi$ .

Применяя уравнения (85.5), для исходного пункта будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 = N_0 \cos B_0 \cos L_0 \delta a' + M_0 \cos B_0 \cos L_0 \sin^2 B_0 \delta \alpha' - \\ &\quad - M_0 \sin B_0 \cos L_0 \delta B_0 - N_0 \cos B_0 \sin L_0 \delta L_0 + \cos B_0 \cos L_0 \delta \zeta_0 \\ \delta y &= \delta y_0 = N_0 \cos B_0 \sin L_0 \delta a' + M_0 \cos B_0 \sin L_0 \sin^2 B_0 \delta \alpha' - \\ &\quad - M_0 \sin B_0 \sin L_0 \delta B_0 + N_0 \cos B_0 \cos L_0 \delta L_0 + \cos B_0 \sin L_0 \delta \zeta \\ \delta z &= \delta z_0 = N_0 (1 - e^2) \sin B_0 \delta \alpha' - \\ &\quad - M_0 (1 + \cos^2 B_0 - e^2 \sin^2 B_0) \sin B_0 \delta \alpha' + M_0 \cos B_0 \delta B_0 + \sin B_0 \delta \zeta_0 \end{aligned} \right\} \quad (85.7)$$

Величины  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$ , выражаемые зависимостями (85.7), представляют собой координаты центра наиболее подходящего эллипсоида в системе пространственных прямоугольных координат, отнесенных к центру и осям референц-эллипсоида.

Из (85.2) легко получить:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\delta B + (\varphi - B) - 0,171'' \sin^2 2BH \\ \eta &= -\delta L + (\lambda - L) \cos B \\ \zeta &= \zeta^* + \delta \zeta \end{aligned} \right\} \quad (85.8)$$

Подставляя в (85.8) выражения для изменений геодезических координат  $\delta B$ ,  $\delta L$ ,  $\delta \xi$  согласно (85.6), находим искомые уравнения градусных измерений:

$$\xi'' = \frac{\rho''}{M} \sin B \cos L \delta x_0 + \frac{\rho''}{M} \sin B \sin L \delta y_0 - \frac{\rho''}{M} \cos B \delta z_0 - \rho'' e^2 \sin B \cos B \delta a' - \\ - \rho'' (2 - e^2 \sin^2 B) \sin B \cos B \delta \alpha' + (\varphi - B) - 0,171'' \sin 2BH, \quad (85.9)$$

$$\eta'' = \frac{\rho''}{N} \sin L \delta x_0 - \frac{\rho''}{N} \cos L \delta y_0 + (\lambda - L)'' \cos \varphi, \quad (85.10)$$

$$\xi = \cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0 - \\ - N (1 - e^2 \sin^2 B) \delta a' + M (1 - e^2 \sin^2 B) \sin^2 B \delta \alpha' + \xi'. \quad (85.11)$$

Отметим, что уравнения градусных измерений (85.9)–(85.11) соответствуют случаю, когда для редуцирования результатов измерений на поверхность референц-эллипсоида применен метод проектирования.

Решая уравнения (85.9) и (85.10) под условием минимума  $\sum (\xi^2 + \eta^2)$  или уравнение (85.11) под условием минимума  $\sum \xi^2$ , или все три уравнения совместно, получаем параметры эллипсоида, наилучшим образом подходящего

к фигуре геоида в окрестности расположения данной астрономо-геодезической сети.

Вывод полученных уравнений градусных измерений был сделан по Изотову [27, стр. 64–68].

Нетрудно видеть, что уравнения (85.9) и (85.10) соответствуют уравнениям (82.16) и (82.19), полученным ранее.

Выражение (85.11), как уравнение градусных измерений, играет важную роль. Из него наиболее точно определяется поправка к большой полуоси  $\delta a$ , т. е. линейный параметр эллипсоида. Из уравнения (85.9) этот параметр определится с меньшей точностью вследствие малой величины коэффициента, стоящего при  $\delta a'$ .

Заметим, что из уравнения (85.11) путем образования  $\xi - \xi'$  легко получается выражение влияния ошибок параметров эллипсоида на отступления от него геоида (квазигеоида).

Как отмечалось, из материалов астрономо-геодезических сетей сжатие  $\alpha$  определяется со значительно меньшей точностью, чем из результатов наблюдений искусственных спутников Земли или гравиметрических данных.

Если в первую очередь определить из этих наблюдений сжатие  $\alpha$ , то, полагая его известным ( $\delta \alpha = 0$ ), уравнение (85.11) примет вид

$$\xi - \xi' = [\cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0] - N (1 - e^2 \sin^2 B) \delta a'. \quad (85.12)$$

Первые три члена в правой части уравнения (85.12) суммарно выражают изменения аномалии высоты  $\xi$  вследствие изменения элементов ориентировки эллипсоида: второй член — то же, но вследствие изменения большой полуоси  $a$ .

Учитывая большую роль, которую играет уравнение (85.12), укажем приближенный, но простой геометрический путь его вывода.

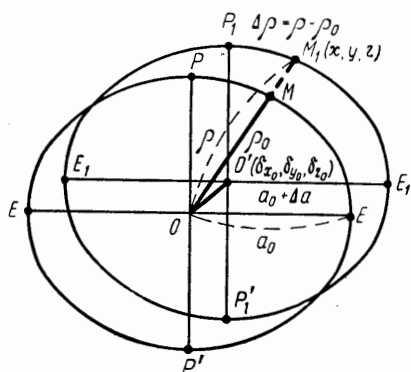


Рис. 162

Пусть  $PEP'P$  — эллипсоид с центром  $O$  и размерами  $a_0$  и  $\alpha_0$  (рис. 162). Возьмем второй эллипсоид  $P_1E_1P'_1P_1$  с размерами  $a + \delta a$  и  $\alpha_0$ , центр которого смещен относительно первого эллипсоида, а оси параллельны. Начало системы координат возьмем в точке  $O$  — центре первого эллипсоида. Координаты центра второго эллипсоида (точки  $O'$ ) пусть будут  $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ ; они будут выражать (вместе с условием параллельности соответствующих осей обоих эллипсоидов) ориентировку второго эллипсоида относительно первого.

Возьмем на втором эллипсоиде некоторую точку  $M_1$  с координатами  $x, y, z$  и соединим ее с центром начала координат, т. е. точкой  $O$ . Обозначим  $OM_1$  через  $\rho$ , а радиус-вектор  $OM$  через  $\rho_0$ . Пренебрегая различием в направлениях радиуса-вектора и нормали (равным максимально 11,8' согласно § 4), можно с достаточной точностью положить, что  $(\xi - \xi')$  равно  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ .

Для определения  $\Delta\rho$  напомним уравнение второго эллипсоида

$$\frac{(x - \delta x_0)^2 + (y - \delta y_0)^2}{(a_0 + \delta a)^2} + \frac{(z - \delta z_0)^2}{[(a_0 + \delta a)^2 (1 - 2\alpha_0)]} = 1. \quad (85.13)$$

Преобразуя это уравнение и принимая во внимание, что

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (85.14)$$

получаем

$$\rho = a_0 \left[ 1 + \frac{\delta a}{a_0} + \frac{\delta x_0 x}{a_0^2} + \frac{\delta y_0 y}{a_0^2} + \frac{\delta z_0 z}{a_0^2} - \frac{\alpha z^2}{a_0^2} \right]. \quad (85.15)$$

Далее, имея в виду, что

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos B \cos L \\ y &= \rho \cos B \sin L \\ z &= \rho \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (85.16)$$

и пренебрегая различием между  $\rho$  и  $a_0$ , в коэффициентах при поправках получаем

$$\rho = a_0 + \delta a + \cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0 - \alpha a_0 \sin^2 B. \quad (85.17)$$

Напишем на основании (59.15) уравнение первого эллипсоида в виде

$$\rho_0 = a_0 - \alpha a_0 \sin^2 B. \quad (85.18)$$

Сравнивая последние два выражения, находим

$$\Delta\rho = \xi - \xi' = \delta a + \cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0, \quad (85.19)$$

т. е. уравнение (85.12), если положить, что

$$N(1 - e^2 \sin^2 B) \delta a' = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \delta a \approx \delta a.$$

Полученные в настоящем параграфе уравнения могут быть использованы как дифференциальные формулы для вычисления поправок в координаты геодезических пунктов за переход от одного референц-эллипсоида к другому или, иначе, за переход от одной системы координат к другой. Такая задача, в частности, может возникнуть при следующих обстоятельствах: имеются две изолированные триангуляционные сети, которые были вычислены с применением различных параметров эллипсоидов. Требуется вычислить поправки к координатам одной системы за переход к другой. Для решения этой задачи необходимо



знать разности параметров обоих референц-эллипсоидов, т. е.  $\delta a$ ,  $\delta \alpha$ ,  $\delta B_0$ ,  $\delta L_0$ ,  $\delta \xi_0$ . Тогда, переходя от этих разностей к поправкам ориентирования  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$ , посредством выражений (85.6) находим искомые поправки координат за переход от одной системы к другой.

Обычно разности  $\delta a$  и  $\delta \alpha$  всегда известны; для вычисления разностей  $\delta B_0$ ,  $\delta L_0$ ,  $\delta \xi$  необходимо наличие геодезической связи между исходными пунктами обоих триангуляций; эта связь может быть осуществлена путем определения хотя бы одного пункта одной системы в другой. Тогда задача решается соответствующим применением тех же формул. Если  $\delta a$  и  $\delta \alpha$  известны, а  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$  и  $\delta z_0$  неизвестны, тогда поправки  $\delta B$ ,  $\delta L$  и  $\delta \xi$  можно вычислить только за влияние разностей  $\delta a$  и  $\delta \alpha$ .

В этом случае неучтенное влияние различия параметров ориентирования обоих референц-эллипсоидов войдет в результаты вычислений (например, при решении прямой или обратной задачи) как ошибки определения вычисленных величин. Но тогда по формулам (85.7) и (85.6) можно приближенно рассчитать величину этих ошибок путем использования при вычислениях некоторых возможных предельных различий в элементах ориентирования. Так как в среднем уклонения отвеса характеризуются величиной  $\pm 4''$ , а колебания высоты геоида относительно эллипсоида лежат в пределах 100—150 м, то максимальное различие  $\delta B_0$ ,  $\delta L_0$  обеих систем координат может быть принято  $\pm 6-8''$  и  $\delta \xi_0 = \pm 100$  м (это различие может быть большим, если ориентирование одного из референц-эллипсоидов выполнено по одному астрономическому пункту, расположенному в районе со значительными или большими уклонениями отвеса). Рассчитанные по формулам (85.6) и (85.7) значения  $\delta B$  и  $\delta L$  с принятием названных числовых значений  $\delta B_0$ ,  $\delta L_0$  и  $\delta \xi_0$  будут характеризовать возможные ошибки результатов вычислений, вызванные неучетом различия в параметрах ориентирования обоих эллипсоидов.

Если геодезическая связь между триангуляционными сетями, вычисленными с принятием различных местных референц-эллипсоидов, по каким-либо причинам не может быть осуществлена, то при наличии мировой гравиметрической съемки переход к одной системе координат может быть осуществлен следующим образом.

Для одного астрономо-геодезического пункта в каждой триангуляции на основе материалов гравиметрической съемки вычисляют по формулам типа формул Венинг-Мейнеса «абсолютные» уклонения отвесной линии, после чего переходят по известным формулам (63.1) к геодезическим координатам обоих пунктов. Если при выводе уклонений отвеса использованы материалы мировой гравиметрической съемки, то вычисленные указанным образом геодезические координаты этих пунктов, относящиеся к разным триангуляциям, будут отнесены к единому эллипсоиду — к общему земному эллипсоиду. Тем самым будет осуществлена связь между обеими системами координат.

Далее, в зависимости от условий поставленной задачи, нетрудно получить поправки к той или другой системе координат. Точность решения задачи изложенным методом будет определяться ошибками астрономических определений и ошибками вывода уклонений отвеса, зависящими главным образом от полноты использованных гравиметрических данных. Если при выводе уклонений отвеса будут использованы гравиметрические данные не для всей поверхности Земли, то ошибка в осуществлении такой связи будет зависеть от различия влияния аномалий силы тяжести неучтенных зон. Эта ошибка может быть и весьма малой — практически пренебрегаемой и весьма заметной — в зависимости от взаимного расположения обеих триангуляционных сетей, полноты использова-

ния гравиметрических данных, расположения зон, аномалии которых не были учтены при выводе уклонений отвеса относительно обоих астропунктов, и т. п. Ожидаемое значение этой ошибки в общем виде не может быть определено, но оно может быть с достаточной точностью рассчитано в каждом конкретном случае.

Изложенный путь решения задачи возможен при использовании гравиметрических данных на весьма значительной части земной поверхности, охватывающей, в частности, расположение обеих триангуляционных сетей; использование только местных гравиметрических съемок (вокруг взятых астрономических пунктов) не может привести к решению поставленной задачи и с этой точки зрения бесполезно.

Изложенные соображения в части решения частной задачи позволяют сделать один важный вывод общего характера: по завершении мировой гравиметрической съемки создается возможность соединения в единую систему всех триангуляций, расположенных на различных континентах, без непосредственных геодезических связей между ними.

Однако непосредственные геодезические связи необходимы для наиболее точного вывода параметров общего земного эллипсоида; чем обширнее триангуляция, использованная для составления уравнений градусных измерений (85.9), (85.10) и (85.11), тем надежнее определены параметры  $a$  (или  $W_0 - u_0$ ),  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$ .

#### § 86. Общие сведения о выводе параметров земного эллипсоида из астрономо-геодезических и гравиметрических данных

Решение задачи по выводу параметров земного эллипсоида и элементов гравитационного поля Земли рассматриваемым методом должно основываться на совместном использовании астрономо-геодезических и гравиметрических измерений; эти измерения, конечно, должны быть выполнены на значительной территории; при этом возможно использование измерений, выполненных на разных континентах и без непосредственной связи между собой.

Резкое различие в возможности выполнения астрономо-геодезических сетей и гравиметрических работ на поверхности Земли (возможность развития геодезических сетей только на суше, а гравиметрических работ на всей земной поверхности) приводит к тому, что влияние астрономо-геодезических данных на вывод параметра сжатия  $\alpha$ , определяемого гравиметрическими измерениями, становится весьма малым, практически неощутимым, а совместные определения становятся формальными. При наличии гравиметрической съемки на всей поверхности Земли или на большей ее части значение сжатия и при совместном использовании всех данных фактически определяется гравиметрическими данными. Гравиметрические работы, получившие развитие значительно позже астрономо-геодезических, в настоящее время далеко превзошли последние по охвату земной поверхности.

Исследования В. Ф. Еремеева и М. И. Юркиной по этому вопросу показывают, что в то время как гравиметрическая съемка с той или иной плотностью покрывает значительную часть поверхности Земли, градусные измерения, уже использованные для выводов местных эллипсоидов, покрывают малые доли земной поверхности. Поэтому один из возможных путей решения рассматриваемой задачи заключается в следующем.

Сжатие земного эллипсоида определяется из гравиметрических данных (см. § 59). Из градусных измерений определяются параметры, которые не могут быть вычислены из гравиметрических измерений, — полуось  $a$  и элементы ориентирования. До последнего времени этот путь и являлся наиболее целесообразным и был использован при выводе параметров эллипсоида Красовского. Несколько более подробное решение этой задачи рассмотрено в § 87.

В настоящее время такой путь устарел; наиболее точно сжатие определяется из наблюдений искусственных спутников Земли (глава XVI).

### § 87. Основные формулы определения параметров эллипсоида по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным

Положим, что сжатие Земли известно, гравиметрические работы выполнены на всей поверхности Земли или на большей ее части, имеется большая астрономо-геодезическая сеть; высоты астрономо-геодезических пунктов определены относительно начального футштока. Обработка астрономо-геодезической сети произведена по методу проектирования на некотором (предварительно установленном) референц-эллипсоиде.

По результатам астрономических и геодезических измерений вычисляем аномалии высот  $\xi = H - H^\gamma$  и составляющие уклонений отвесных линий

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi - B - 0,171'' \sin 2BH^\gamma \\ \eta &= (\lambda - L) \cos B \end{aligned} \right\}, \quad (87.1)$$

которые относятся к первоначально установленному референц-эллипсоиду.

Из результатов гравиметрической съемки по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса (или по более точным формулам Молоденского) для каждого астрономо-геодезического пункта вычисляем  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$ , которые уже будут отнесены к искомому земному эллипсоиду.

Далее из указанных вычислений получаем  $\xi - \bar{\xi}$ ,  $\xi - \bar{\xi}$ ,  $\eta - \bar{\eta}$ . Тогда на основании уравнений (85.9), (85.10), (85.11) пишем уравнения градусных измерений в виде

$$\xi - \bar{\xi} = \frac{1}{M} \sin B \cos L \delta x_0 + \frac{1}{M} \sin B \sin L \delta y_0 - \frac{1}{M} \cos B \delta z_0 - e^2 \sin B \cos B \delta a', \quad (87.2)$$

$$\eta - \bar{\eta} = -\frac{1}{N} \sin L \delta x_0 - \frac{1}{N} \cos L \delta y_0, \quad (87.3)$$

$$\xi - \bar{\xi} = \cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0 - N (1 - e^2 \sin^2 B) \delta a'. \quad (87.4)$$

Решение уравнений (87.2) и (87.3) или уравнений (87.4) по способу наименьших квадратов и приведет к выводу искомых параметров земного эллипсоида.

Если выполнена мировая гравиметрическая съемка, то уклонения  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\eta}$ , а также аномалии  $\bar{\xi}$  будут отнесены к общему земному эллипсоиду, тогда решение этих уравнений приведет к выводу параметров общего земного эллипсоида.

Нетрудно получить уравнения, в которых в качестве неизвестного вместо  $\delta a$  будет величина ( $W_0 - u_0$ ). Для упрощения вывода решим задачу только с главными членами. Примем

$$\gamma = f \frac{M}{a^2} \quad \text{и} \quad W = f \frac{M}{a},$$

тогда

$$\gamma a = W,$$

откуда

$$\delta a = \frac{dW}{\gamma} = \frac{W_0 - u_0}{\gamma}. \quad (87.5)$$

Полагая

$$N(1 - e^2 \sin^2 B) \delta a' = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \delta a \approx \delta a$$

и принимая во внимание (87.5), уравнение (87.4) примет вид

$$\xi - \bar{\xi} = \frac{W_0 - u_0}{\gamma} + \cos B \cos L \delta x_0 + \cos B \sin L \delta y_0 + \sin B \delta z_0. \quad (87.6)$$

Дифференцируя (87.6) по  $B$  и  $L$ , получаем уравнение для определения  $(W_0 - u_0)$ ,  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$  по разностям уклонов отвесных линий

$$\xi - \bar{\xi} = \frac{1}{M} \sin B \cos L \delta x_0 + \frac{1}{M} \sin B \sin L \delta y_0 - \frac{1}{M} \cos B \delta z_0 + \frac{W_0 - u_0}{M \gamma^2} \frac{d\gamma}{dB}, \quad (87.7)$$

$$\eta - \bar{\eta} = \frac{1}{N} \sin L \delta x_0 - \frac{1}{N} \cos L \delta y_0. \quad (87.8)$$

Решая уравнения (87.6), (87.7) и (87.8), находим неизвестные, т. е.  $W_0 - u_0$ ,  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$ .

Заметим лишь, что разность  $(W_0 - u_0)$  надежно определяется только из (87.6); из (87.7) эта величина определяется неуверенно вследствие малости коэффициента при ней.

Описанный в этом параграфе метод определения параметров земного эллипсоида следует считать основным, обеспечивающим наиболее точное решение задачи.

## § 88. Референц-эллипсоид Красовского.

### Исходные геодезические даты триангуляции СССР

Исследования проф. Ф. Н. Красовского, основанные на анализе и обработке материалов триангуляций, исполненных к 1930 г., показали, что эллипсоид Бесселя заметно отстает от размеров эллипсоида, наилучшим образом подходящего для территории СССР. Проф. Ф. Н. Красовский пришел к выводу, что большая полуось эллипсоида Бесселя преуменьшена; это полностью подтвердилось последующими исследованиями, когда было установлено, что большая полуось по Бесселю ошибочна на величину 850 м.

Исходя из большого научного значения исследований по установлению размеров и формы Земли, проф. Ф. Н. Красовский в начале тридцатых годов приступил к работе по выводу размеров эллипсоида на основании имеющихся материалов градусных измерений. Сначала эта работа выполнялась лично Ф. Н. Красовским, затем под его руководством продолжалась научными работниками ЦНИИГАиК. Непосредственное участие в этой большой работе принимал проф. А. А. Изотов. Исследования, продолжавшиеся почти 10 лет, позволили в 1940 г. рекомендовать для вычислений триангуляции новые размеры эллипсоида, вполне подходящие для территории СССР. После обсуждения результатов работы в научных и производственных кругах эти размеры эллипсоида были утверждены Постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля

1946 г., а эллипсоиду было присвоено имя Красовского. Размеры этого эллипсоида следующие:

большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м,

полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298,3$ .

При получении указанных размеров земного эллипсоида были использованы градусные измерения СССР, Западной Европы и США. Материалы градусных измерений СССР, протяженность дуг которых составляла к тому времени около 40 000 км, были впервые использованы для вывода размеров эллипсоида. Таким образом, для вывода новых значений размеров земного эллипсоида были использованы более обширные материалы, чем для всех других выводов. Это уже дает основание утверждать, что размеры эллипсоида Красовского в то время были наиболее приближающимися к размерам общего земного эллипсоида. При составлении уравнений градусных измерений применен «метод площадей»; при этом использованы результаты гравиметрической съемки для исключения местных волн геоида — для предварительного его «выравнивания». Такое привлечение гравиметрических данных для обработки градусных измерений было осуществлено впервые; оно оказалось возможным благодаря применению разработанного в СССР метода астрономо-гравиметрического нивелирования и наличию общей гравиметрической съемки. Лишь для незначительной части астрономо-геодезической сети СССР, использованной для вывода размеров эллипсоида, вместо гравиметрических поправок вводились топографо-изостатические редукции. К использованию теории изостазии пришлось прибегнуть в отдельных районах, где гравиметрическая съемка еще не была закончена.

При вычислении размеров эллипсоида Красовского были применены различные варианты обработки имеющихся материалов градусных измерений; указанные выше значения размеров эллипсоида Красовского получены из варианта, признанного наилучшим. Анализ результатов вычислений размеров эллипсоида из различных вариантов решения задачи позволил сделать ряд выводов и заключений, имеющих большую научную ценность в деле изучения общей фигуры Земли. Проведенные исследования дают основания считать, что размеры эллипсоида Красовского определены с ошибками в большой полуоси около  $\pm 60$  м и в полярном сжатии не более одной единицы в знаменателе.

Указанную точность вывода размеров земного эллипсоида следует считать высокой, отвечающей научным и практическим требованиям.

Надлежащее установление исходных геодезических дат для астрономо-геодезической сети СССР (вследствие чрезвычайно большой протяженности территории СССР) имеет также большое практическое значение. Порядок работ, выполненных в 1942—1943 гг. по установлению исходных геодезических дат, в общих чертах заключался в следующем.

Из обработки материалов градусных измерений в СССР были установлены широта  $B_0$ , долгота  $L_0$  и азимут  $A_0$  для исходного пункта, за который принят центр круглого зала Пулковской обсерватории. Для решения этой задачи (в отличие от задачи вывода размеров референц-эллипсоида) были использованы только материалы триангуляции СССР. Для вывода исходных геодезических дат необходимо, чтобы исходный пункт имел непосредственную надежную связь с используемыми градусными измерениями. Так как триангуляции Западной Европы и США такой связи с триангуляцией СССР не имели, то градусные

измерения этих стран и не могли быть использованы при решении настоящей задачи.

Кроме того, для контроля и независимого получения иным путем исходных геодезических дат был применен астрономо-гравиметрический метод, для чего в центральных районах страны, на специально выбранном пункте были выполнены с высокой точностью астрономические определения. Для обеспечения надежного вывода уклонений отвесных линий по гравиметрическим данным вокруг этого пункта выполнена гравиметрическая съемка сгущения.

Астрономические координаты пункта и азимут направления исправлены поправками, вычисленными по гравиметрическим данным. Полученные таким путем геодезические координаты сопоставлены с геодезическими координатами, переданными из Пулково; их сходимость получилась в пределах ошибок определений.

Указанный метод вывода исходных геодезических дат осуществлен впервые в Советском Союзе.

Таким образом, вывод параметров референц-эллипсоида Красовского был основан на применении методов, описанных в § 82—84. Методы, изложенные в последующих параграфах, были разработаны позднее; они не могли быть применены также и вследствие отсутствия в тридцатых годах необходимых данных, в первую очередь достаточных материалов гравиметрических съемок. Следовательно, характерными чертами вывода размеров эллипсоида Красовского являются:

- 1) отдельный вывод размеров эллипсоида и исходных геодезических дат;
- 2) применение астрономо-геодезического «метода площадей»;
- 3) установление размеров эллипсоида из несвязанных значительных астрономо-геодезических сетей и вывод исходных геодезических дат из триангуляции СССР — из всех астропунктов;
- 4) использование имеющихся гравиметрических материалов для исправления астрономических координат за местные уклонения отвеса, а при отсутствии этих материалов для этой цели — гипотезы изостазии.

Последние выводы параметров земного эллипсоида, основанные на использовании новейших материалов и методов, дают результаты, близкие к значениям параметров референц-эллипсоида Красовского. Это позволяет сделать важное заключение, что параметры эллипсоида Красовского установлены удачно, близки к параметрам общего земного эллипсоида и отвечают требованиям, предъявляемым к референц-эллипсоиду, как основной координатной поверхности.

# Глава XIV

## УРАВНИВАНИЕ

### АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

#### § 89. Общие сведения

Уравнивание больших астрономо-геодезических сетей, в частности сети СССР, наиболее обширной по сравнению с сетями других государств, представляет собой большую научно-техническую задачу. Число треугольников астрономо-геодезической сети СССР определяется многими тысячами.

К уравниванию астрономо-геодезической сети СССР, как сети высшего класса и основы для развития геодезических сетей более низших классов, предъявляются строгие требования. В результате уравнивания должны быть получены максимально возможные точные значения всех ее элементов и в наибольшей степени устранены влияния систематических ошибок. Конечно, качество и точность геодезической сети зависят в первую очередь от качества полевых измерений. Но если строгим уравниванием нельзя сделать сеть, имеющую невысокую точность полевых измерений, более точной, то хорошую в полевом исполнении сеть можно испортить применением неправильных методов и приемов ее обработки. Поэтому, учитывая значение астрономо-геодезической сети, необходимо для ее математической обработки применять продуманную и научно обоснованную программу и методику. Недостатки математической обработки астрономо-геодезической сети проявятся при обработке сетей всех последующих классов. Эти недостатки, в виде дополнительных ошибок исходных данных, отрицательно повлияют на точность всех геодезических сетей последующих классов.

Как показали исследования проф. Красовского, одним из важнейших условий правильной математической обработки астрономо-геодезической сети, а следовательно, и всей геодезической сети в целом является применение метода проектирования. В этом случае уравниваемые элементы сети на поверхности референц-эллипсоида находятся в определенной и точно установленной зависимости с результатами непосредственных измерений на поверхности Земли. Свободные члены условных уравнений, составленные с использованием проекций измеренных элементов на эллипсоид, являются функциями только ошибок измерений и не зависят от неточностей размеров и формы референц-эллипсоида и его ориентировки в теле Земли. Условные уравнения, составленные с использованием правильно редуцированных на поверхность эллипсоида измеренных величин, — математически строгие зависимости, точно вытекающие из геометрических свойств соответствующих фигур на поверхности эллипсоида. Поправки измеренных величин получатся одинаково точными независимо от принятых параметров референц-эллипсоида (при применении метода развертывания, как указывалось ранее, эти неточности и различия в параметрах референц-эллипсоида вызывают дополнительные и сложные деформации элементов сети). Следовательно, при применении метода проектирования строгость математической обработки астрономо-геодезической сети не пострадает, если будут взяты при ее уравнивании и не наилучшие размеры эллипсоида, что весьма существенно и важно. Правда, как уже отмечалось, практически необходимо, чтобы референц-эллипсоид геометрически был достаточно близок к геоиду. Во-первых, тогда расхождения между вычислен-

ными элементами на поверхности референц-эллипсоида и их действительными значениями на земной поверхности будут наименьшими, что практически весьма существенно во многих случаях использования геодезических координат; во-вторых, чем ближе располагаются указанные поверхности одна к другой, тем меньше редукции и, следовательно, с меньшей точностью нужно знать исходные величины для вычисления редукции.

Заметим, что в случае необходимости перехода после уравнивания сети к другим размерам и ориентировке эллипсоида никаких затруднений не возникнет; задача будет заключаться в перевычислении уравненных координат при помощи дифференциальных формул, причем без каких-либо нарушений строгости вычислений.

Одновременно заметим, что применение метода проектирования требует до уравнивания сети установления размеров и ориентировки референц-эллипсоида.

Итак, первая стадия математической обработки астрономо-геодезической сети — редуцирование измеренных величин на поверхность эллипсоида (глава XII).

После редуцирования выполняется уравнивание астрономо-геодезической сети. В этой части обработки обширных астрономо-геодезических сетей возникают существенные трудности.

Метод строгого уравнивания астрономо-геодезической сети путем совместного решения всех возникающих в сети условных уравнений под условием минимума суммы квадратов поправок направлений (или углов) до настоящего времени не мог быть применен вследствие его громоздкости. Возможности его применения открываются сейчас на основе использования быстродействующих электронных машин. Однако вопросы применения электронно-счетных машин к решению своеобразных уравнений, возникающих в астрономо-геодезической сети, еще требуют научных исследований и экспериментов; кроме того, как указывает проф. Ф. Н. Красовский [31], имеются сомнения в том, что результаты такого уравнивания будут наилучшими.

Учитывая огромные трудности, возникающие при совместном уравнивании всей астрономо-геодезической сети под условием минимума суммы квадратов ошибок непосредственно измеренных величин, можно представить себе метод последовательного уравнивания сети по «частям», когда каждая часть после уравнивания рассматривается как твердая. Этот способ уравнивания в чистом виде не может быть признан целесообразным, так как при его применении нарушается совместность уравнивания, что может вызвать дополнительные искажения отдельных элементов и частей триангуляции.

Астрономо-геодезическая сеть СССР, как известно, по построению представляет собой систему приблизительно квадратных полигонов, стороны которых равны в среднем 200 км. В вершинах полигонов (т. е. в пересечениях рядов триангуляций 1 класса), расположенных по меридианам и параллелям, имеются определенные из базисных сетей или из непосредственных измерений твердые значения длин сторон триангуляции и азимуты Лапласа. Благодаря наличию выходных сторон и азимутов Лапласа астрономо-геодезическая сеть разбивается на определенные и достаточно независимые части, которыми являются звенья триангуляции 1 класса, т. е. части рядов между двумя смежными вершинами полигонов 1 класса.

В связи с этим имеются основания рассматривать результаты измерений в каждом звене триангуляции 1 класса независимо от результатов измерений



в других звеньях. Поэтому возникла мысль заменить треугольники каждого отдельного звена геодезической линией, соединяющей конечные точки звена. В этом случае как бы независимыми и непосредственно измеренными величинами принимаются длины и азимуты этих геодезических линий; астрономо-геодезическая сеть обращается в систему полигонов, в которых измеренными величинами становятся длины и азимуты сторон полигонов.

Идея замены отдельных звеньев триангуляции геодезическими линиями была предложена известным немецким ученым Гельмертом еще в прошлом столетии; им же был разработан метод обработки астрономо-геодезической сети, включающий одновременно уравнивание ее и вывод размеров и ориентировки земного эллипсоида. Для обработки астрономо-геодезической сети СССР способ Гельмерта вследствие громоздкости не мог быть использован; кроме того, этот способ обработки сети основан на применении метода развертывания. По Гельмерту, предполагается, что измерения редуцированы на поверхность геоида, а редукции за переход от геоида к эллипсоиду пренебрегаемы.

### § 90. Понятие о методах уравнивания астрономо-геодезической сети СССР

Разработка предложений по уравниванию астрономо-геодезической сети СССР и соответствующих методов была выполнена профессором Ф. Н. Красовским. При этом он использовал идею замены звеньев триангуляции 1 класса геодезическими линиями. В первом варианте разработанного Ф. Н. Красовским метода уравнивания и примененного при обработке первых 9 полигонов триангуляции 1 класса в 1930—1932 гг. предусматривался следующий порядок уравнительных вычислений.

1. Строгое уравнивание каждого звена триангуляции 1 класса за возникающие в нем условия, включая базисные и азимутальные. Результатом этого этапа уравнительных вычислений будет вывод по уравненным направлениям длины и азимута геодезической линии, соединяющей конечные точки звена.

2. Совместное уравнивание образовавшейся после первого этапа вычислений системы полигонов, образованных геодезическими линиями, за координатные или полигональные условия с присоединением азимутальных условных уравнений. Результатами выполнения этого этапа вычислений будут уравненные значения длин и азимутов геодезических линий — сторон полигонов. Имея уравненные значения длин и азимутов сторон полигонов триангуляции 1-класса, вычисляют координаты вершин полигонов, значения которых уже будут окончательными.

3. Вставка отдельных звеньев между твердыми вершинами полигонов с присоединением базисного и азимутального условных уравнений. Эта вставка может выполняться по методу Урмаева. Результатами последнего этапа вычислений будут окончательные геодезические координаты всех пунктов триангуляции 1 класса.

При выполнении второго этапа — уравнивания полигонов — длина геодезической линии, соединяющей конечные точки звена триангуляции 1 класса, и азимут этой линии (точнее, углы  $\beta$  — разности азимутов геодезических линий и азимутов выходных сторон в вершинах полигонов, см. § 89) принимаются как непосредственно измеренные независимые величины.

В действительности это, конечно, не так: длины и азимуты геодезических линий не независимы, они являются сложными функциями одних и тех же

величин — уравненных направлений или углов в данном звене триангуляции 1 класса, а следовательно, они не являются независимыми.

Указанное допущение — отступление от правил способа наименьших квадратов, согласно которым условные уравнения должны составляться, принимая за измеренные и независимые величины направления (углы) на каждом пункте. В то же время изложенный выше способ Красовского имеет существенные достоинства. При его применении соблюдается требование совместности уравнивания всей сети в целом; выполнение этого требования вполне осуществимо даже для такой обширной сети, как астрономо-геодезическая сеть СССР. В Руководстве по высшей геодезии Красовского содержится указание о том, что, по некоторым данным, при замене звеньев триангуляции 1 класса геодезическими линиями деформации будут меньшими, чем при совместном уравнивании всех направлений (углов) сети — «при наличии слабых мест» в том или ином триангуляционном ряде. Конечно, такие «слабые места» всегда могут быть в большой астрономо-геодезической сети. Вывод длин и азимутов геодезических линий раздельно из каждого триангуляционного звена, учитывая сравнительно высокую точность определения длин и азимутов исходных сторон, имеет достаточно веские основания. Если считать эти определения безошибочными, то вывод длин и азимутов значений, независимо для отдельных звеньев, должен считаться точным.

Проф. Красовский, много занимавшийся вопросами уравнивания астрономо-геодезических сетей, придавал большое значение возможно точному выводу длин и азимутов геодезических линий, соединяющих конечные точки звеньев. Он, в частности, считал весьма важным уменьшение координатных невязок в полигонах при их совместном уравнивании. Для этой цели он разработал ряд новых предложений, основные из которых приняты при втором уравнивании астрономо-геодезической сети, выполненном к 1945—1946 гг. Эти новые предложения проф. Красовского, реализованные при втором уравнивании, предусматривали следующий порядок и программу уравнивательных вычислений:

1. Уравнивание звеньев триангуляции 1 класса за условия только фигур, полюсные и базисные.

2. Составление азимутальных условий по каждому звену с использованием при этом предварительно уравненных углов, полученных в результате выполнения пункта 1; совместное решение всех азимутальных условий с нахождением поправок в долготы и астрономические азимуты на пунктах Лапласа.

3. Вторичное уравнивание звеньев триангуляции по непосредственно измеренным направлениям за условия фигур, базисов и азимутальное; при составлении азимутальных условий астрономические долготы и азимуты исправляются поправками, найденными при выполнении пункта 2. После уравнивания вычисляют длину и азимут геодезической линии для каждого звена триангуляции 1 класса.

4. Уравнивание полигонов и окончательное вычисление координат вершин полигонов.

5. Вставка звеньев триангуляции между вычисленными, согласно пункту 4, координатами вершин полигонов, исходными сторонами и азимутами Лапласа.

Из сравнения этой программы уравнивания астрономо-геодезической сети с изложенной ранее следует, что общий план уравнивания остался прежним: 1) вывод длины и азимута геодезической линии по звену, 2) уравнивание полигонов и 3) вставка ряда. Но в последней программе уравнивания длина

и азимут геодезической линии получаются после третьего этапа вычисления. Это усложнение программы вызвано введением второго этапа, позволяющего получить поправки в измеренные астрономические долготы и азимуты с целью ослабления влияния систематических ошибок, повышения точности определения длин и азимутов геодезических линий и уменьшения невязок в полигональных условиях.

Выше изложены основные соображения и сведения о методах уравнивания обширной астрономо-геодезической сети на основе главным образом исследований проф. Ф. Н. Красовского; более глубокие и обширные соображения по этому вопросу читатель найдет в трудах Ф. Н. Красовского [31] и [32]. Вопросом уравнивания обширной астрономо-геодезической сети занимались и другие ученые, как, например, проф. А. А. Изотов, проф. Б. Н. Рабинович, проф. Н. А. Урмаев, инж. Д. А. Ларин и др.

В работах названных ученых содержатся выводы азимутальных, полигональных и других условных уравниваний.

Уравниванию триангуляции 1 класса СССР уделено большое внимание. Это объясняется высокими требованиями, предъявляемыми в СССР к геодезическим работам, и обширностью астрономо-геодезической сети. В средних и малых по размеру территории странах этот вопрос теряет свою сложность, и решение рассматриваемой задачи осуществляется достаточно просто.

Приведенные здесь сведения отражают передовые научные идеи и большой опыт СССР.

В недалеком будущем встанет задача выполнения нового совместного уравнивания астрономо-геодезической сети СССР. При разработке и установлении программы будущего совместного уравнивания сети СССР должен быть учтен ряд новых обстоятельств, из которых, в частности, следует отметить следующие:

уравниванию должна подвергнуться астрономо-геодезическая сеть, значительно превосходящая по числу пунктов и протяженности ту сеть, которая была уравнена в сороковых годах; изменившиеся соотношения точности измерений в сетях 1 и 2 классов; возможность и необходимость использования ЭВМ; привлечение и использование наблюдений ИСЗ и результатов их обработки и др.

В заключение отметим следующее. Уравнивательные вычисления преследуют две цели; устранение несогласий в геодезических построениях, вызванных ошибками измерений, и получение вероятнейших значений измеренных элементов сети и их функций. Первая цель должна достигаться во всех случаях в результате уравнивания; при достижении второй цели допускались те или иные отклонения, причем иногда приводящие к значительным деформациям, не соответствующим точности полевых измерений, но допустимых с точки зрения практических требований. В связи с возросшими современными требованиями к точности геодезических сетей на получение вероятнейших значений элементов сети должно быть обращено значительно большее внимание. Взаимное положение уравненных пунктов всех классов должно получиться не менее точно, чем положение, определяемое по результатам непосредственных измерений.

Не исключен в дальнейшем при некоторых обстоятельствах и отказ от уравнивания вообще; при соответствующей точности полевых данных уравнивание может оказаться не только ненужным, но даже вносящим некоторые дополнительные искажения или погрешности в результативные данные.

### III.

## АСТРОНОМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

### Глава XV

#### ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

##### § 91. Общие сведения

Астрономические работы играют важную роль при решении научных и практических задач геодезии.

Перечислим кратко основные случаи использования астрономических широт, долгот и азимутов в геодезии.

1. Астрономические определения широт и долгот на соответствующих пунктах триангуляции являются важной составной частью градусных измерений, имеющих целью определение размеров и формы Земли в целом.

2. Астрономические определения широт и долгот пунктов вместе с результатами геодезических измерений позволяют изучать геоид. Именно из сопоставления астрономических и геодезических координат и вывода уклонений отвесных линий возможно построение профилей геоида относительно референц-эллипсоида.

3. Астрономические наблюдения доставляют значения исходных геодезических координат для начального пункта триангуляции, от которого производят вычисление координат всех последующих пунктов. Иначе говоря, астрономические координаты позволяют осуществлять ориентировку референц-эллипсоида в теле Земли и определяют географическое положение триангуляции, а следовательно, и планшетов топографической съемки на поверхности Земли.

4. Астрономические азимуты после введения в них поправки за отклонения отвесных линий (азимуты Лапласа) контролируют в триангуляции и полигонометрии угловые измерения, обеспечивают постоянство ориентировки триангуляции и повышают точность определения координат пунктов.

5. Астрономические наблюдения позволяют определять координаты точек земной поверхности как опорных пунктов топографических съемок. При этом надо учитывать, что координаты астрономических пунктов искажены влиянием уклонений отвесных линий; поэтому пользоваться астрономическими пунктами в качестве опорных можно только при съемке в масштабе 1 : 100 000 и более мелких масштабах. Но именно в этих масштабах производятся съемки в труднодоступных районах и создание обоснования съемок в виде сети астрономических пунктов целесообразно с организационной и технико-экономической стороны.

6. Астрономические азимуты, определяемые на точках теодолитных ходов, являются хорошим независимым контролем измерений и обеспечивают существенное повышение точности этих ходов.

7. Астрономические наблюдения являются средством определения географических координат корабля на море и самолета в воздухе.

Изложенное показывает разнообразие и важность применения и использования координат пунктов и азимутов направлений на земной поверхности, определяемых методами астрономии.

Астрономия — одна из древнейших наук; она имеет своим предметом изучение природы, движения и распределения небесных светил и устройство Вселенной в целом. Астрономия — очень обширная наука; в настоящее время она разделяется на отделы, каждый из которых представляет собой по существу самостоятельную область знания.

Астрономические работы, выполняемые в геодезических целях и имеющие своей задачей определение географических координат на земной поверхности, основываются на двух отделах астрономии: сферической астрономии и практической астрономии.

Сферической астрономией называется отдел астрономии, в котором рассматриваются видимые движения светил, способы определения их положений на небесной сфере с применением различных систем координат и закономерности явлений, наблюдаемых с земной поверхности и происходящих в результате движения Земли вокруг Солнца и вращения ее вокруг оси.

Практической астрономией называется отдел астрономии, в котором рассматриваются методы и приемы астрономических измерений, инструменты, употребляющиеся при производстве этих измерений, а также способы обработки астрономических измерений, служащих для определения координат светил на небесной сфере и географических координат точек земной поверхности.

Другие разделы астрономии — небесная механика, астрофизика, космогония — изучают движение светил, физические и химические их свойства, развитие небесных тел и Вселенной в целом.

В настоящей главе рассматриваются вопросы сферической и практической астрономии, знание которых необходимо для определения географических координат точек земной поверхности.

## § 92. Системы координат, употребляемые в астрономии

Астрономические широты и долготы точек земной поверхности и азимуты направлений определяются из соответствующих наблюдений небесных светил — Солнца и звезд. Для этого необходимо знать положения светил как относительно Земли, так и относительно друг друга. Эти положения светил могут быть определены в целесообразно выбранных системах координат.

Принять для определения положения светил одну из обычно применяемых в математике систем линейных координат не представляется возможным, так как для этого необходимо точно знать линейные расстояния от некоторой точки, принимаемой за начало координат, до Земли и до всех светил; и даже если бы они были известны, то при вычислениях встретились бы непреодолимые практические трудности. Кроме того, расстояния от Земли до всех звезд чрезвычайно велики по сравнению с размерами Земли, и практически их можно считать одинаково бесконечно большими (исключением из этого положения являются некоторые ближайшие к Земле звезды и в особенности Солнце, расстояние от Земли до которого в среднем равно 149 500 000 км). Поэтому достаточно знать направление на каждое светило. Отсюда вытекает целесообразность следующего вспомогательного построения, позволяющего определять положение светил. Построим сферу произвольного радиуса; центр этой сферы пусть совпадает с той точкой, в которой находится наблюдатель.

Впрочем, последнее условие не имеет значения, так как расстояния до звезд велики по сравнению с радиусом Земли и радиусом ее орбиты, и, следовательно, за центр вспомогательной сферы можно принимать любую точку Земли и ее орбиты. Далее, будем считать, что все светила спроектированы прямыми линиями из центра этой вспомогательной сферы на ее внутреннюю поверхность. Задача заключается в определении положения проекции светила на этой сфере, называемой небесной сферой.

Положение любой точки на небесной сфере определяется как пересечение двух больших кругов, построенных известным образом. Проводя через данную точку круги, будем иметь различные системы координат. Эти круги целесообразно располагать в плоскостях, взаимно перпендикулярных. Положение каждого из двух кругов, проходящих через данную точку сферы, определяется дугой, отсчитываемой от соответствующего большого круга, принимаемого за начальный.

Как известно, Земля вращается вокруг своей оси с запада на восток. У наблюдателя, находящегося на земной поверхности, создается впечатление, что все небесные тела — звезды, Солнце, планеты движутся с востока на запад. Вращение Земли вокруг своей оси называется суточным движением, так как промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот относительно внешней точки, принимается за единицу времени, называемую сутками.

Рассмотрим системы координат, применяющиеся в астрономии; они различаются положением больших кругов, принимаемых за начальные.

1. **Горизонтная система координат.** Построим вспомогательную сферу (рис. 163). Продолжим отвесную линию в точке наблюдения  $A$  до пересечения со сферой в точках  $Z$  и  $Z_1$ . Эти точки называются соответственно точками зенита и надира. Большой круг, плоскость которого перпендикулярна к линии  $ZZ_1$ , примем за первый основной круг, относительно которого будем определять положение светила на небесной сфере. Этот круг называется небесным, или астрономическим, горизонтом. Проведем через центр сферы линию, параллельную оси вращения Земли, до пересечения со сферой; эта линия называется осью Мира. Пусть ось Мира пересекает вспомогательную сферу в точках  $P$  и  $P_1$ , называемых полюсами Мира. Большой круг небесной сферы  $PZSP_1Z_1N$ , проходящий через полюсы Мира и зенит места наблюдений (т. е. точку  $A$ ), называется астрономическим, или небесным, меридианом. Примем небесный меридиан за второй основной круг, относительно которого будем определять положение светила на сфере. Заметим, что горизонтальная линия  $AN$ , лежащая в плоскости меридиана, показывает направление на север, а противоположная ей  $AS$  — на юг, поэтому точки  $N$  и  $S$  называются соответственно точками севера и юга. Большой круг, проходящий через точки зенита и надира и перпендикулярный к плоскости меридиана, называется первым вертикалом; точки  $W$  и  $E$  пересечения этого круга с горизонтом называются соответственно точками запада и востока.

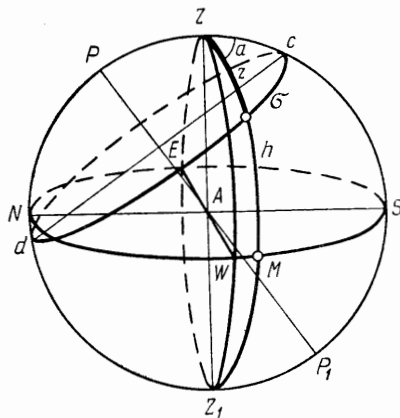


Рис. 163

В рассматриваемой системе координат положение светила  $\sigma$  определится:  
1) дугой большого круга  $Z\sigma$ , которая измеряет зенитное расстояние светила и обозначается через  $z$ ;

2) двугранным углом  $a$  между плоскостью астрономического меридиана  $PZP_1Z_1$  и вертикальной плоскостью  $Z\delta Z_1$ , называемым азимутом светила и отсчитываемым, как принято в астрономии, от южной части меридиана, по ходу часовой стрелки.

Иногда в астрономии вместо координаты  $z$  применяют высоту  $h$ , равную  $90^\circ - z$  и измеряемую дугой  $M\sigma$ ;  $h$  соответствует употребляемому в геодезии углу наклона.

Малые круги небесной сферы, параллельные плоскости горизонта, т. е. круги равных высот, называются **альмукантаратами**.

Если обозначить через  $A$  азимут при счете его от северной части меридиана, то

$$A = a \pm 180^\circ.$$

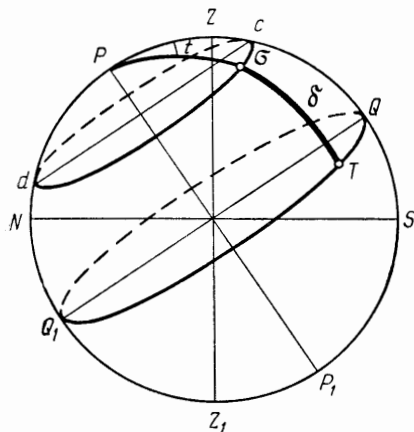


Рис. 164

Вследствие вращения Земли вокруг оси видимое из точки  $A$  положение светила  $\sigma$  на сфере непрерывно изменяется, совершая полный оборот в течение суток. Видимое движение светила в течение суток совершается по малому кругу  $cd\sigma$ , называемому **суточной параллелью**. Таким образом, для данной точки наблюдения  $A$  значения координат  $z$  и  $a$  будут различны в разное время суток. В разных точках земной поверхности отвесная линия имеет разное направление, поэтому в один и тот же момент времени, но для различных точек

наблюдений горизонтные координаты одного и того же светила также не будут одинаковыми.

В течение суток светило, совершая видимое движение, дважды пересекает астрономический меридиан — в точках  $c$  и  $d$ . Положение светила в меридиане называется **кульминацией** светила. Кульминация, ближняя к зениту, называется **верхней кульминацией**, дальняя — **нижней кульминацией**. В верхней кульминации зенитное расстояние достигает наименьшего значения, а в нижней кульминации — наибольшего. Азимут светил в моменты кульминаций имеет значение 0 или  $180^\circ$ .

2. **Первая экваториальная система координат.** Возьмем вспомогательную сферу и построим те же точки и круги. Кроме того, проведем большой круг  $QQ_1$ , плоскость которого перпендикулярна к оси Мира (рис. 164). Этот круг, называемый **астрономическим**, или **небесным экватором**, примем за один из кругов, относительно которых будем определять положение светила  $\sigma$  на сфере. В качестве другого координатного круга возьмем по-прежнему астрономический меридиан  $PZP_1Z_1$ . Тогда положение светила  $\sigma$  в рассматриваемой системе координат определится:

1) дугой  $\sigma T$ , которая называется **склонением** светила и обозначается буквой  $\delta$ ; круг  $PT$ , перпендикулярный к экватору, по которому отсчитывается склонение  $\delta$ , называется **кругом склонений**;



2) двугранным углом  $t$  между плоскостью астрономического меридиана и плоскостью круга склонений, называемым **часовым углом**; часовой угол отсчитывается от меридиана в направлении, противоположном направлению вращения Земли, от 0 до  $360^\circ$ ; иногда он отсчитывается в обе стороны от меридиана от 0 до  $\pm 180^\circ$ , в этом случае часовые углы, отсчитываемые к западу, считаются положительными, а к востоку — отрицательными.

В процессе суточного движения светило  $\sigma$  перемещается по параллели  $\sigma d$ , все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от астрономического экватора, равном склонению  $\delta$  светила; поэтому склонение  $\delta$  не зависит от суточного движения небесной сферы.

Часовой угол изменяется от 0 до  $360^\circ$  и притом пропорционально суточному вращению Земли. Так как вращение Земли происходит равномерно, то и изменение часового угла происходит равномерно; поэтому часовой угол принято выражать в часовой мере. Полный оборот светила на  $360^\circ$  соответствует  $24^h$ , отсюда следует, что

$1^h$	соответствует	$15^\circ$	дуги
$1^m$	»	$15''$	»
$1^s$	»	$15'''$	»

3. Вторая экваториальная система координат. Для объяснения этой системы координат дадим понятие о видимом годичном движении Солнца. Земля, являясь спутником Солнца, вращается вокруг него по орбите, имеющей вид эллипса. Полный оборот вокруг Солнца Земля делает в течение одного года. Наблюдателю же с Земли кажется, что Солнце движется относительно Земли, делая полный оборот вокруг нее в течение года; поэтому в сферической астрономии принято говорить о видимом годичном движении Солнца. Пересечение плоскости, в которой совершается видимое годичное движение Солнца, с небесной сферой называется **эклиптикой**. Плоскость эклиптики наклонена относительно астрономического экватора приблизительно на угол  $23,5^\circ$ . Пусть на рис. 165 изображена вспомогательная сфера. Большой круг  $K \Gamma K_1$  — будет являться эклиптикой.

В рассматриваемой системе координат основные круги, относительно которых определяется положение светила, следующие: небесный экватор и круг склонений, проходящий через  $\Gamma$  — точку пересечения экватора и эклиптики. В этой системе координат положение светила  $\sigma$  на небесной сфере определится:

- 1) склонением  $\delta$ ;
- 2) дугой  $\Gamma M$ , называемой **прямым восхождением** и обозначаемой буквой  $\alpha$ .

Точки пересечения экватора с эклиптикой —  $\Gamma$  и  $\underline{\Gamma}$  — называются соответственно точками **весеннего и осеннего равноденствия**. В этих точках Солнце находится 21 марта и 23 сентября, когда день равен ночи на всей Земле.

Положение экватора и точки весеннего равноденствия относительно светила не зависит от суточного движения небесной сферы и географических координат точки наблюдения  $A$ ; следовательно, от этих причин не зависят и координаты

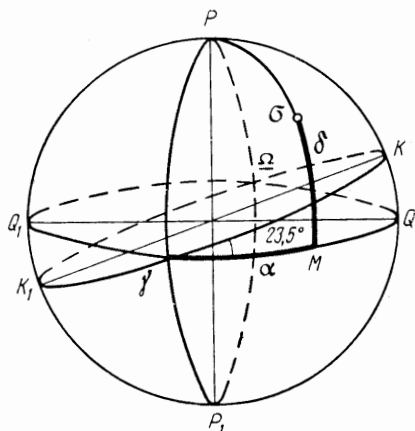


Рис. 165



светил  $\alpha$  и  $\delta$ . Экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  определяются из наблюдений звезд на обсерваториях и публикуются в специальных каталогах. При астрономических работах, производимых в полевых условиях для геодезических целей, эти координаты считаются известными.

### § 93. Связь между различными системами координат

Для установления связи между описанными выше системами координат построим на вспомогательной сфере все основные круги, определяющие положение светила в рассмотренных трех системах координат (рис. 166). Заметим, что угол между осью Мира  $PP_1$  и отвесной линией, измеряемый дугой  $PZ$ , равен  $90^\circ - \varphi$ , где  $\varphi$  — астрономическая широта точки  $A$ .

1. Связь между горизонтной ( $z$  и  $a$ ) и первой экваториальной ( $\delta$  и  $t$ ) системами координат. Так как горизонтные координаты зависят от места наблюдения, то при установлении связи между указанными координатами широту  $\varphi$  точки  $A$  следует считать известной.

Даны координаты в первой экваториальной системе ( $\delta$ ,  $t$ ); требуется вычислить горизонтные координаты ( $z$ ,  $a$ ).

Из треугольника  $PZ\sigma$  имеем:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t, \quad (93.1)$$

$$-\sin z \cos a = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t, \quad (93.2)$$

$$\sin z \sin a = \cos \delta \sin t. \quad (93.3)$$

Разделив (93.3) на (93.2), получим

$$\operatorname{tg} a = - \frac{\cos \delta \sin t}{\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t}. \quad (93.4)$$

Формулы (93.1) и (93.4) решают задачу. Для практических вычислений их обычно преобразуют.

Треугольник  $PZ\sigma$ , называемый параллактическим треугольником, имеет важное значение при решении многих задач сферической и практической астрономии. Угол треугольника при светиле  $\sigma$  называется параллактическим углом и обозначается через  $q$ .

2. Связь между первой и второй экваториальными системами координат. Эти системы имеют общую координату  $\delta$  — склонение светила, следовательно, требуется найти только связь между  $\alpha$  и  $t$ .

Из рис. 166 имеем:

$$t_r = t + \alpha, \quad (93.5)$$

где  $t_r$  — часовой угол точки весеннего равноденствия.

Далее будет показано, что часовой угол точки весеннего равноденствия  $t_r$  численно равен звездному времени  $s$  в момент наблюдения в данной точке. Поэтому уравнение (70.5) может быть переписано так:

$$s = \alpha + t. \quad (93.6)$$

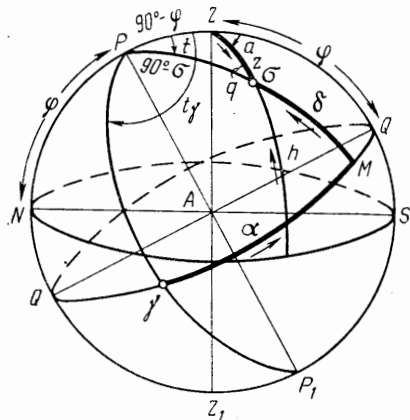


Рис. 166

3. Некоторые зависимости между астрономическими и географическими координатами.

А. Из рис. 167 видно, что дуги  $PN$  и  $ZQ$  измеряются дугой, равной географической широте  $\varphi$ ; следовательно, высота полюса над горизонтом  $h_P$  равна

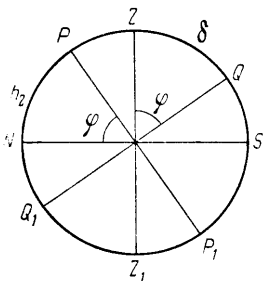


Рис. 167

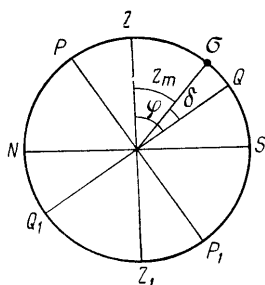


Рис. 168

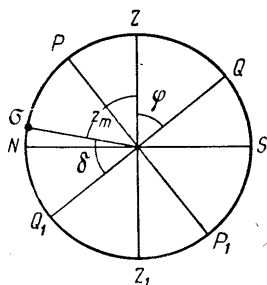


Рис. 169

склонению точки зенита  $\delta_Z$  и равна географической широте  $\varphi$  места наблюдения:

$$h_P = \delta_Z = \varphi. \quad (93.7)$$

Б. На рис. 168 показано положение светила  $\sigma$  в момент его прохождения через меридиан, т. е. в момент верхней кульминации. Если обозначить через  $z_m$  зенитное расстояние светила  $\sigma$  в верхней кульминации, то имеем

$$\varphi = \delta + z_m. \quad (93.8)$$

Сделав аналогичное построение, можно убедиться, что при кульминации светила к югу от экватора и точки зенита ( $\delta$  отрицательно) также имеем

$$\varphi = \delta + z_m.$$

При верхней кульминации светила между точками  $Z$  и  $P$

$$\varphi = \delta - z_m. \quad (93.9)$$

Для нижней кульминации светила (рис. 169) напомним:

$$\varphi = 180^\circ - (\delta + z_m). \quad (93.10)$$

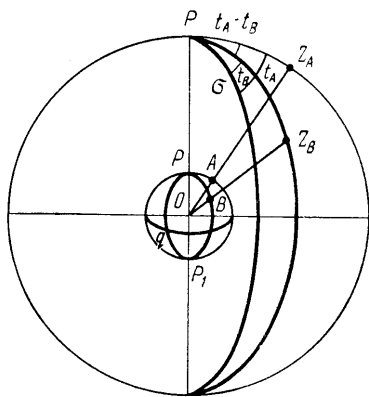


Рис. 170

В. Разность долгот двух точек земной поверхности равняется разности часовых углов одного и того же светила, определенных в один и тот же момент в этих двух точках.

На рис. 170 изображена вспомогательная небесная сфера, в центре которой находится земной шар. Возьмем на поверхности земного шара две точки  $A$  и  $B$ , расположенные на разных меридианах, имеющих долготы  $\lambda_A$  и  $\lambda_B$ .

Возьмем некоторое светило  $\sigma$ ; часовые углы его для точек  $A$  и  $B$ , считаемые в один физический момент, пусть будут  $t_A$  и  $t_B$ ;  $OAZ_A$  и  $OBZ_B$  — отвесные линии в точках  $A$  и  $B$ , продолженные до пересечения с небесной сферой. Из чертежа видно, что плоскости земных меридианов, проходящие через точки  $A$  и  $B$ ,

совпадают с плоскостями небесных меридианов в тех же точках. Следовательно, угол между плоскостями земных меридианов, равный разности долгот этих меридианов, равен углу между плоскостями небесных меридианов, т. е. разности часовых углов светила, считаемых в один физический момент. Таким образом,

$$\lambda_A - \lambda_B = (t_A - t_B). \quad (93.11)$$

#### § 94. Изменения координат, происходящие от суточного движения

1. Изменение горизонтных координат  $z$  и  $a$ . Горизонтные координаты всех светил — зенитное расстояние  $z$  и азимут  $a$  — в течение суток непрерывно изменяются вследствие видимого движения небесной сферы, причем это изменение происходит неравномерно.

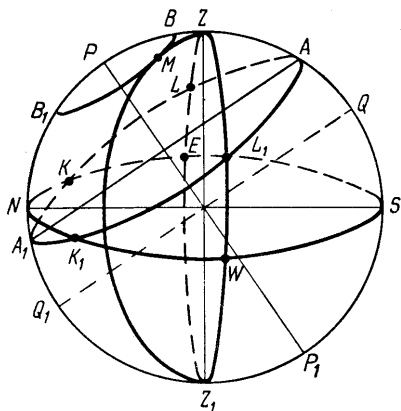


Рис. 171

Пусть видимое движение некоторого светила совершается по суточной параллели  $AA_1$  (рис. 171). В восточной части неба, в точке  $k$ , светило восходит, совершая видимое движение с востока на запад. В точке  $k$  светило имеет зенитное расстояние, равное  $90^\circ$ , и некоторый азимут. По мере суточного движения зенитное расстояние уменьшается, достигая минимума в тот момент, когда светило проходит меридиан в точке  $A$ ; в этот момент азимут светила равен нулю (если оно кульминирует к югу от точки зенита). После прохождения через меридиан зенитное расстояние начинает увеличиваться и в момент прохождения через плоскость го-

ризонта в точке  $k_1$  опять достигает  $90^\circ$ ; в точке  $A_1$ , в момент нижней кульминации, азимут светила равен  $180^\circ$ , а зенитное расстояние достигает максимальной величины. Затем светило движется по направлению к точке  $k$ , и его зенитное расстояние снова уменьшается. Такая картина повторяется каждые сутки.

Движение светила по суточной параллели  $AA_1$  совершается равномерно, но изменение координат  $z$  и  $a$  происходит неравномерно. Дифференцируя формулы (93.1) и (93.2), легко находим аналитические выражения для изменения  $z$  и  $a$ , которые приводим в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= 15 \cos \varphi \sin a \Delta t \\ \Delta a &= 15 \left( \sin \varphi + \cos \varphi \frac{\cos a}{\operatorname{tg} z} \right) \Delta t \end{aligned} \right\}, \quad (94.1)$$

или

$$\Delta a = 15 \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} \Delta t, \quad (94.2)$$

где  $\Delta z$  и  $\Delta a$  выражены в дуговой мере, а  $\Delta t$  — в часовой мере.

Из формул (94.1) и (94.2) видно, что скорость изменения зенитного расстояния достигает минимума в моменты верхней и нижней кульминаций, а скорость изменения азимута достигает максимума в момент верхней кульминации, скорость же изменения зенитного расстояния достигает максимума при прохождении светила через первый вертикал.

Рассмотрим изменение горизонтных координат для случая, когда верхняя кульминация происходит на меридиане между полюсом и точкой зенита, например, в точке  $B$ , а суточная параллель изображается кругом  $BB_1$  (см. рис. 171). В этом случае зенитное расстояние в общем изменяется так же, как и в предыдущем случае. Но в изменении азимута имеется существенная разница: в момент верхней кульминации в точке  $B$  азимут светила равен  $180^\circ$ , а не  $0^\circ$ . При суточном движении азимут уменьшается, достигая своего минимального значения в некоторой точке  $M$ , в которой вертикал  $ZMZ_1$  будет касаться суточной параллели светила. Это положение светила называется элонгацией светила (в данном случае — западной элонгацией). После прохождения светила через точку элонгации азимут его начинает увеличиваться и при достижении нижней кульминации опять становится равным  $180^\circ$ . Аналогичная картина будет наблюдаться и в восточной стороне неба, но в этом случае изменения азимута будут обратными. Вследствие касания вертикала  $ZMZ_1$  суточной параллели  $BMB_1$  в момент элонгации параллактический угол  $q = PMZ$  равен  $90^\circ$ .

Из описанного хода изменения азимута светила, имеющего элонгацию, следует, что в момент элонгации изменение азимута светила равно нулю, что также видно из формулы (94.2).

Из чертежа видно, что светило имеет элонгацию при

$$\delta > \varphi. \quad (94.3)$$

2. Изменение координат первой экваториальной системы. Склонение  $\delta$  светила от суточного движения небесной сферы не зависит, так как движение светила происходит по суточной параллели, все точки которой имеют одинаковое склонение.

Вторая координата — часовой угол  $t$  светила — изменяется; как было сказано выше, изменение  $t$  происходит в течение суток равномерно, от 0 до  $360^\circ$  или от 0 до  $24^h$ . В момент прохождения через меридиан в верхней кульминации часовой угол светил равен нулю. Часовой угол отсчитывается от меридиана, следовательно, он зависит от долготы места и не зависит от широты.

3. Изменение координат второй экваториальной системы. Координаты этой системы при суточном вращении небесной сферы не изменяются. О постоянстве склонения при суточном вращении небесной сферы было сказано выше. Прямое восхождение  $\alpha$  от суточного вращения небесной сферы также не зависит, так как эта координата отсчитывается от точки весеннего равноденствия, которая имеет видимое суточное вращение, как и все светила небесного свода. Следовательно, положение светил относительно точки весеннего равноденствия не изменяется.

Так как эта система координат не связана с горизонтом и меридианом места, то она не зависит от широты и долготы места наблюдения.

## § 95. Прохождение светил через некоторые основные круги небесной сферы

Задача заключается в определении времени, зенитного расстояния и азимута светила при прохождении его через заданный круг небесной сферы. Рассмотрим прохождение светила через меридиан, первый вертикал и точку элонгации.

1. Прохождение светила через меридиан. Светило два раза в сутки проходит через меридиан — в верхней и нижней кульминациях. В верхней кульминации:

а) если светило кульминирует к югу от точки зенита, т. е.  $\delta < \varphi$ , то при нахождении светила в меридиане  $t = 0$  и на основании формулы (93.6)

$$s = \alpha. \quad (95.1)$$

На основании формулы (93.8) получим

$$\left. \begin{aligned} z_m &= \varphi - \delta \\ a &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (95.2)$$

б) если светило кульминирует между точками полюса и зенита, то по-прежнему

$$s = \alpha. \quad (95.3)$$

На основании формулы (93.10) получим

$$\left. \begin{aligned} z_m &= \delta - \varphi \\ a &= 180^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (95.4)$$

В нижней кульминации

$$s = \alpha \pm 12^h, \quad (95.5)$$

на основании формулы (93.11)

$$\left. \begin{aligned} z_m &= 180^\circ - (\varphi + \delta) \\ a &= 180^\circ \end{aligned} \right\}. \quad (95.6)$$

2. Прохождение светила через первый вертикал. При прохождении светила через первый вертикал имеем: в западной части небесной сферы  $a_W = 90^\circ$ , в восточной —  $a_E = 270^\circ$ .

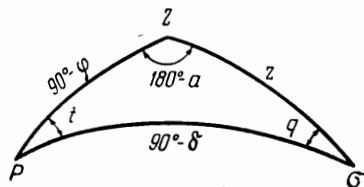


Рис. 172

Из параллактического треугольника  $PZ\sigma$  (рис. 172), приняв  $a = 90^\circ$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \cos t &= \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi} \\ \cos z &= \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (95.7)$$

На основании формулы I (93.6) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{для западной части небесной сферы } s_W &= \alpha + t \\ \text{» восточной » » » } s_E &= \alpha - t \end{aligned} \right\}. \quad (95.8)$$

В данном случае под  $t$  подразумевается абсолютное значение угла, которое следует считать положительным в западной части и отрицательным — в восточной; этим и объясняется знак минус в последней формуле.

3. Элонгация светила. При элонгации светила  $q = 90^\circ$ ; следовательно, параллактический треугольник является прямоугольным с прямым углом при вершине  $\sigma$ . Из этого треугольника имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos t &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta} \\ \cos z &= \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} \\ \sin a' &= \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (95.9)$$

где  $a' = 180^\circ - a$ . Далее, по-прежнему

$$\left. \begin{aligned} s_W &= \alpha + t \\ s_E &= \alpha - t \end{aligned} \right\}. \quad (95.10)$$

Азимуты звезд в моменты западной и восточной элонгации вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_W &= 180^\circ + a', \\ a_E &= 180^\circ - a'. \end{aligned}$$

### § 96 Понятие о прецессии, нутации, собственных движениях звезд и их влиянии на координаты светил

До сих пор мы считали, что взаимное положение плоскостей экватора и эклиптики неизменно на небесной сфере, что точка весеннего равноденствия занимает постоянное положение относительно звезд, и, следовательно, координаты  $\alpha$  и  $\delta$  звезд постоянны. Однако точные наблюдения, выполненные за длительный период, показали, что координаты всех звезд изменяют свое значение и эти изменения имеют систематический и закономерный характер. Ось вращения Земли, определяющая положение экватора, не сохраняет постоянного направления в пространстве относительно направлений на светила; она непрерывно перемещается, и полюс Мира описывает на небесной сфере сложную кривую, в общих чертах напоминающую окружность малого круга с центром в полюсе эклиптики.

Плоскость эклиптики, а следовательно, и ее полюсы также изменяют, хотя и незначительно, свое положение относительно направлений на светила. Таким образом, изменение взаимного положения полюса экватора относительно полюса эклиптики является следствием перемещения в пространстве обоих полюсов.

Причинами, вызывающими изменения в положении полюсов, являются возмущающие действия притяжения Луны, Солнца и планет. Они объясняются законами небесной механики.

Сложное движение, которое имеет полюс экватора, может быть представлено совокупностью многих простых движений, имеющих различные периоды. Одним из простых движений и является равномерное вращение полюса экватора вокруг полюса эклиптики по малому кругу под углом около  $23,5^\circ$ . Точка, имеющая такое простое равномерное движение, называется *средним полюсом*, а движение — *прецессией*. Полный оборот среднего полюса вокруг полюса эклиптики совершается в период около 26 000 лет.

Движение среднего полюса следует рассматривать как среднее выравненное движение полюса экватора. В действительности, кроме этого движения, полюс совершает другие движения с более короткими периодами. В совокупности эти короткопериодические движения слагаются таким образом, что точка

действительного положения полюса на сфере, или, как говорят, истинный полюс, вращается вокруг среднего полюса по некоторой волнообразной кривой, напоминающей в общем эллипс с полуосями, приблизительно равными 7 и 9". Такое движение истинного полюса вокруг среднего называется нутацией. Слагаясь, прецессионное и нутационное движения полюса обуславливают поступательное волнообразное его перемещение по небесной сфере, в общем виде изображенное на рис. 173. На этой фигуре малый круг  $PP$  — воображаемый путь среднего полюса, волнообразная кривая — путь истинного полюса.

Вследствие прецессии и нутации точка весеннего равноденствия как точка пересечения экватора и эклиптики изменяет свое положение на небесной сфере.

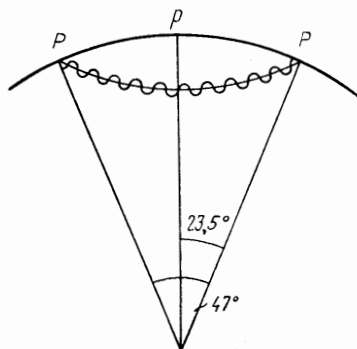


Рис. 173

На основании наблюдений и теоретических расчетов установлено, что точка весеннего равноденствия перемещается вследствие прецессии по экватору и эклиптике навстречу годичному движению Солнца ежегодно на величину 50,2". Поэтому экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  с течением времени изменяют свое значение; эти изменения незначительны, однако они должны учитываться. В звездных каталогах непременно указывается время, или, как говорят, эпоха, к которой относятся приведенные в каталоге значения координат.

Таким образом, экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  светил, выбираемые из звездного каталога, должны быть предварительно исправлены поправ-

ками, выражающими их изменения, происшедшие за период между данной датой и эпохой, для которой приведены значения координат. Формулы для вычисления этих поправок приводятся в подробных курсах астрономии.

Координаты светил, отнесенные к действительным положениям полюса, экватора и точки весеннего равноденствия, называются истинными координатами светила; координаты светил, отнесенные к средним положениям полюса, экватора и точки весеннего равноденствия, называются средними координатами.

Кроме этого, координаты звезд  $\alpha$  и  $\delta$  изменяются вследствие собственного движения звезд, происходящего для разных звезд в различных направлениях и с различной скоростью. В сферической астрономии под собственным движением звезд понимается проекция их действительного движения на небесную сферу. Как правило, эти движения очень малы. Годовое перемещение звезд по небесной сфере для удобства разлагается на две составляющие — по склонению и прямому восхождению; оно выводится из точных экспериментальных наблюдений, выполняемых через значительные промежутки времени. Зная эти составляющие собственного движения звезд за год, легко вычислить соответствующие поправки за период времени, отделяющий данный момент от эпохи, к которой относится звездный каталог.

## § 97. Измерение времени

Из изложенного выше следует, что значения горизонтных координат  $z$  и  $a$ , а также одной координаты в первой экваториальной системе — часового угла  $t$  — зависят от времени, изменяются с течением времени. Астроно-

мические наблюдения светил в общем случае заключаются в измерении вертикальных и горизонтальных углов между светилами и некоторыми направлениями, принимаемыми в точке наблюдения за неизменные, — направлением на зенит, направлением меридиана, направлением на постоянный земной предмет. Но видимое положение светил вследствие суточного вращения Земли изменяется, поэтому при астрономических измерениях, как правило, указывают тот момент времени, в который они были исполнены.

Отсюда вытекает необходимость включения в круг вопросов сферической и практической астрономии вопроса о времени, единице времени, способах измерения времени.

Измерить какую-либо величину — значит найти отношение одного значения этой величины к другому, принимаемому за единицу. Эта единица измерения должна быть однородна с измеряемой величиной и по возможности постоянна. Следовательно, в основу измерения времени целесообразно положить постоянное движение с постоянной скоростью, иначе говоря, строго равномерное движение. Создать искусственно длительное и равномерное движение чрезвычайно трудно, поэтому приходится искать такое движение в природе. Но к этому движению предъявляется еще требование, чтобы оно (движение) сопровождалось некоторыми явлениями, повторяющимися строго периодически, через определенные и постоянные отрезки времени, с тем чтобы каждый из них мог быть принят за единицу измерения времени.

Вращение Земли вокруг своей оси является одним из наиболее равномерных движений в природе; это движение сопровождается периодически повторяющимися явлениями, доступными наблюдению человека. Естественно, что это движение — вращение Земли вокруг своей оси — было принято за основу для измерения времени и до самого последнего времени в течение многих столетий служило единственным и окончательным исходным эталоном для установления единиц измерения и исчисления времени. Именно, промежутки времени, в течение которого Земля, вращаясь вокруг своей оси, делает один оборот, и принимался за основную единицу времени, называемую сутками.

Однако в последнее десятилетие в связи с возросшей точностью измерений, а также результатами обработки высокоточных астрономических наблюдений было установлено, что вращение Земли вокруг оси не может считаться строго равномерным; был выявлен ряд неравномерностей во вращении нашей планеты — вековых, периодических, сезонных, а также неравномерностей нерегулярного, неправильного характера; последние, именно вследствие такого характера отступления от равномерного движения, не могут быть точно заранее предвычислены или получены экстраполированием на основе ранее выполненных измерений и определений.

Причины, вызывающие неравномерность вращения Земли, не могут считаться окончательно установленными. Вековые изменения (замедление) вращения Земли объясняются приливным трением, связанным с расходом энергии на берегах замкнутых морей. Периодические (сезонные) изменения скорости вращения Земли связаны с периодом года и характерными для этого периода природными явлениями; например, одной из причин сезонных изменений скорости является действие ветров и их взаимодействие с земной поверхностью; перераспределение масс на поверхности Земли и в атмосфере, обусловленное сменой времен года, также вызывает изменение скорости ее вращения. Существует гипотеза о том, что неправильные колебания вращения Земли вызваны



перемещающейся в теле Земли материей. Колебания скорости вращения могут быть связаны с приливами в Земле, изменениями давления воздуха, циркуляцией воды в океанах, вертикальными движениями земной коры, таянием льдов и т. п.; все эти физические процессы, происходящие на Земле и в Земле, оказывают то или иное влияние на скорость вращения Земли.

Установление факта неравномерности в скорости вращения Земли вокруг своей оси и, следовательно, колебаний продолжительности суток не исключает целесообразности использования последних как единицы измерения времени. Приходится только считаться с отклонением их действительной продолжительности от некоторой продолжительности «идеальных» суток, которые соответствовали бы постоянному и равномерному движению; это возможно путем введения поправки в исчисление времени, основанном на использовании наблюдений продолжительности суток, т. е. периода непосредственно измеряемого, фактического времени вращения Земли вокруг оси. Для наглядности укажем, что вращающуюся Землю можно рассматривать как ошибочно идущие часы и использовать общепринятые понятия, употребляемые в жизни при измерении времени. Поправку времени  $T$ , которую следует прибавить к даваемому «Землей — часами» времени, можно рассматривать как поправку за ход часов. Под ходом часов в данном случае подразумевается изменение скорости вращения Земли, отнесенное к какой-либо единице изменения времени — суткам, году, секунде и т. д. Обычно используется суточный ход Земли — часов, показывающий на сколько за 24 часа она отстает (положительный ход) или уходит вперед (отрицательный ход). Время, исправленное поправкой за неравномерное вращение Земли, называется эфемеридным.

Теперь остановимся на методах и принципах измерения времени без учета неравномерностей в движении Земли, т. е. условно полагая, что вращение ее вокруг оси происходит строго равномерно. Некоторые дополнительные и более конкретные сведения об определении эфемеридного времени изложены далее.

Движение всегда относительно, поэтому положенное в основу измерения времени движение — вращение Земли вокруг своей оси — мы должны наблюдать только относительно других тел — Солнца, звезд, Луны и т. п.

В качестве точки, относительно которой определяется движение Земли вокруг своей оси, целесообразно выбирать такое тело или точку, движение которых хорошо изучено как относительно светил и точек небесной сферы, так и относительно Земли. В настоящее время за таковые точки принимаются точка весеннего равноденствия и центр Солнца. Фиксируя обороты Земли вокруг своей оси относительно точки весеннего равноденствия или Солнца, мы получаем различные единицы измерения времени — з в е з д н ы е и с о л н е ч н ы е.

Промежутки времени от принятого начала счета времени до данного момента, выраженные в звездных или солнечных единицах, называют соответственно з в е з д н ы м и с о л н е ч н ы м в р е м е н е м. Но следует твердо уяснить, что это не два каких-либо времени; время как форма существования материи едино; это лишь два различных способа, приема измерения времени, лишь выражение данного промежутка времени в различных единицах измерения и от разного начала счета времени.

Рассмотрим несколько подробнее различные приемы измерения времени, методы фиксации моментов времени и связь между различными системами измерения и исчисления времени.

1. З в е з д н о е в р е м я. За единицу звездного времени принимают промежуток времени, в течение которого Земля делает один полный оборот

вокруг своей оси относительно точки весеннего равноденствия. Эта единица времени называется *звездными сутками*.

За начало счета звездных суток принимается момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия в меридиане данного места. Следовательно, *звездными сутками называется промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями точки весеннего равноденствия в меридиане данного места*. Звездные сутки подразделяются на 24 звездных часа, звездный час — на 60 звездных минут, звездная минута — на 60 звездных секунд.

Промежуток времени, считаемый в данном месте наблюдения от указанного начала счета звездных суток и выраженный в звездных сутках, часах, минутах и секундах, называется *местным звездным временем* и обозначается буквой  $s$ .

В тот момент, когда точка весеннего равноденствия находится в верхней кульминации, т. е. в меридиане места наблюдения, часовой угол ее  $t_r$  равен нулю; в тот же момент, являющийся началом звездных суток, имеем  $0^h$  местного звездного времени.

В течение последующих суток часовой угол точки весеннего равноденствия будет равномерно изменяться от 0 до  $360^\circ$ , или в часовой мере от 0 до  $24^h$ , местное звездное время также будет равномерно изменяться от 0 до  $24^h$ . Например, через час звездного времени после верхней кульминации точки весеннего равноденствия часовой угол ее будет равен  $15^\circ$  в угловой мере и  $1^h$  — в часовой мере.

Следовательно, звездное время численно равно часовому углу точки весеннего равноденствия, т. е.

$$s = t_r. \quad (97.1)$$

Звездные сутки в астрономии являются основной единицей измерения времени.

Так как на основании (93.5) имеем

$$t_r = t + \alpha,$$

то, принимая во внимание выражение (97.1), получим следующее равенство:

$$s = \alpha + t. \quad (97.2)$$

Момент начала звездных суток в различных местах наблюдений будет разным, так как этим моментом является момент прохождения точки весеннего равноденствия через меридиан места наблюдения. Поэтому звездное время в один и тот же момент для точек, не лежащих на одном меридиане, будет разное.

Так как звездное время численно равно часовому углу точки весеннего равноденствия, а разность часовых углов какого-либо светила в один и тот же физический момент равна разности долгот этих двух точек, то отсюда вытекает важное следствие: разность местных звездных времен, считаемых в один физический момент в двух точках земной поверхности, численно равна разности долгот этих двух точек, т. е.

$$\lambda_A - \lambda_B = s_A - s_B, \quad (97.3)$$

где  $\lambda_A, \lambda_B$  — долготы двух точек  $A$  и  $B$ , а  $s_A$  и  $s_B$  — местное звездное время в точках  $A$  и  $B$ , считаемое в один физический момент.

2. Солнечное время. При измерении времени по Солнцу за точку на небесной сфере, относительно которой определяется промежуток времени, в течение которого Земля делает полный оборот вокруг своей оси, принимается центр Солнца. Но видимое движение Солнца существенно отличается от видимого движения других светил. Так как Земля вращается вокруг Солнца по орбите (имеющей вид эллипса), совершая полный оборот в течение одного года, то положение Солнца относительно точки весеннего равноденствия непрерывно изменяется. Поэтому солнечные и звездные единицы времени не равны между собой.

В астрономии применяются два рода солнечного времени: истинное и среднее. Единицами измерения времени по Солнцу являются, соответственно, истинные и средние сутки.

Истинными солнечными сутками называют промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями центра Солнца в меридиане данного места. Момент верхней кульминации центра Солнца называют истинным полуднем. Начало счета истинного времени ведется от истинного полудня.

На основании рассуждений, аналогичных тем, которые были приведены в отношении звездного времени, приходим к выводу, что мерой солнечного времени может служить часовой угол центра видимого (истинного) Солнца  $t_{\odot}$ . Иначе говоря, истинное солнечное время численно равно часовому углу истинного Солнца. Истинное время обозначается через  $t_{\odot}$ . Истинное солнечное время, отсчитанное от предшествующей полночи, обозначается через  $m_{\odot}$ ;  $m_{\odot} = t_{\odot} + 12^h$ .

Видимое суточное движение Солнца складывается из видимого суточного вращения небесной сферы и суточного перемещения Солнца, происходящего вследствие его видимого годичного движения, обусловленного обращением Земли вокруг Солнца. Но скорость движения Земли вокруг Солнца различна в разных местах земной орбиты, т. е. в разные времена года; видимое годичное движение Солнца происходит не по экватору, а по эклиптике, плоскость которой наклонена по отношению к плоскости экватора на угол около  $23,5^{\circ}$ . Как следствие этих двух причин, скорость видимого суточного движения Солнца неодинакова, а следовательно, продолжительность истинных суток в различные времена года различна. Непостоянство продолжительности истинных суток делает неудобным выражение промежутков времени в единицах истинного времени вследствие непостоянства единицы измерения.

Практически для измерения времени по Солнцу пользуются так называемым средним солнечным временем. Представим себе, что по экватору равномерно движется точка со скоростью, равной средней годовой скорости истинного Солнца; иначе говоря, эта точка, двигаясь равномерно, совершает полный видимый оборот по экватору в течение одного года, т. е. в тот же период, что и истинное Солнце. Эту точку называют средним экваториальным Солнцем. Среднее экваториальное Солнце вполне пригодно для измерения времени: его воображаемое движение равномерно, а само движение происходит по экватору.

Момент верхней кульминации среднего экваториального Солнца называется средним полуднем.

Промежуток времени между последовательными одноименными кульминациями среднего экваториального Солнца, или, иначе, между двумя смежными средними полуднями, называется средними солнечными сут-

к а м и. За начало средних солнечных суток принимается средняя полночь, иначе говоря, момент нижней кульминации среднего экваториального Солнца.

Промежуток времени, прошедший от указанного начала счета средних солнечных суток и выраженный в единицах среднего времени, называется средним солнечным временем и обозначается через  $m$ .

Численной мерой среднего солнечного времени служит часовой угол среднего экваториального Солнца, увеличенный на  $12^h$ , т. е.

$$m = t_{\text{ср. экв. } \odot} + 12^h. \quad (97.4)$$

Между средним и истинным временем существует зависимость, которая устанавливается в теоретической астрономии. Разность между истинным и средним временем называется уравнением времени и обозначается буквой  $\eta$

$$\eta = m_{\odot} - m. \quad (97.5)$$

Эта разность непостоянна и изменяется в течение года.

Заметим, что ранее, при исчислении среднего солнечного времени, за начало средних солнечных суток принимался момент среднего полудня и среднее время численно определялось как часовой угол  $t_{\odot}$ . Ранее среднее солнечное время, определяемое по (97.4), называлось гражданским временем и обозначалось  $m_c$

$$m_c = t_{\text{ср. экв. } \odot} + 12^h. \quad (97.6)$$

Для разных точек земной поверхности, но находящихся на одном меридиане, звездное, истинное, среднее время в данный момент будет соответственно одинаково; для точек же, расположенных под различными долготами, — различно. Следовательно, в общем случае для разных точек земной поверхности в определенный момент мы будем иметь различное время. Поэтому время, определенное в данный момент в данной точке, называют местным временем — звездным, средним соответственно. Но использование местного времени в общегосударственной и гражданской жизни было бы крайне неудобно. Поставленные правильно в каком-либо пункте Земли часы оказались бы неверными при перемещении часов в другой пункт, причем эта неправильность в показаниях часов выражалась бы в часах, минутах, секундах, т. е. в дробных частях суток. Для того чтобы время в различных точках земного шара отличалось только на целые часы, введено так называемое поясное время. Для этой цели поверхность земного шара разделена меридианами на 24 пояса (т. е. на число часов в сутках) через  $15^\circ$  по долготе, причем средний меридиан нулевого пояса проходит через Гринвич — точку начала счета долгот. Далее вводится условие: в пределах каждого такого пояса считать время одинаковым, равным времени среднего меридиана каждого пояса. Так как в один физический момент разность местного времени для любых двух точек равна разности часовых углов какого-либо светила или разности долгот этих двух точек, то при указанном условии часы, поставленные по поясному времени, для любой точки земного шара будут показывать одни и те же минуты и секунды и отличаться на целое число часов, равное числу поясов, отделяющих одну точку от другой. Такой счет времени очень удобен и в настоящее время принят почти во всех странах.

Местное время на среднем меридиане нулевого пояса (в Гринвиче) называют всемирным временем.

В отдельных странах стрелки часов передвигают по отношению к поясному времени на один или два часа вперед. Такое время принято называть декретным временем.

В СССР стрелки часов передвинуты на один час вперед по отношению к поясному времени. Следовательно, для СССР декретное время равно поясному плюс один час.

Выше было дано понятие об эфемеридном времени, которое введено в последнее десятилетие, в связи с установлением неравномерностей вращения Земли вокруг своей оси. Можно сказать, что эфемеридное время есть мера фиктивного равномерного вращения Земли.

Выше были указаны выявленные закономерности изменения скорости вращения Земли: вековые, сезонные, а также нерегулярные (неправильные).

Вековые изменения, вызванные приливными явлениями, заключаются в систематическом изменении вращательного движения Земли, что вызывает удлинение суток. Величина удлинения суток равна  $0,00164^s$  в столетие. Однако такое малое изменение продолжительности суток оказывает значительное влияние на исчисление времени. Пусть суточное изменение продолжительности суток равно  $\Delta t$ . Тогда за  $m$  суток среднее изменение их продолжительности выразится величиной  $\frac{m \cdot \Delta t}{2}$  а изменение времени, соответствующее  $m$  суткам,

определится формулой  $\frac{1}{2} m^2 \Delta t$ , т. е. пропорционально квадрату числа суток. Принимая, приближенно, для столетия  $m \Delta t = 36\,525 \Delta t = 0,00164^s$ , будем иметь:

$$\frac{1}{2} m^2 \Delta t = \frac{1}{2} m \cdot 0,0016 = \frac{1}{2} 36\,525 \cdot 0,0016 \approx 30^s.$$

Таким образом, если изменение продолжительности суток за 100 лет составляет всего  $0,00164^s$ , то изменение времени за тот же период будет равно около  $30^s$ .

Отсюда следует, что малые вековые изменения продолжительности суток оказывают заметное и даже большое влияние на исчисление времени, но в течение больших периодов. Подобным расчетом можно показать, что при малых промежутках времени вековые изменения суток не оказывают заметного влияния на исчисление времени, и ими можно во многих случаях пренебречь.

Сезонные (периодические) изменения, вызванные, как отмечалось выше, природными явлениями, вызывают в разное время года ускорение и замедление скорости вращения, а следовательно, удлинение и укорочение продолжительности суток в пределах  $0,0012^s$ — $0,0015^s$ ; вследствие этого ошибка в исчислении времени колеблется от  $+0,03^s$  до  $-0,03^s$ . Существуют эмпирические формулы для вычисления поправок за сезонную неравномерность продолжительности суток. При исчислении времени на сравнительно незначительные периоды сезонные изменения скорости вращения Земли могут оказывать заметное влияние и их в соответствующих случаях необходимо учитывать. Наоборот, при исчислении многолетних периодов времени влияние сезонной неравномерности течения суток сказывается незначительно, так как ошибки исчисления времени, вызванные рассматриваемой причиной, в значительной мере компенсируются из года в год; поэтому в этом случае нередко ими можно пренебречь. Нерегулярные изменения скорости вращения Земли не имеют определенных закономерностей и по своей величине характеризуются величинами порядка тысячных долей секунды за сутки; естественно, что если в течение некоторого периода эти изменения имеют один знак (что иногда и имеет место), то нерегулярные

изменения скорости могут оказываться весьма заметными и достигать нескольких секунд и более.

Принцип определения неравномерностей во вращении Земли вокруг оси и, следовательно, разностей между эфемеридным временем и временем, непосредственно определяемым из астрономических наблюдений, основывается на сравнении фактических моментов наблюдаемых астрономических явлений с их эфемеридными моментами, вычисленными в предположении равномерности вращательного движения нашей планеты. Если бы Земля вращалась равномерно, то вычисленные на основе этого эфемериды небесных светил или время каких-либо астрономических явлений соответствовали фактически наблюдаемым моментам времени. Такого совпадения между вычисленными моментами астрономических явлений и фактическими наблюдениями нет; получаемые расхождения далеко выходят за пределы допусков, объяснимых ошибками наблюдений или вычислений. Эти расхождения и являются следствием неравномерного вращения Земли, наличия двух шкал времени. Поправка, позволяющая перейти от одной шкалы времени к другой, определяется из наблюдений небесных светил под условием, чтобы разности между наблюдаемыми и вычисленными положениями должны исключаться для взятого (уже прошедшего) периода времени.

В качестве светила для наблюдений с целью определения указанной поправки целесообразно в первую очередь использовать Луну, как имеющую наибольшую скорость видимого движения.

Местное время на меридиане Гринвича называется с е м и р н ы м в р е м е н е м; оно обозначается через  $TU_0$  и определяется непосредственно из астрономических наблюдений.

Всемирное время, исправленное за колебание полюса, обозначается через  $TU_1$ . Через  $TU_2$  обозначается время  $TU_1$ , исправленное за сезонную неравномерность вращения Земли. Через  $TE$  обозначается эфемеридное время, которое получается после введения поправок за неравномерность вращения Земли.

В заключение укажем, что помимо исчисления времени, основанного на периоде суточного обращения Земли вокруг оси, существует физическая система времени, в которой принята единица измерения времени, основанная на резонансной частоте квантовых переходов атомов цезия. Эта единица измерения времени называется атомной секундой, а соответствующая система времени называется «атомным временем» ( $AT$ ). Атомная секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома — изотопа цезия с массовым числом 133 при нулевом магнитном поле\*.

Эта единица измерения — атомная секунда — близка к  $\frac{1}{86\,400}$  части суток, т. е.  $1^s$  астрономического времени. Точность хранения времени посредством атомных единиц характеризуется относительной ошибкой порядка  $10^{-12}$ — $10^{-14}$ .

Существуют атомные часы, которые с очень высокой точностью и надежностью контролируют время. Высокая стабильность шкалы атомного времени обеспечила его широкое использование при изучении многих тонких физических процессов. В геодезии при применении систем координат, связанных с Землей, используется время, основанное на астрономических

\* См. [14], стр. 28.

определениях. С помощью атомных часов с большей точностью возможно определение изменений астрономических единиц исчисления времени, вызванных неравномерным вращением Земли, путем регулярных определений разностей показаний атомных часов и астрономического времени.

## § 98. Сопоставление различных единиц измерения и систем счета времени

1. Сравнение продолжительности звездных и средних суток. Если бы Земля не обращалась вокруг Солнца и последнее не имело видимого годовичного движения, то положение Солнца относительно звезд и точки весеннего равноденствия было бы неизменным и продолжительность солнечных и звездных суток была одинакова. Но вследствие обращения Земли вокруг Солнца (а отсюда и видимого годовичного движения Солнца) звездные сутки короче средних приблизительно на четыре минуты. Поясним это. Допустим, что в какой-либо момент точка весеннего равноденствия и среднее экваториальное Солнце кульминируют одновременно\*; в этот день звездные и средние сутки начнутся одновременно. После того как небесная сфера сделает полный оборот относительно точки весеннего равноденствия, последняя снова придет на меридиан и закончатся одни звездные сутки. Но Солнце вследствие своего годовичного движения отойдет к востоку от точки весеннего равноденствия на некоторую небольшую дугу (приблизительно на  $1^\circ$ ), и поэтому момент верхней кульминации Солнца наступит несколько позже, т. е. продолжительность солнечных суток будет несколько больше, чем звездных.

В каждые из последующих суток Солнце постепенно будет отходить от точки весеннего равноденствия все дальше и дальше. Через год Солнце, совершив полный видимый оборот вокруг Земли, вновь будет одновременно с точкой весеннего равноденствия находиться на меридиане (в верхней кульминации); это значит, что Солнце отстало в течение года от точки весеннего равноденствия на один полный оборот, т. е. оно в течение года пройдет через меридиан на один раз меньше, чем точка весеннего равноденствия.

Отсюда следует, что в году число средних суток на единицу меньше, чем звездных.

Из многочисленных наблюдений установлено, что год равняется 365,2422 средних суток, или 366,2422 звездных суток\*\*. Так что если 365,2422 средних суток = 366,2422 звездных суток, то

$$1 \text{ средние сутки} = \left(1 + \frac{1}{365,2422}\right) \text{ звездных суток,}$$

или

$$1 \text{ средние сутки} = (1 + \mu) \text{ звездных суток,}$$

где

$$\mu = \frac{1}{365,2422} = 0,00274.$$

Иначе:

$$24^h \text{ средних} = 24^h \text{ звездных} + 24^h \mu \text{ звездных,}$$

\* Это бывает в день весеннего равноденствия 21 марта.

\*\* Имеется в виду так называемый тропический год — промежуток времени между двумя последовательными прохождением Солнца через точку весеннего равноденствия.

ИЛИ

$24^h$  средних =  $24^h 3^m 56,5554^s$  звездных.

$1^h$  среднего времени =  $1^h 0^m 9,856^s$  звездного времени.

Пусть дан промежуток времени, содержащий  $n$  средних единиц времени, который обозначим через  $n_c$ ; требуется выразить этот промежуток в звездных единицах времени.

Так как, на основании предыдущего, одна единица среднего времени равна  $1 + \mu$  единиц звездного времени, то для  $n_c$  единиц среднего времени имеем  $n_c (1 + \mu)$  звездных единиц времени. Отсюда получаем  $n_s = n_c (1 + \mu)$  единиц звездного времени.

Очевидно,  $n_s$  будет измерять в звездных единицах промежуток времени, соответствующий  $n_c$  средних единиц.

Если промежуток времени отсчитан от 0 среднего солнечного времени, то величина  $n_c$  будет равняться моменту этого времени  $m$ ; промежуток времени, истекший от средней полуночи до данного времени  $m$ , в единицах звездного времени выразится так:

$$n_s = m_c (1 + \mu) * . \quad (98.1)$$

Таким же путем получаем формулы для перевода числа звездных единиц времени, измеряющего данный промежуток времени, в число средних единиц для того же промежутка времени. Взяв за исходное равенство:  $366,2422$  звездных суток =  $365,2422$  средних суток, находим:  $1$  звездные сутки =  $(1 - \nu)$  средних суток, где

$$\nu = \frac{1}{366,2422} = 0,00273 = 3^m 55,9095^s.$$

Иначе говоря, звездные сутки короче средних на  $3^m 55,9095^s$ . Вообще же  $1$  звездная единица равна  $(1 - \nu)$  средних единиц.

Для некоторого промежутка времени, содержащего  $n_s$  звездных единиц, будем иметь

$$n_c = n_s (1 - \nu) \text{ средних единиц.} \quad (98.2)$$

Очевидно, в этом случае  $n_c$  представляет собой число единиц среднего времени, измеряющее промежуток времени в  $n_s$  единиц звездного времени.

Формулы (98.1) и (98.2) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} n_s &= n_c + n_{c\mu} \\ n_c &= n_s - n_s \nu \end{aligned} \right\} . \quad (98.3)$$

Величина  $n_{c\mu}$  называется р е д у к ц и е й для перехода от измерения данного промежутка времени в средних единицах к измерению того же промежутка времени в звездных единицах; величина  $n_s \nu$  также называется р е д у к ц и е й, но для обратного перехода.

Для вычисления указанных редукций существуют таблицы, помещаемые в Астрономическом ежегоднике, наставлениях и других пособиях по астрономии.

\* Иногда указанный промежуток времени в звездных единицах обозначают через  $s$ , тогда последняя формула принимает следующий вид:

$$s = m_c (1 + \mu).$$

Однако при таком обозначении следует помнить, что  $s$  не есть звездное время: это промежуток времени, соответствующий  $n_c$  или  $m_c$  единицам среднего времени, но выраженный в звездных единицах.



2. Переход от местного среднего солнечного времени к звездному и обратно. Задача заключается в определении момента звездного времени  $s$ , соответствующего местному среднему времени  $t$ , для определенной даты (года, месяца, дня); так как местное время для точек земной поверхности, имеющих разные долготы, различно, то для решения поставленной задачи должна быть известна долгота данного места. Таким образом, исходными данными являются: дата, среднее время  $t$  и долгота  $\lambda$  данной точки Земли. Задача решается в следующем порядке:

а) рассматривая  $t$  как промежуток времени от момента средней полуночи до момента  $t$ , данный в единицах среднего времени, выражаем этот промежуток времени в звездных единицах  $n_s$  по известной формуле:

$$n_s = t + m; \quad (98.4)$$

б) вычисляем звездное время  $s_0$  для момента средней местной полуночи. В Астрономических ежегодниках приводится звездное время  $s_0$  в среднюю полночь для нулевого меридиана (меридиана Гринвича).

Средней полночью является момент нижней кульминации среднего экваториального Солнца; в этот момент  $t_{\text{ср. экв. } \odot} = 12^{\text{h}}$ . Поэтому на основании общей формулы

$$s = \alpha + t$$

для момента средней полуночи в Гринвиче получим

$$S_0 = \alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^{\text{Грин.}} + 12^{\text{h}}. \quad (98.5)$$

Таким же образом для момента  $s_0$  средней полуночи в другой точке  $A$ , расположенной на другом меридиане, будем иметь

$$s_0 = \alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^A + 12^{\text{h}}. \quad (98.6)$$

Если эта другая точка находится западнее Гринвича, то средняя полночь в ней наступит позднее, чем наступила средняя полночь в Гринвиче, на число часов, минут и секунд, равное долготе  $\lambda$  этой точки.

Но, как мы видели выше (см. § 97), среднее экваториальное Солнце вследствие годичного движения изменяет свое положение относительно точки весеннего равноденствия, совершая перемещение от нее к востоку по экватору в сутки на  $(24\mu)^{\text{h}}$ . Поэтому и прямое восхождение среднего экваториального Солнца, отсчитываемое от точки весеннего равноденствия, изменится, т. е. увеличится за сутки на  $(24\mu)^{\text{h}}$  и за час — на  $\frac{24\mu}{24} = \mu^{\text{h}}$ .

Так как момент средней полуночи наступит в точке  $A$  позднее момента средней полуночи в Гринвиче на  $\lambda$  часов, то за этот промежуток времени прямое восхождение среднего экваториального Солнца увеличится на  $\mu^{\text{h}}\lambda$ , т. е. будем иметь

$$\alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^A = \alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^{\text{Грин.}} + \mu\lambda. \quad (98.7)$$

Образую разность между (98.5) и (98.6) и принимая во внимание (98.7), получим

$$s_0 - S_0 = \mu\lambda,$$

или

$$s_0 = S_0 + \mu\lambda. \quad (98.8)$$

Если точка  $A$  располагается восточнее Гринвича, то момент средней полуночи наступит в этой точке ранее момента средней полуночи в Гринвиче; в этом случае будем иметь:

$$\alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^A = \alpha_{\text{ср. экв. } \odot}^{\text{Грин.}} - \mu\lambda$$

и

$$s_0 = S_0 - \mu\lambda; \quad (98.9)$$

в) зная местное звездное время в среднюю полночь  $s_0$  и промежуток времени в звездных единицах, прошедший от средней полуночи до момента, заданного средним временем  $m$ , легко находим звездное время для этого момента времени

$$s = s_0 + m + m\mu. \quad (98.10)$$

Обратная задача, т. е. вычисление момента среднего времени  $m$  по заданному моменту звездного времени, решается в следующем порядке:

а) находим промежуток времени от звездного времени в местную среднюю полночь  $s_0$  до звездного времени в заданный момент, т. е.  $s - s_0$ ;

б) выражаем этот промежуток звездного времени в единицах среднего времени, в результате чего и получаем искомое среднее время  $m$ :

$$m = (s - s_0) - (s - s_0) \nu. \quad (98.11)$$

При этом  $s_0$  находится по формулам (98.8) и (98.9).

3. Переход от среднего времени к истинному времени и обратно. Переход выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} t_{\odot} &= m + \eta \pm 12^h \\ m &= t_{\odot} - \eta \pm 12^h \end{aligned} \right\}. \quad (98.12)$$

В Астрономическом ежегоднике приводится уравнение времени  $+12^h$ , т. е.

$$E = \eta_0 + 12^h, \quad (98.13)$$

где  $\eta_0$  — уравнение времени в Гринвичскую полночь.

Обозначая через  $E^*$  интерполированное значение величины  $E$  на момент наблюдений и на местный меридиан, формулу (98.12) перепишем:

$$t_{\odot} = m + E^*. \quad (98.14)$$

Специальный метод интерполирования с часовыми изменениями величины  $E$  излагается в следующем параграфе.

Связь между временем средним и поясным, поясным и декретным вытекает из их определений и особых пояснений не требует.

## § 99. Интерполирование с часовыми изменениями.

### Примеры на интерполирование

и переход от одной системы счета времени к другой

Необходимые для обработки астрономических наблюдений величины — координаты Солнца, часовой угол Солнца на меридиане Гринвича в  $0^h$  всемирного времени и др. — даются в Астрономическом ежегоднике; аргументами этих величин является время, приводимое в ежегоднике через одинаковые интервалы. Каждому моменту времени соответствует значение одной из упомянутых выше астрономических величин. Но изменение этих величин как функций

времени происходит нелинейно и достаточно быстро, поэтому простое или линейное их интерполирование применяться не может. При нахождении значений указанных величин из Астрономического ежегодника применяется интерполирование с часовыми изменениями.

Часовым изменением  $v$  функции  $f(t)$  называют изменение этой функции в данный момент, отнесенное к промежутку времени, равному одному часу.

Пусть дано:

момент времени  $t_0$ , значение функции  $f(t_0)$ , часовое изменение  $v_0$ ,

» »  $t_1$ , » »  $f(t_1)$ , » »  $v_1$ .

Требуется определить значение функции  $f(t)$  для момента, промежуточного между  $t_0$  и  $t_1$ , пользуясь часовыми изменениями  $v_0$  и  $v_1$ .

Промежуток времени  $h$ , на который надлежит интерполировать данную функцию, равен:

$$h = (t - t_0)^h. \quad (99.1)$$

Напишем:

$$f(t) = f(t_0) + v h, \quad (99.2)$$

где под  $v$  следует понимать часовое изменение, соответствующее средней скорости изменения функции в промежутке времени  $(t - t_0)$ . С точностью, достаточной при вычислении астрономических наблюдений, производимых в геодезических целях, можно положить, что величины  $v$  изменяются между двумя смежными моментами линейно. Следовательно, среднее часовое изменение для интервала  $(t - t_0)$  будет равно

$$v = \frac{1}{2} (v_0 + v_1), \quad (99.3)$$

где  $v_t$  — часовое изменение функции для момента  $t$ . Для определения  $v_t$  воспользуемся правилом простого интерполирования.

В Астрономическом ежегоднике интервалом времени между двумя смежными аргументами являются сутки, т. е.

$$t_1 - t_0 = 24^h.$$

Дата	Дни недели	0 <sup>h</sup> эфемеридного			
		видимое прямое восхождение	видимое склонение	часовое изменение	видимый радиус
Янв. 10	Пн.	19 21 34,69	−22 07 14,0	+21,20	16 17,45
11	Вт.	19 25 55,94	21 58 32,2	22,28	16 17,41
12	Ср.	19 30 16,65	21 49 24,7	23,35	16 17,37
13	Чт.	19 34 36,78	21 39 51,6	24,41	16 17,32
14	Пт.	19 38 56,32	21 29 53,2	25,45	16 17,27
15	Сб.	19 43 15,23	−21 19 29,9	+26,49	16 17,21
16	Вс.	19 47 33,50	21 08 41,9	27,51	16 17,15
17	Пн.	19 51 51,10	20 57 29,6	28,51	16 17,09
18	Вт.	19 56 08,00	20 45 53,3	29,51	16 17,02
19	Ср.	20 00 24,19	20 33 53,3	30,49	16 16,95

Обозначим через  $D = v_1 - v_0$  разность часового изменения. Применяя правило простого интерполирования, получим

$$v_t = v_0 + \frac{D}{24} h. \quad (99.4)$$

На основании формул (99.3) и (99.4) имеем

$$v = \frac{1}{2} (v_0 + v_t) = \frac{1}{2} \left( v_0 + v_0 + \frac{D}{24} h \right),$$

или

$$v = v_0 + \frac{D}{48} h. \quad (99.5)$$

Теперь искомое значение функции  $f(t)$  определится по формуле (99.2). Формулы (99.1), (99.2), (99.5) решают задачу.

Приведем решение задач с числовыми данными на интерполирование с часовыми изменениями и на переход от одной системы счета времени к другой.

Для нахождения численных значений некоторых величин, помещаемых в Астрономических ежегодниках, в табл. 21 приводится выдержка из таблиц «Солнце» АЕ за 1972 г.

**Задача 1.** Определение склонения Солнца для момента московского среднего времени  $m = 14^h 25^m 37,24^s$ , 15 января 1972 г. Долгота Москвы  $\lambda = 2^h 30^m 39,60^s$  (табл. 22).

Сделаем предварительное замечание. Склонение Солнца в один и тот же физический момент для всех точек Земли одинаково. Время же (одноименное) в один и тот же момент для точек, расположенных на разных меридианах, как было показано выше, различается на величину, численно равную разности долгот этих точек. В Астрономическом ежегоднике все данные приведены для меридиана Гринвича. В момент московского среднего времени  $m = 14^h 25^m 37,24^s$  на меридиане Гринвича среднее время будет  $m - \lambda$ , т. е.  $14^h 25^m 37,24^s - 2^h 30^m 39,60^s = 11^h 54^m 57,64^s$ . Следовательно, определение склонения Солнца для  $14^h 25^m 37,24^s$  московского среднего времени сводится к определению склонения Солнца для  $11^h 54^m 57,64^s$  гринвичского среднего времени. В АЕ приведено склонение Солнца для  $0^h$  гринвичского эфемеридного времени, т. е. задача заключается в интерполировании склонения Солнца на  $11^h 54^m 57,64^s$  указанной даты. Обычно переход от местного времени к соответствующему моменту

Таблица 2

времени		Звездное время $0^h$ всемирного времени		
уравнение времени ист. — средн. +12 <sup>h</sup>	часовое изменение	истинное	среднее	нутація в прямом восхождении
.	.	.	.	0,0001 <sup>s</sup>
11 52 55,66	—1,040	7 14 30,351	29,4750	+8888—132
11 52 30,97	1,018	7 18 26,908	26,0304	+8917—143
11 52 06,82	0,994	7 22 23,467	22,5857	+8945—130
11 51 43,25	0,970	7 26 20,029	19,1411	+8973—95
11 51 20,27	0,944	7 30 16,592	15,6964	+9000—44
11 50 57,93	0,918	7 34 13,156	12,2518	+9026+14
11 50 36,22	0,891	7 38 09,719	08,8072	+9052+67
11 50 15,18	0,862	7 42 06,280	05,3625	+9077+103
11 49 54,84	0,833	7 46 02,839	01,9179	+9101+111
11 49 35,20	0,803	7 49 59,394	58,4733	+9124+89

Элементы формул	Вычисления	Примечания	Элементы формул	Вычисления	Примечания
$\delta_0$	$-21^{\circ}19'29,9''^*$	* Выписывается из АЕ по аргументу 15 января 1972 г. (табл. 21)	$m$	$14^{\text{h}}25^{\text{m}}37,2^{\text{s}}$	** Выбираются из АЕ по аргументам 16 и 15 января 1972 г.
$h\nu$	$+ 5\ 18,6$		$\lambda$	$2\ 30\ 39,6$	
$\delta$	$-21\ 14\ 11,3$		$m - \lambda$	$11\ 54\ 57,6$	
			$h$	$11,916^{\text{h}}$	
			$v_1$	$+27,51^{**}$	
			$v_0$	$+26,49^{**}$	
			$D$	$+1,02$	
			$\frac{D}{48} h$	$+0,25$	
			$v$	$+26,74$	

гринвичского времени выполняется при интерполировании в общей схеме вычислений, что и сделано в приводимом ниже примере (верхние три строчки правого столбца).

Согласно формуле (99.2) искомое склонение Солнца

$$\delta = \delta_0 + h\nu,$$

где для данного примера  $\delta_0$  — склонение Солнца 15 января в  $0^{\text{h}}$  на меридиане Гринвича;  $h$ , согласно сделанному выше замечанию, вычисляется из выражения

$$h = (m - \lambda)h;$$

$v$  — часовое изменение, вычисляемое по формуле (99.5).

**Задача 2.** Переход от декретного времени к местному среднему. Дано московское декретное время  $D = 14^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}}$ ; определить соответствующее этому моменту местное (московское) среднее солнечное время  $m$ .

1. Первоначально определим соответствующее данному моменту поясное время; оно, как было указано выше, отличается в СССР на один час. Следовательно, поясное время будет

$$14^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}} - 1^{\text{h}} = 13^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}}.$$

2. Далее, для того же момента переходим к гринвичскому времени, имея в виду, что разность поясных времен Гринвича и Москвы отличается на 2 часа (Москва расположена во втором поясе). Будем иметь поясное гринвичское время:

$$13^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}} - 2^{\text{h}} = 11^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}}.$$

3. После этого переходим от гринвичского времени к местному (московскому) среднему солнечному времени для того же момента, пользуясь соотношением, что разность одноименных времен численно равна разности долгот этих двух пунктов.

Гринвичское поясное время (оно же местное для Гринвича) . . .  $11^{\text{h}}54^{\text{m}}57,64^{\text{s}}$   
 разность долгот Москва — Гринвич . . . . .  $2\ 20\ 39,60$   
 московское среднее время . . . . .  $14\ 25\ 37,24$

**Задача 3.** Переход от среднего времени  $m$  к звездному  $s$ .

Возьмем полученное выше московское время  $m = 14^{\text{h}}25^{\text{m}}37,24^{\text{s}}$  15 января 1972 года. Найдем соответствующее этому моменту времени звездное время  $s$ . Разность долгот Москва — Гринвич по-прежнему примем равной  $2^{\text{h}}30^{\text{m}}39,60^{\text{s}}$ .

Согласно формулам (98.9) и (98.10), искомое время  $s$  выразится:

$$s = s_0 + m + m\mu,$$

$$s_0 = S_0 - \lambda\mu,$$

где  $s$  — звездное время в местную (московскую) гражданскую полночь;  
 $S_0$  — звездное время в полночь на меридиане Гринвича выбирается из таблиц Солнца АЕ;  
 $m + m\mu$  — промежуток от  $0^h$  до  $m$  среднего местного времени, выраженный в единицах звездного времени. Величины  $m\mu$  и  $\lambda\mu$  выбираются из таблиц перевода единиц среднего времени в единицы звездного времени.

$S_0$	$7^h34^m13,16^s$	$\lambda$ $2^h30^m39,60^s$	$\mu\lambda$ $0^m24^s$
$\lambda\mu$	24,75	2 26 05,8	
$S_0$	$7^h33^m48,41^s$	$4^m33,8^s$	0,75
			$0^m24,75^s$
$s_0$	$7^h33^m48,41^s$	$m$ $14^h25^m37,24^s$	$\mu m$
$m$	14 25 37,24	14 24 24,4	$2^m22^s$
$m\mu$	2 22,20	$1^m12,84^s$	0,20
$s$	$22^h01^m47,85^s$		$2^m22,20^s$

**Задача 4** (обратная задаче 3). Переход от звездного местного времени  $s$  к среднему солнечному времени  $m$ .

Дано московское звездное время  $s = 22^h01^m10,55^s$  15 января 1972 г. Найти соответствующее данному моменту звездного времени среднее солнечное время  $m$ .

Искомое местное среднее солнечное время определится по формуле (98.11), т. е.

$$m_c = (s - s_0) - (s - s_0) \nu.$$

Звездное время в местную полночь  $s_0$  вычисляется так же, как и в предыдущей задаче:

$$s_0 = S_0 - \lambda\mu.$$

Величина  $(s - s_0) \nu$  выбирается из таблиц перевода единиц звездного времени в единицы среднего времени.

$S_0$	$7^h34^m13,16^s$	$\lambda$ $2^h30^m39,60^s$	$\lambda\mu$ $0^m24^s$
$\lambda\mu$	24,75	2 26 5,8	.
$s_0$	$7^h33^m48,41^s$	$4^m33,80^s$	0,75
			$0^m24,75^s$
$s$	$22^h01^m47,85^s$	$s - s_0$ $14^h27^m59,4^s$	$(s - s_0) \nu$
$s_0$	7 33 48,41	14 26 46,4	$2^m22^s$
$s - s_0$	14 27 59,44	$1^m13,0^s$	
$(s - s_0) \nu$	-2 22,20		
$m$	$14^h25^m37,24^s$	1 13,2	0,20
			$2^m22 20^s$

**Задача 5.** Переход от местного среднего солнечного времени к истинному.

Дано московское время  $m = 14^{\text{h}}25^{\text{m}}37,24^{\text{s}}$  15 января 1972 г. Найти соответствующее данному моменту среднему времени истинное время  $t_{\odot}$ . Долгота Москвы  $\lambda = 2^{\text{h}}30^{\text{m}}39,60^{\text{s}}$ . Согласно формуле (98.12),

$$t_{\odot} = m + \eta \pm 12^{\text{h}}.$$

Уравнение времени, соответствующее моменту местного среднего времени  $m_0$  вычислится:

$$\eta = \eta_0 + h\nu,$$

где  $\eta_0$  — уравнение времени 15 января 1972 г. в  $0^{\text{h}}$  гринвичского времени;  
 $h$  — промежуток интерполирования, численно равный среднему времени на меридиане Гринвича в момент  $m$ ;  
 $\nu$  — среднее часовое изменение, вычисляемое по формуле

$$\nu = \nu_0 + \frac{(\nu_1 - \nu_0)h}{48} = \nu_0 + \frac{Dh}{48}.$$

Заменим в формуле (98.12)  $\eta$  через  $\eta_0 + h\nu$ ; получим

$$t_{\odot} = m + \eta_0 \pm 12^{\text{h}} + h\nu.$$

Величина  $\eta_0 \pm 12^{\text{h}}$  выбирается из таблиц Солнца АЕ (табл. 21). Тогда для вычислений формула (98.12) примет вид

$$t_{\odot} = m + T_{\odot}^0 + h\nu.$$

Значения  $\nu_0$  и  $\nu_1$  — часовые изменения величины  $T_{\odot}^0$ , выбираются из Астрономического ежегодника на 15 и 16 января соответственно

$m$	$14^{\text{h}}25^{\text{m}}37,24^{\text{s}}$	$m$	$14^{\text{h}}25^{\text{m}}37^{\text{s}}$	$\nu_1$	$-0,891^{\text{s}}$
$T_{\odot}^0$	$11\ 50\ 57,93$	$\lambda$	$2\ 30\ 40$	$\nu_0$	$-0,918$
$h\nu$	$-10,86$	$h$	$11^{\text{h}}54^{\text{m}}57^{\text{s}}$	$D$	$+0,027^{\text{s}}$
$t_{\odot}$	$2^{\text{h}}16^{\text{m}}24,31^{\text{s}}$	$(h)^{\text{h}}$	$11,916^{\text{h}}$	$\frac{Dh}{48}$	$+0,007$
				$\nu$	$-0,911$

**Задача 6** (обратная задаче 5). Переход от истинного времени к среднему времени в данном месте.

Дано московское истинное время  $t_{\odot} = 2^{\text{h}}16^{\text{m}}25,34^{\text{s}}$  15 января 1972 г. Найти соответствующее этому моменту истинного времени среднее время  $m$ . Долгота Москвы  $\lambda = 2^{\text{h}}30^{\text{m}}39,60^{\text{s}}$ .

Из предыдущей формулы легко получаем выражение для вычисления  $m$

$$m = t_{\odot} - (T_{\odot}^0 + h\nu).$$

Для вычисления  $h$  надлежит предварительно получить приближенное значение среднего времени по формуле

$$m' = t_{\odot} - T_{\odot}^0 - \lambda,$$

тогда

$$h = m^{\bullet} - \lambda = t_{\odot} - T_{\odot}^{\circ} - \lambda.$$

$t_{\odot}$	$2^{\text{h}}16^{\text{m}}24,31^{\text{s}}$	$t_{\odot}$	$2^{\text{h}}16^{\text{m}}25^{\text{s}}$	$v_1$	$-0,891^{\text{s}}$
$T_{\odot}^{\circ}$	$-11\ 50\ 57\ 93$	$T_{\odot}^{\circ}$	$11\ 50\ 58$	$v_0$	$-0,918$
$h\nu$	$+ \quad 10,86$	$\lambda$	$2\ 30\ 40$	$D$	$\pm 0,027^{\text{s}}$
$m$	$14^{\text{h}}25^{\text{m}}37,24^{\text{s}}$	$h$	$11^{\text{h}}54^{\text{m}}47^{\text{s}}$	$\frac{Dh}{48}$	$+0,007$
		$(h)^{\text{h}}$	$11,913^{\text{h}}$	$v$	$-0,907$



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

## § 100. Общие сведения об астрономических методах определения широт и долгот пунктов и азимутов направлений

Целью астрономических наблюдений на пунктах триангуляции является определение астрономических широт и долгот пунктов и азимутов направлений. Астрономические наблюдения в общем случае заключаются в измерении зенитных расстояний светил, измерении соответствующих горизонтальных углов и фиксации моментов времени этих измерений по часам. Следовательно, в распоряжении астронома, производящего астрономические наблюдения, должны быть универсальный угломерный инструмент соответствующей точности и часы.

Устройство универсального инструмента, работа с ним и точность измерения углов при помощи его подробно разобраны в соответствующих разделах курса высшей геодезии.

Относительно часов следует отметить следующее: в точных полевых астрономических наблюдениях время должно фиксироваться до десятых долей секунды. Вследствие несовершенства изготовления и регулировки часов показания последних не совпадают с действительным временем, поэтому астроному всегда необходимо знать *п о п р а в к у* часов. Величина поправки зависит от степени точности начальной установки и хода часов. Вследствие хода поправка непрерывно изменяется; степень постоянства хода является характеристикой качества часов. Часы бывают *з в е з д н ы е*, идущие по звездному времени, и *с р е д н и е*, идущие по среднему времени.

Если, например  $T$  — показание звездных часов,  $u$  — их поправка для данного момента,  $s$  — звездное время, то

$$s = T + u. \quad (100.1)$$

Аналогичное выражение будет и для среднего времени. Если поправка часов не известна, то она должна быть определена из астрономических наблюдений.

В настоящее время существуют различные способы астрономических определений широт и долгот пунктов и азимутов направлений; основные идеи наиболее употребительных из них будут рассмотрены ниже.

В настоящем параграфе изложим идею указанных определений при помощи измерения зенитных расстояний светил. Этот способ, достаточно общий и простой, хорошо иллюстрирует принцип и метод астрономических определений географических координат точек и азимутов направлений на поверхности Земли.

Возьмем параллактический треугольник  $PZ\sigma$  (см. рис. 172). Зенитное расстояние светила  $\sigma$  измерено для момента  $T$ , зафиксированного по часам. Из Астрономического ежегодника выбираем для момента наблюдений координаты светила  $\alpha$  и  $\delta$ . Из наблюдений известны  $z$  и  $T$ . Но эти данные пока определяют только две стороны треугольника:  $P\sigma = 90^\circ - \delta$  и  $Z\sigma = z$ . Для того чтобы получить третий элемент, необходимый для решения треугольника, заранее определяют или поправку часов, или широту места наблюдений. Разберем эти два случая.

а. В качестве третьего элемента известна поправка часов  $u$ . Тогда

$$s = T + u = \alpha + t, \quad (100.2)$$

откуда находим третий элемент треугольника — часовой угол  $t$ :

$$t = T + u - \alpha. \quad (100.3)$$

Решая параллактический треугольник, находим сторону  $PZ = 90^\circ - \varphi$  и угол  $(180^\circ - a)$ , откуда определяем широту точки наблюдений  $\varphi$  и азимута  $a$  светила. Если в момент наблюдений измерен горизонтальный угол  $C$  между светилом  $\sigma$  и земным предметом  $M$ , то легко находим азимут земного предмета (отсчитываемый от точки юга):

$$a_M = a \pm C.$$

Азимут, отсчитываемый от точки севера, найдется по формуле

$$A_M = a_M \pm 180^\circ.$$

Долгота пункта относительно Гринвича определится на основании формулы (97.3):

$$\lambda = s - S,$$

где  $s$  — местное звездное время в данный момент, а  $S$  — звездное время в Гринвиче в тот же момент.

Таким образом, для вывода долготы пункта необходимо знать местное время (звездное или среднее — безразлично) в определенный момент.

б. Если вместо поправки часов в качестве третьего элемента треугольника дана широта, а следовательно, и сторона  $PZ = 90^\circ - \varphi$ , то, решая параллактический треугольник, находим азимут светила, а также и часовой угол  $t$ . Тогда из (100.2) вычисляем

$$u = \alpha + t - T, \quad (100.4)$$

и звездное время

$$s = T + u. \quad (100.5)$$

Ясно, что из наблюдений Солнца будет получено истинное время. Рассуждения и формулы для астрономических определений по Солнцу аналогичны предыдущим. При решении треугольника будет получен часовой угол истинного Солнца  $t_\odot$ . Из Астрономического ежегодника интерполируется величина  $T_\odot$ ; поправка среднего хронометра относительно среднего солнечного времени вычислится на основании формулы

$$m = t_\odot - T_\odot = T + u, \quad (100.6)$$

следовательно,

$$u = t_\odot - T_\odot - T. \quad (100.7)$$

Остановимся на особенностях измерений зенитных расстояний и горизонтальных направлений при астрономических наблюдениях и на методах отсчета по часам.

При измерении зенитных расстояний светил нельзя выводить место зенита из наблюдений светила при круге право и круге лево вследствие непостоянства положения светила. Поэтому при измерении зенитных расстояний светил место зенита должно быть определено заранее из наблюдений на постоянный земной

предмет. Формулы для вычисления места зенита и зенитного расстояния следующие \*:

$$MZ = \frac{L+R}{2} \pm 180^\circ, \quad (100.8)$$

$$z = MZ - R = L - MZ. \quad (100.9)$$

В формулы для  $z$  значение  $MZ$  входит с разными знаками, в зависимости от наблюдений при круге право или круге лево, поэтому для исключения ошибки в выводе зенитных расстояний, которая появляется вследствие неточного знания  $MZ$ , необходимо наблюдения выполнять при обоих кругах.

В большинстве методов астрономических определений наблюдению светила при помощи универсала должен сопутствовать отсчет по часам с возможно

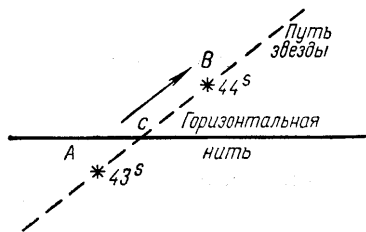


Рис. 174

большой точностью. При астрономических определениях применяются метод наведения и метод прохождения. При методе наведения наблюдатель, считая про себя секундные удары часов, окончательно наводит биссектор или нить трубы в момент, совпадающий с одним из секундных ударов часов. Окончательное наведение можно делать как при помощи наводящих микрометрических винтов, так и при помощи окулярного микрометра (в точных работах). При методе прохождения для измерения зенитных расстояний наводят

трубу на звезду таким образом, чтобы звезда, двигаясь в поле зрения, пересекала горизонтальную нить вблизи вертикальной нити; затем берут показание часов и продолжают слушать их удары, считая секунды. При этом, наблюдая движение звезды в трубе, фиксируют в уме положение звезды относительно горизонтальной нити в моменты секундных ударов: удар, предшествующий прохождению звезды через нить (точка A на рис. 174), и удар, следующий после прохождения через нить (точка B). Оценивая на глаз отношение отрезков между первым фиксированным в уме положением звезды (перед прохождением через нить) и горизонтальной нитью (т. е. AC) и между положениями звезды в два указанных момента, фиксированных по часам (т. е. AB), получают десятые доли секунды отсчета по часам, соответствующего прохождению звезды через горизонтальную нить. После этого немедленно делают отсчеты по уровню и по вертикальному кругу.

Для случая, изображенного на рис. 174, момент наблюдений будет:

$$43^s + \frac{AC}{AB} = 43^s + 0,3^s = 43,3^s.$$

У опытного наблюдателя случайная ошибка при таком методе отсчета бывает порядка 0,1<sup>s</sup>; она уменьшается при многократных наблюдениях. Но, кроме случайной ошибки наблюдений, действует систематическая, постоянная ошибка, причем величина этой ошибки у разных наблюдателей оказывается

\* Эти формулы справедливы для инструмента, у которого алидада неподвижна, вертикальный круг вращается вместе с трубой и деления возрастают по ходу часовой стрелки. При другом устройстве инструмента (что встречается в старых инструментах) формулы будут другие, поэтому перед наблюдениями надо установить правильные формулы для вычисления  $MZ$  и одновременно формулу для поправки за уровень.

различной. Эта ошибка главным образом определяет действительную точность результатов астрономических наблюдений \*.

В настоящее время в точных работах для регистрации моментов прохождения звезд через нити трубы применяются хронографы, позволяющие механизировать процесс наблюдений. Хронограф позволяет при помощи электромагнитного приспособления записывать на движущейся бумажной ленте моменты полусекундных ударов контактного хронометра и моменты прохождения звезды через нить; последующие отсчеты сводятся к соответствующим измерениям хронографической ленты.

Непосредственно измеренные зенитные расстояния светил еще непригодны для использования при вычислении искомых географических координат точек земной поверхности; они должны быть предварительно исправлены рядом поправок.

1. Поправка за параллакс представляет собой поправку за приведение наблюдений, исполненных с земной поверхности, к центру Земли. При наблюдении звезд вследствие малости радиуса Земли по сравнению с расстояниями до звезд этой поправкой можно пренебречь, но при наблюдениях Солнца ее необходимо учитывать.

На рис. 175  $MZ$  — направление на точку  $Z$  из точки  $M$  поверхности Земли;  $z' = \angle ZMS$  — зенитное расстояние на Солнце  $S$ , измеренное из точки  $M$ ;  $z = \angle ZOS$  — зенитное расстояние, если бы оно было измерено из центра Земли. Это зенитное расстояние называют геоцентрическим. Из рис. 175 имеем:

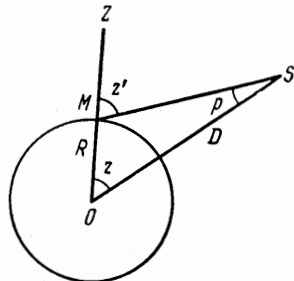


Рис. 175

$$z = z' - p, \quad (100.10)$$

где  $p$  — угол, под которым усматривается радиус Земли с Солнца; этот угол и представляет собой поправку за параллакс. Из треугольника  $MSO$  имеем

$$\frac{\sin p}{R} = \frac{\sin z'}{D}, \quad (100.11)$$

где  $D$  — расстояние от Земли до Солнца, а  $R$  — радиус Земли.

Из (100.11) получим

$$p'' = \frac{R}{D} \rho'' \sin z'.$$

Обозначив

$$p''_{\odot} = \frac{R}{D} \rho'',$$

получим окончательно

$$p'' = p''_{\odot} \sin z'. \quad (100.12)$$

Величина  $p_{\odot}$  называется горизонтным параллаксом; он соответствует положению светила в горизонте, т. е. когда  $z' = 90^\circ$  и  $\sin z' = 1$ . Значение  $p''_{\odot}$  дается в Астрономическом ежегоднике; в разное время года это значение колеблется от  $8,66''$  до  $8,95''$ . Рассмотренный параллакс называется уточным, так как зависит от вращения Земли вокруг оси, совершающегося в течение суток.

\* Подробнее об этой ошибке изложено в § 104.

Годичным параллаксом называют угол, под которым усматривается со звезды радиус земной орбиты; учитывать годичный параллакс приходится только при наблюдении некоторых ближайших к Земле звезд; для ближайшей из них ( $\alpha$  Centauri) он равняется  $0,76''$ .

2. Поправка за рефракцию. Явление рефракции, и в частности вертикальной рефракции, известно из разделов курса высшей геодезии. Однако влияние рефракции при измерении зенитных расстояний небесных светил иное, чем в геодезическом и точном нивелировании; поэтому явление рефракции при астрономических наблюдениях называется астрономической рефракцией. Влияние астрономической рефракции определяется условиями, при которых визирный луч проходит через всю толщу атмосферы, причем зенитное расстояние этого луча, а следовательно, и угол, под которым он пересекает слои атмосферы, окружающие Землю, может иметь значения от 0 до  $70-80^\circ$ .

Не приводя теории астрономической рефракции, которая сравнительно сложна, укажем практический путь ее учета. По соответствующим формулам, которые выводятся в теории рефракции, составляют таблицы, в которых дается значение поправки за рефракцию при некоторых средних значениях температуры  $t_0$  и давлении атмосферы  $b_0$  через определенные интервалы измеренного зенитного расстояния  $z'$ . Значения поправок, выбираемых из таких таблиц, называются средней рефракцией и обозначаются через  $\rho_0$ . Значение поправки при данных давлении  $b$  и температуре  $t$  называют истинной рефракцией и обозначают через  $\rho$ . Формула для  $\rho$  имеет следующий вид:

$$\rho = \rho_0 + \rho_0(A + B), \quad (100.13)$$

где  $\rho_0$  выбирается из таблиц по аргументу  $z'$ , а коэффициенты  $A$  и  $B$  — по аргументам  $b$  и  $t$ . Второй член правой части уравнения (100.13) представляет собой поправку за несовпадение давления и температуры, имевших место при наблюдениях, со значениями этих величин, принятыми при составлении таблиц для средней рефракции  $\rho_0$ .

Таблицы рефракции помещены в «Таблицах для астрономических вычислений»\*.

Для приближенных подсчетов средней рефракции  $\rho$  при  $z \leq 45^\circ$  можно пользоваться приближенной формулой

$$\rho'' = 58'' \cdot \operatorname{tg} z', \quad (100.14)$$

Из последней формулы видно, что рефракция увеличивается с увеличением зенитного расстояния наблюдаемого светила.

При  $z = 90^\circ$ , т. е. в горизонте, рефракция, вычисленная по более точной формуле, чем (100.14), достигает  $35'$  и определяется недостаточно точно; поэтому следует избегать измерений зенитных расстояний светил, превосходящих  $70-75^\circ$ .

3. Поправка за радиус Солнца. При наблюдениях Солнца более точный результат получается, когда наводят на края Солнца — верхний или нижний (при измерении зенитных расстояний) и на левый или правый (при азимутальных определениях). Для приведения наблюденных зенитных расстояний к центру Солнца вводится с соответствующим знаком поправка  $R_\odot$ , равная углу, под которым усматривается с Земли радиус Солнца.

\* Труды ЦНИИГАиК, вып. 30, или Астрономический ежегодник.

Таким образом, окончательное значение зенитного расстояния  $z$ , которое в дальнейшем используется при обработке наблюдений, по формулам практической астрономии с учетом всех поправок вычисляется: при наблюдении звезд

$$z = z' + \rho, \quad (100.15)$$

при наблюдении Солнца

$$z = z' + \rho - p \pm R_{\odot}, \quad (100.16)$$

где  $z'$  — непосредственно измеренное значение зенитного расстояния, исправленное инструментальными поправками;

$\rho$  — поправка за рефракцию;

$p$  — поправка за параллакс;

$R_{\odot}$  — поправка за радиус Солнца (за приведение наблюдений к центру Солнца).

При определении азимутов посредством наблюдений звезд никаких поправок, кроме инструментальных, в измеренные значения направлений не вводят; при наблюдениях Солнца вводится поправка за радиус Солнца по формуле (104.15).

4. **Поправка за аберрацию.** В вычислении координат точек земной поверхности из астрономических наблюдений, кроме измеряемых величин, участвуют координаты звезд  $\alpha$  и  $\delta$ .

В значениях этих координат, даваемые в Астрономическом ежегоднике и в звездных каталогах, необходимо вводить некоторые поправки. Необходимость введения этих поправок вызвана явлениями прецессии, нутации, в общих чертах описанными выше, а также явлением аберрации.

**Явление аберрации** заключается в том, что движущийся наблюдатель видит светило не по тому направлению, по которому он видел бы его, находясь в покое. Так как Земля движется в пространстве вокруг Солнца со скоростью около 30 км/с, т. е. со скоростью пренебрегаемо малой по сравнению со скоростью света, то влияние аберрации должно учитываться.

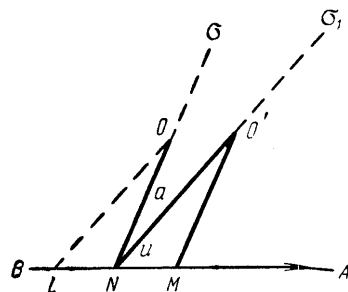


Рис. 176

Пусть наблюдатель движется по направлению от точки  $B$  к точке  $A$  (рис. 176). Пусть луч света, идущий от светила  $\sigma$ , достигнет объектива  $O$  в момент  $T_1$  и в момент  $T_2$  достигнет окулярного конца  $N$ . Если бы наблюдатель был неподвижен, то луч от светила оказался бы на пересечении нитей трубы в момент  $T_2$  и в точке  $N$ . Но за время, в течение которого луч света прошел путь от  $O$  к  $N$ , окулярный конец трубы переместится из точки  $N$  в точку  $M$ , а вся труба переместится параллельно из положения  $NO$  в положение  $MO'$  и светило сместится с креста нитей. Для того чтобы светило находилось на пересечении нитей, необходимо наклонить трубу в направлении точки  $A$  с таким расчетом, чтобы в момент  $T_1$  объектив был в точке  $O$ , а в момент  $T_2$  окуляр находился в точке  $N$ . Иначе говоря, в момент  $T_1$  труба должна занять положение  $LO$ , а в момент  $T_2$  — положение  $NO'$ . Следовательно, труба будет наклонена на угол, равный  $\angle ONO'$ , по направлению движения наблюдателя и видимое направление на светило сместится относительно истинного на угол  $a$  и будет  $N\sigma_1$ . Изображение светила на небесной сфере также переместится по дуге большого круга на угол  $a$  в направлении движения к точке  $A$ , изображение которой на небесной сфере называется **а п е к с о м**.

Если обозначить через  $u$  угол, образованный направлениями на светило и на точку апекса, то из рис. 176 имеем

$$\frac{\sin a}{\sin u} = \frac{MN}{MO'}. \quad (100.17)$$

Если далее обозначить:

$v$  — скорость движения Земли по направлению к точке апекса, равная 30 км/с;

$w$  — скорость распространения света, равная 300 000 км/с;

$$T_2 - T_1 = \tau, \quad (100.18)$$

то

$$MN = \tau v; \quad MO' = \tau w$$

и формула (100.17) перепишется так:

$$\frac{\sin a}{\sin u} = \frac{v}{w},$$

или

$$a'' = \frac{v}{w} \rho'' \sin u. \quad (100.19)$$

Постоянная величина

$$k = \frac{v}{w} \rho'' = 20,5''$$

называется коэффициентом или постоянной годичной аберрации.

Помимо годичной аберрации, зависящей от движения Земли вокруг Солнца с периодом, равным одному году, существует суточная аберрация, зависящая от движения наблюдателя вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси. Скорость суточного движения наблюдателя различна в точках, имеющих разные широты, так как зависит от радиуса параллели или, иначе, от косинуса широт (так как  $r = R \cos \varphi$ ).

Для экватора скорость суточного движения наблюдателя  $v_0$  равна 0,464 км/с. С этим значением скорости постоянная суточной аберрации  $k'$  равна

$$k'_0 = \frac{v_0}{w} \rho'' = 0,32''.$$

Для широты  $\varphi$  значение коэффициента  $k'$  будет, следовательно, равно

$$k'_\varphi = 0,32'' \cos \varphi. \quad (100.20)$$

Земля вращается вокруг оси с запада на восток, следовательно, точкой апекса суточной аберрации будет точка востока. Обозначая через  $u'$  угол между направлениями на светило и на точку востока, на основании (100.19) напомним

$$a' = 0,32'' \cos \varphi \sin u', \quad (100.21)$$

где  $a'$  — суточная аберрация; поправка за суточную аберрацию учитывается только в особо точных работах.

Таким образом, вследствие аберрации приходится различать видимое и истинное направления на светило и, соответственно им, видимое и истинное положения светила на небесной сфере. Координаты светила, относящиеся к видимому и истинному его положению на небесной сфере, называются соответственно видимыми и истинными координатами.

Отметим, что так как при наблюдениях светил мы наблюдаем их видимые положения, то под вершиной  $\sigma$  параллактического треугольника следует подразумевать видимое положение звезды  $\sigma$ , и, следовательно, при решении этого треугольника необходимо брать видимые координаты.

В Астрономическом ежегоднике даются значения видимых координат большинства основных звезд через определенные интервалы времени; необходимые для решения параллактического треугольника видимые координаты звезд выбираются из ежегодника при помощи линейного интерполирования.

Но если даны средние экваториальные координаты звезды для какой-либо эпохи (что дается в звездных каталогах), то их предварительно надлежит исправить следующими поправками:

1) поправкой за прецессию и собственное движение звезды, за целое число лет, прошедших от эпохи каталога до начала года наблюдений; в результате получаются значения средних координат для начала года наблюдений;

2) поправкой за прецессию и собственное движение светила за долю года, протекающую от начала года до момента наблюдения; тогда получим средние координаты для момента наблюдения;

3) поправкой за нутацию; получим истинные значения координат для момента наблюдения;

4) поправкой за абerrацию; получим искомые видимые координаты звезды для момента наблюдений.

Введение указанных поправок называется приведением к видимому месту.

Перед выездом на полевые астрономические работы астроном должен установить наиболее целесообразные методы астрономических определений в зависимости от особенностей района работ, требуемой точности результатов астрономических определений, условий обеспечения наибольшего продвижения в работе и назначения данных астрономических работ. В соответствии с этим должны быть использованы наиболее целесообразные инструменты и выбраны методы и организация работ.

Наблюдатель-астроном должен иметь в своем распоряжении следующие рабочие эфемериды.

Эфемеридами называются таблицы, дающие зенитные расстояния и азимуты (с точностью  $1'$ ) звезд для определенных моментов или для ряда равноотстоящих моментов (обычно через  $10^m$ ). Поставив трубу в эфемеридный момент на зенитное расстояние и по указанному азимуту, увидим в поле зрения трубы нужную звезду. Так как применение различных способов астрономических определений, как увидим далее, требует использования различных звезд или в разном положении их на небесной сфере, то для каждого способа, как правило, необходимо составление своих особых эфемерид.

Эфемериды для наиболее часто применяющихся способов составляются и издаются заранее.

Подготовка к астрономическим наблюдениям в какой-либо вечер включает в себя:

1) составление программы наблюдений для данного вечера, т. е. установление вида астрономических определений, выбор звезд, установление порядка и последовательности наблюдений;

2) установку, регулировку и поверку инструмента (при этом должно быть обращено особое внимание на регулировку вертикальной оси) и определение места зенита из наблюдений земного предмета;



3) ориентирование горизонтального лимба, т. е. достижение такой его установки, чтобы при отсчете по лимбу, равно нулю, труба была направлена на точку юга; это ориентирование осуществляется по Полярной звезде или по земному предмету, азимут которого известен (при наличии такого земного предмета).

Ориентирование по Полярной производится на основании следующих соображений. Полярная звезда расположена близко к полюсу, так что ее склонение приблизительно равно  $89^\circ$  и, следовательно, азимут Полярной мал, поэтому решение параллактического треугольника для Полярной и вычисление ее эфемерид упрощается.

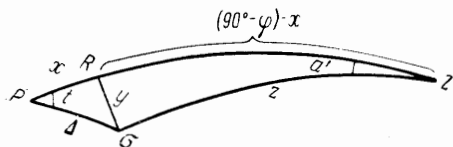


Рис. 177

Пусть на рис. 177 изображен параллактический треугольник, в котором светило  $\sigma$  является Полярной звездой. Опустив из  $\sigma$  перпендикуляр на сторону  $PZ$  и обозначив  $PR = x$ ,  $\sigma R = y$ , будем иметь из треугольника  $P\sigma R$ , который рассматривается по малости его сторон как плоский,

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta \cos t \\ y &= \Delta \sin t \end{aligned} \right\}, \quad (100.22)$$

где  $t$  определится из равенства

$$t = s - a. \quad (100.23)$$

Из прямоугольного сферического треугольника  $R\sigma Z$  имеем

$$\cos(\varphi + x) = \operatorname{ctg}(180^\circ - a) \operatorname{tg} y,$$

или, принимая во внимание небольшую величину угла  $180^\circ - a = a'$ , получим

$$\begin{aligned} a' &= y \sec(\varphi + x), \\ a' &= \Delta \sin t \sec(\varphi + x). \end{aligned} \quad (100.24)$$

Не отличая по малости угла  $a'$  сторону  $RZ$  от  $\sigma Z$ , будем иметь

$$z = (90^\circ - \varphi) - x. \quad (100.25)$$

Широта  $\varphi$  пункта наблюдений приблизительно известна; задавая через определенные интервалы значения моментов времени  $s$ , вычисляем для них по формуле (100.23) значения  $t$ ; затем вычисляем  $x$  и  $y$  по формулам (100.22), после чего формулы (100.25), (100.24) позволяют вычислять  $z$  и  $a'$  Полярной. Располагая результат вычисления в таблицу, получаем суточные приближенные рабочие эфемериды Полярной, дающие значения зенитных расстояний и азимутов через определенные промежутки времени (обычно через  $10^m$ ).

В Астрономическом ежегоднике помещаются таблицы, содержащие величины  $x$  и  $a$  (в ежегоднике  $x$  обозначается через  $f$ ), благодаря которым вычисление указанных эфемерид сводится к простому интерполированию. Часть этих таблиц Астрономического ежегодника на 1972 г. приводится ниже (табл. 23).

Высота Полярной  $h = \varphi + f$ ;  $f$  берут из первого столбца таблицы по аргументу  $s$ ; азимут находят в остальных столбцах по аргументам  $s$  и  $\varphi$ ; он считается от точки севера; если  $z$  лежит слева, то азимут будет западным, а если справа, то восточным.

Таблица 23

$s \backslash \varphi$	$f$	$50^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$
2 05	+0 52	0 00	0 00	0 00
2 25	+0 52	0 07	0 08	0 09
2 45	+0 51	0 14	0 16	0 18
3 05	+0 50	0 21	0 24	0 28
3 25	+0 49	0 28	0 32	0 36
3 45	+0 47	0 35	0 39	0 45
4 05	+0 45	0 41	0 46	0 53
4 25	+0 42	0 47	0 53	1 01
4 45	+0 40	0 53	0 59	1 08
5 05	+0 37	0 58	1 05	1 15
5 25	+0 33	1 03	1 10	1 21
5 45	+0 30	1 07	1 15	1 26
6 05	+0 26	1 10	1 19	1 31

Следовательно, при составлении рабочих эфемерид Полярной для данного пункта предварительно необходимо определить звездное время  $s$  на период наблюдений (год, месяц, часы).

Ориентирование лимба по Полярной производится следующим образом. Устанавливают трубу на зенитное расстояние Полярной, соответствующее данному моменту времени, после чего вращением трубы по азимуту наводят трубу на Полярную. Затем устанавливают лимб таким образом, чтобы отсчет по первому микроскопу или верньеру был равен азимуту Полярной, соответствующему данному моменту, в результате чего при нулевом отсчете по лимбу труба будет находиться в плоскости меридиана и тем самым лимб будет надлежаще ориентирован.

При ориентировании по азимуту земного предмета порядок ориентирования остается тот же; следует лишь иметь в виду, что в астрономической практике азимут отсчитывается от точки юга, а не от точки севера, как это имеет место в геодезии. Если дан дирекционный угол на земной предмет, то следует перейти к азимуту, изменив дирекционный угол на величину сближения меридианов.

После того как инструмент установлен, выверен и ориентирован, приступают к наблюдениям.

## § 101. Определение времени и широты при помощи измерений зенитных расстояний светил

### 1. Общие сведения

В начале предыдущего параграфа было показано, что если измерить зенитное расстояние какого-либо светила и зафиксировать по часам момент измерения, то из решения параллактического треугольника можно вычислить:

- поправку часов  $u$ , если известна широта  $\varphi$ ;
- широту  $\varphi$ , если известна поправка часов  $u$ .

Установим наиболее выгодные условия, при которых применение описываемого способа будет давать наилучший результат в отношении точности.

Из параллактического треугольника имеем

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

или, принимая во внимание, что

$$t = T + u - \alpha,$$

напишем:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (T + u - \alpha). \quad (101.1)$$

Полагая экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  безошибочными, после дифференцирования формулы (101.1) получим

$$-\sin z \, dz = \cos \varphi \sin \delta \, d\varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos t \, d\varphi - \cos \varphi \cos \delta \sin t (dT + du),$$

или

$$-\sin z \, dz = (\cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t) \, d\varphi - \cos \varphi \cos \delta \sin t (dT + du). \quad (101.2)$$

Из параллактического треугольника имеем

$$\left. \begin{aligned} -\sin z \cos a &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos t \\ \cos \delta \sin t &= \sin z \sin a \end{aligned} \right\}. \quad (101.3)$$

Учитывая формулы (101.3), выражение (101.2) перепишем в таком виде:

$$-\sin z \, dz = -\sin z \cos a \, d\varphi - \sin z \cos \varphi \sin a (dT + du)$$

или

$$dz = \cos a \, d\varphi + \cos \varphi \sin a (dT + du). \quad (101.4)$$

Решая последнее уравнение последовательно относительно  $d\varphi$  и  $du$ , заменяя дифференциалы конечными разностями  $\Delta z$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta T$  и  $\Delta u$ , рассматриваемыми как ошибки величин  $z$ ,  $\varphi$ ,  $T$  и  $u$ , получим

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta z}{\cos a} - \cos \varphi \operatorname{tg} a (\Delta T + \Delta u), \quad (101.5)$$

$$\Delta u = -\Delta T + \frac{\Delta z}{\cos \varphi \sin a} - \frac{\Delta\varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} a}. \quad (101.6)$$

Установим, при каких условиях ошибка  $\Delta\varphi$  в формуле (101.5) и ошибка  $\Delta u$  в формуле (101.6) будет иметь минимальное значение; очевидно, это будет тогда, когда коэффициенты при погрешностях в правых частях формул (101.5) и (101.6) имеют минимальное значение; кроме того, эти формулы позволяют установить порядок и программу наблюдений, при которых неизбежные погрешности, получаемые в отдельных приемах, имели бы наибольшую компенсацию в среднем из всех приемов.

Рассмотрение формулы (101.5) приводит к следующим заключениям относительно наивыгоднейших условий определений широты по рассматриваемому способу:

1) коэффициенты при ошибках  $\Delta z$  и  $(\Delta T + \Delta u)$  будут иметь минимальное значение при  $a = 0$  или  $180^\circ$ ; следовательно, наблюдения должны выполняться в меридиане, практически — вблизи меридиана;

2) так как при наблюдениях вблизи меридиана ошибка в  $\Delta\varphi$ , вызываемая  $(\Delta T + \Delta u)$ , будет хотя и мала, но не равна нулю, то следует половину наблюдений производить до прохождения через меридиан, а вторую половину — после прохождения через него; в этом случае указанные ошибки наблюдений

до и после прохождения через меридиан будут иметь разные знаки и в среднем компенсироваться;

3) при  $a$ , равном 0 или  $180^\circ$ , т. е. при  $\cos a$ , равном 1 или  $-1$ , член  $\frac{\Delta z}{\cos a}$  будет иметь разные знаки; поэтому надлежит широту определять по северным и южным звездам, наблюдая по очереди то одну, то другую попарно; в этом случае ошибки в широте, обусловленные ошибкой в  $\Delta z$ , в среднем из наблюдений северных и южных звезд будут компенсироваться.

Рассмотрение формулы (101.6) приводит к следующим заключениям относительно наивыгоднейших условий определения поправки часов:

1) влияние ошибок в  $\Delta z$  и  $\Delta \varphi$  будет минимальным при  $a = 90$  или  $270^\circ$ , т. е. когда  $\sin a = \pm 1$  и  $\operatorname{tg} a = \infty$ ; следовательно, наблюдения с целью определения поправки часов надлежит производить в первом вертикале, практически — вблизи первого вертикала;

2) при  $a = 90$  или  $270^\circ$ , т. е. при  $\sin a = +1$  или  $-1$ , член  $\frac{\Delta z}{\cos \varphi \sin a}$  будет иметь разные знаки; поэтому поправку часов определять по западным и восточным звездам, наблюдая последовательно то одну, то другую попарно; в этом случае ошибки в поправке часов, обусловленные ошибкой в  $\Delta z$ , в среднем из наблюдений западных и восточных звезд будут компенсироваться;

3) ошибка поправки, обусловленная ошибкой отсчета по часам  $\Delta T$ , одинакова при всех условиях и зависит от точности отсчитывания часов.

Таковы выводы о наивыгоднейших условиях применения способа измерений зенитных расстояний для определения широты и поправки часов.

## 2. Определение широты

**А. Точное определение широты.** Формулы для вычисления широты из наблюдений северных и южных звезд напишутся на основании формул (93.8), (93.9) и (93.10):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \delta + z_m \\ \varphi &= \delta - z_m \\ \varphi &= 180^\circ - (z_m + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (101.7)$$

Эти формулы соответствуют верхней кульминации южнее зенита, верхней кульминации севернее зенита и нижней кульминации.

В формулах (101.7) символ  $z_m$  обозначает зенитное расстояние светила в момент прохождения его через меридиан. Так как практически наблюдения ведутся не строго в меридиане, а вблизи него, то приходится в измеренные зенитные расстояния вводить малую поправку, которая называется *редукцией на меридиан* и обозначается через  $r$ . Формула этой поправки следующая:

$$\sin \frac{r}{2} = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \frac{1}{2}(z + z_m)} \sin^2 \frac{t}{2}. \quad (101.8)$$

В правую часть формулы входят как аргументы широта  $\varphi$  и зенитное расстояние  $z_m$ , которые неизвестны, поэтому редукцию приходится вычислять методом последовательных приближений. Практические формулы и порядок вычислений сообщаются в подробных курсах практической астрономии.

Измеренное зенитное расстояние исправляется поправкой за рефракцию, которая определяется по формуле (100.13), если известны давление и температура в момент наблюдений.

При применении настоящего способа определения широты, т. е. при наблюдении северной и южной звезд, наблюдения можно выполнять при одном круге.

В качестве северной звезды часто используют Полярную; для нее редукции на меридиан при больших значениях  $t$  должны вычисляться с большей тщательностью.

**Б. Приближенное определение широты по Полярной.** Формулы для вычисления широты по Полярной упрощаются благодаря тому, что склонение Полярной приближенно равно  $89^\circ$ , а следовательно, полярное расстояние  $\Delta = 90^\circ - \delta \approx 1^\circ$ .

Вывод формул для вычисления приближенной широты из наблюдения Полярной дадим по методу последовательных приближений.

**Первое приближение.** Полагая, что Полярная находится в точке полюса, в первом приближении имеем

$$\varphi = 90^\circ - z. \quad (101.9)$$

**Второе приближение.** Рассматривая малый треугольник  $PR\sigma$  (см. рис. 177) как плоский, имеем

$$x = \Delta \cos t, \quad (101.10)$$

так что

$$\varphi = (90^\circ - z) - \Delta \cos t. \quad (101.11)$$

**Третье приближение.** Решаем треугольник  $P\sigma Z$  как сферический и после преобразований с использованием значения широты из второго приближения согласно формуле (101.11) получим окончательно:

$$\varphi = (90^\circ - z) - \Delta \cos t + \frac{\Delta^2}{2\rho''} \sin^2 t \operatorname{tg} (90^\circ - z). \quad (101.12)$$

Для вычисления широты по измеренным зенитным расстояниям Полярной составлены специальные таблицы, помещаемые в Астрономическом ежегоднике, которые существенно упрощают и облегчают вычисления по этому способу.

В формуле (101.12)  $\Delta$  — видимое полярное расстояние для момента наблюдения, а в Астрономическом ежегоднике приводятся значения члена  $\Delta_0 \cos t$ , в котором  $\Delta_0$  является средним полярным расстоянием для начала года, поэтому необходимо ввести поправку за разность  $(\Delta - \Delta_0)$  между видимым полярным расстоянием и средним. Тогда формула (101.12) перепишется так:

$$\varphi = (90^\circ - z) - \Delta_0 \cos t + \frac{\Delta_0^2}{2\rho''} \sin^2 t \operatorname{tg} (90^\circ - z) - (\Delta - \Delta_0) \cos t, \quad (101.13)$$

или

$$\varphi = (90^\circ - z) + I + II + III, \quad (101.14)$$

где введены обозначения:

$$I = -\Delta_0 \cos t,$$

$$II = + \frac{\Delta_0^2}{2\rho''} \sin^2 t \operatorname{tg} (90^\circ - z),$$

$$III = -(\Delta - \Delta_0) \cos t.$$

При вычислении члена  $\frac{\Delta_0^2}{2\rho''} \sin^2 t' \operatorname{tg} (90^\circ - z)$  вследствие его малости раз-  
личием между  $\Delta$  и  $\Delta_0$  пренебрегают.

Значения величин I, II и III приводятся в Астрономическом ежегоднике, откуда они выбираются простым интерполированием.

В. О п р е д е л е н и е ш и р о т ы п о С о л н ц у. Метод определения широты из наблюдений Солнца остается тот же, что и из наблюдений звезд. Измерения зенитного расстояния Солнца менее точны по сравнению с измерениями зенитных расстояний звезд, поэтому и широта из наблюдений Солнца получается с меньшей точностью. Обычно из одного приема наблюдений Солнца получают широту с ошибкой  $\pm 0,1' - \pm 0,2'$ .

Для определения широты по Солнцу последнее, так же как и звезды, должно наблюдаться в меридиане, т. е. в момент истинного полудня. Так как для вычисления широты поправка часов  $u$  должна быть известна, то момент прохождения Солнца через меридиан  $(T)_0$  вычислится по формуле

$$(T)_0 = 12^h - \eta_0 - u,$$

или

$$(T)_0 = 24^h - T_\odot - u. \quad (101.15)$$

Для повышения точности наведения горизонтальной нити на Солнце наведения производят не на центр его, а на края; обычно делают по два наведения — на нижний и верхний края: до прохождения Солнца через меридиан и после прохождения, но при другом положении круга. Вертикальная нить должна в момент наведения проходить через центр Солнца. Схематически порядок наблюдений можно записать следующим образом:

До прохождения Солнца через меридиан	После прохождения Солнца через меридиан
КП (или КЛ)	КЛ (или КП)
1) $\odot$ хронометр, уровень,	3) $\odot$ хронометр, уровень,
вертикальный круг;	вертикальный круг;
2) $\odot$ хронометр, уровень,	4) $\odot$ хронометр, уровень,
вертикальный круг.	вертикальный круг.

Широта точки наблюдения определится по известной формуле:

$$\varphi = \delta_\odot + z_m,$$

где  $\delta_\odot$  — склонение Солнца;

$z_m$  — зенитное расстояние Солнца в момент истинного полудня;

Выражение для редукции  $r$  напишется на основании формулы (101.8) в следующем виде:

$$r = \frac{2 \cos \bar{\varphi} \cos \delta_\odot}{\sin \frac{1}{2} (z + z_m)} \sin^2 \frac{t_\odot}{2} \rho'',$$

или

$$r = \frac{2 \cos \bar{\varphi} \cos \delta_\odot}{\sin (\bar{\varphi} - \delta_\odot)} \sin^2 \frac{t_\odot}{2} \rho'', \quad (101.16)$$

где  $\bar{\varphi}$  — приближенное значение широты  $\varphi$ , взятое с карты;

$z$  — измеренное зенитное расстояние Солнца;

$r$  — редукция на меридиан;

$t_{\odot}$  — часовой угол центра истинного Солнца; он вычисляется по формуле

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} t_{\odot} &= T + u + \eta + 12^{\text{h}} \\ t_{\odot} &= T + u + T_{\odot} \end{aligned} \right\}. \quad (101.17)$$

Величина  $T_{\odot}$  выбирается из Астрономического ежегодника для момента местной гражданской полуночи методом интерполирования с часовыми изменениями, изложенным выше.

При обработке наблюдений в измеренные зенитные расстояния вводят поправки за рефракцию, параллакс и радиус Солнца.

### 3. Определение поправки часов

Один прием наблюдений для определения поправки часов по способу измерения зенитных расстояний заключается в наблюдении двух звезд — одной восточной и другой западной. Для наблюдений необходимо иметь заранее составленные рабочие эфемериды.

Наблюдения каждой звезды выполняют при круге право и круге лево, причем наблюдения при каждом положении круга заключаются в двух- или четырехкратной фиксации моментов прохождения звезд через горизонтальную нить; при каждом наблюдении производятся отсчеты по вертикальному кругу.

В результате наблюдений непосредственно измеренными величинами будут являться отсчеты по часам  $T$  и зенитные расстояния светила  $z'$ . Эти зенитные расстояния исправляются далее поправкой за рефракцию.

Формулы для вычислений получатся из решения параллактического треугольника. Предполагая, что широта места наблюдения известна, имеем

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

откуда

$$\cos t = \sec \varphi \sec \delta \cos z - \tg \varphi \tg \delta. \quad (101.18)$$

Далее

$$s = \alpha + t, \quad (101.19)$$

и окончательно

$$u = s - T. \quad (101.20)$$

При наблюдениях Солнца, в целях повышения точности измерений зенитных расстояний, наблюдения производят на нижний и верхний края Солнца. Непосредственно измеренные зенитные расстояния исправляют поправками за рефракцию, параллакс и радиус Солнца.

Формулы для вычисления будут следующие:

$$\cos t_{\odot} = \sec \varphi \sec \delta_{\odot} \cos z - \tg \varphi \tg \delta_{\odot}. \quad (101.21)$$

Среднее солнечное время определится по формулам

$$\left. \begin{aligned} m &= t_{\odot} - \eta \pm 12^{\text{h}} \\ m &= t_{\odot} - T_{\odot} \end{aligned} \right\}. \quad (101.22)$$

Поправка вычислится из равенства

$$u = m - T. \quad (101.23)$$

§ 102. Определение времени и широты  
по наблюдениям пар звезд на соответствующих высотах.

Понятие о некоторых других способах  
астрономических определений широты и времени

Произведем последовательно наблюдения двух звезд, находящихся на одинаковых зенитных расстояниях, т. е. при постоянном положении трубы по высоте, и зафиксируем моменты  $T_1$  и  $T_2$  прохождения звезд через одну и ту же горизонтальную нить трубы. Если  $\alpha_1, \delta_1$  и  $\alpha_2, \delta_2$  — экваториальные координаты выбранных для наблюдений звезд, то имеем

$$\cos z_1 = \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos t_1,$$

$$\cos z_2 = \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos t_2.$$

Так как по условию  $z_1 = z_2$  и  $t = T + u - \alpha$ , то основное уравнение способа соответствующих высот напишется так:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos (T_1 + u - \alpha_1) = \sin \varphi \sin \delta_2 + \\ + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos (T_2 + u - \alpha_2). \end{aligned} \quad (102.1)$$

В уравнении (102.1) две неизвестные величины: широта  $\varphi$  и поправка  $u$ . Следовательно, для определения из уравнения (102.1) одной из указанных величин другая должна быть известна.

Если известна широта  $\varphi$ , то из уравнения (102.1) определяется поправка часов  $u$ . Этот способ определения времени называется способом Цингера — по имени русского астронома-геодезиста, предложившего этот способ в 1874 г.

Если известна поправка  $u$ , то уравнение (102.1) позволяет определить широту данного пункта  $\varphi$ . Этот способ определения широты называется способом Певцова — по имени русского астронома-геодезиста, предложившего этот способ в 1887 г.

Эти способы обладают большими достоинствами: при их применении нет необходимости в измерении зенитных расстояний и, таким образом, значительная часть случайных и систематических ошибок измерений отпадает. Оба способа просты и остроумны по идее, удобны по выполнению и обеспечивают высокую точность результатов. Наблюдения заключаются в фиксации по часам момента прохождения двух звезд через горизонтальные нити при постоянном положении трубы инструмента по высоте.

Наивыгоднейшие условия применения способа соответствующих высот исследуют путем, описанным в § 101. Опуская подробности дифференцирования и преобразований, напишем выражения для ошибок поправки часов и широты пункта:

$$\Delta u = \frac{\sin a_2 \Delta T_2 - \sin a_1 \Delta T_1}{\sin a_1 - \sin a_2} + \frac{\cos a_2 - \cos a_1}{\cos \varphi (\sin a_1 - \sin a_2)} \Delta \varphi, \quad (102.2)$$

$$\Delta \varphi = \cos \varphi \frac{\sin a_2 \Delta T_2 - \sin a_1 \Delta T_1}{\cos a_1 - \cos a_2} + \cos \varphi \frac{\sin a_2 - \sin a_1}{\cos a_1 - \cos a_2} \Delta u. \quad (102.3)$$

Значение первого члена уравнения (102.2) будет тем меньше, чем меньше ошибки  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  фиксации моментов прохождения звезд через нити по часам. Точность определения этих моментов будет тем больше, чем круче путь звезды по отношению к горизонтальной нити, что имеет место при азимутах, равных 90 и 270°, т. е. в первом вертикале.



Второй член уравнения (102.2) будет равен нулю при

$$\begin{aligned} \cos a_2 - \cos a_1 &= 0, \\ \text{откуда} \quad a_2 &= 360^\circ - a_1. \end{aligned} \quad (102.4)$$

Следовательно, для определения поправки по способу Цингера необходимо брать две звезды — западную и восточную — вблизи первого вертикала и таким образом, чтобы обе звезды располагались в моменты наблюдений возможно симметричнее относительно меридиана.

Наименьшее значение первого члена уравнения (102.3) для  $\Delta\varphi$  будет при  $\sin a_1 = \sin a_2 = 0$ , что имеет место при  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 180^\circ$ , т. е. при наблюдении звезд в меридиане — одной на юге, другой на севере. Второй член будет равен нулю при условии  $\sin a_2 - \sin a_1 = 0$ , что возможно при

$$\begin{aligned} \text{или} \quad a_2 &= 180^\circ - a_1 \\ a_2 &= 540^\circ - a_1 \end{aligned} \quad (102.5)$$

Следовательно, наивыгоднейшие условия для определения широты по способу Певцова будут иметь место при наблюдении северной и южной звезд по одну сторону от меридиана и на приблизительно равных от него удалениях. Так как вблизи меридиана движение звезд по высоте мало, практически приходится несколько отступать от меридиана — на угол от 6 до  $40^\circ$ , соблюдая, однако, условие (102.5).

Для того чтобы астроному не заниматься подбором пар звезд при применении способов Цингера и Певцова, имеются специально составленные эфемериды пар звезд для каждого способа в отдельности. Из указанных эфемерид интерполированием могут быть выбраны моменты времени, зенитное расстояние и азимуты обеих звезд для данной широты.

Производство наблюдений указанными способами очень просто. Если, например, необходимо определить поправку часов по способу Цингера, то процесс наблюдений заключается в следующем: выбрав подходящую для времени и места наблюдений пару звезд, устанавливают трубу по зенитному расстоянию и по азимуту, которые даны в эфемеридах для первой звезды (лимб должен быть перед наблюдениями ориентирован). После появления звезды в поле зрения трубы берут показание часов и, считая в уме секундные удары, фиксируют моменты прохождения звезды через горизонтальные нити\*, подправляя при этом положение трубы по азимуту таким образом, чтобы звезда пересекала нити в вертикальном биссекторе трубы. Не изменяя положения трубы по высоте, устанавливают алидадную часть инструмента по азимуту на вторую звезду. После появления ее в поле зрения трубы выполняют такие же наблюдения, как и при прохождении первой звезды.

Малые изменения зенитного расстояния трубы при наблюдениях обеих звезд учитываются специальным уровнем, расположенным перпендикулярно к горизонтальной оси вращения трубы и прочно скрепленным с указанной осью в период наблюдений данной пары. Этот уровень можно назвать поверительным. Его назначение — учитывать изменение положения трубы по высоте.

При определении широты по способу Певцова наблюдения производятся таким же образом.

---

\* Напомним, что в инструментах, предназначенных для астрономических наблюдений (например в универсальных инструментах), в фокальной плоскости трубы расположено 5—7 горизонтальных нитей.

Дальнейшим развитием способов Цингера и Певцова является способ, предложенный советским астрономом А. В. Мазаевым. В способе Мазаева, который называется способом равных высот, наблюдаются не две звезды, а серия звезд на одном альмукантарате, причем в каждой серии наблюдаемые звезды должны располагаться возможно равномернее по всей окружности. В одну серию наблюдений обычно включается 8—12 звезд.

Наблюдение каждой звезды заключается в фиксировании по часам моментов прохождения светила через заданный альмукантарат (так же как и в способах Цингера и Певцова). Наблюдения производятся на определенном, заранее выбранном альмукантарате, за который принимают альмукантарат, соответствующий зенитному расстоянию в  $45^\circ$  или  $30^\circ$ . Для альмукантарата, соответствующего  $z = 45^\circ$ , составлены специальные эфемериды, в которых по аргументу приближенной широты  $\varphi$  пункта наблюдения даются величины  $s$  — звездное время и  $a$  — азимуты светил.

Из наблюдений звезд по способу Мазаева одновременно определяют широту и поправку часов (долготу).

Основным исходным уравнением в способе Мазаева является уравнение (102.1). Для определения широты, долготы и поправки к принятому зенитному расстоянию достаточно, как минимум, иметь наблюдения трех звезд; следовательно, наблюдая по способу Мазаева серию звезд, число которых более трех, получаем избыточные измерения, вследствие чего обработка наблюдений производится по способу наименьших квадратов.

В точных полевых астрономических работах, например на пунктах триангуляции I и II класса для определения широты, применяется также способ измерения малой разности зенитных расстояний двух звезд (способ Талькотта). Изложим идею этого способа.

Выбираем две звезды, имеющие в данном месте кульминацию приблизительно в одно и то же время, причем одна из звезд должна кульминировать к югу от зенита, а другая — к северу от него. Обозначим:  $\delta_S$  и  $\delta_N$  — склонения южной и северной звезд соответственно,  $z_S$  и  $z_N$  — их зенитные расстояния в момент кульминации. Тогда на основании (93.8) и (93.12) имеем

$$\varphi = \delta_S + z_S$$

$$\varphi = \delta_N - z_N$$

и, взяв полусумму этих выражений, получим

$$\varphi = \frac{1}{2} (\delta_S + \delta_N) + \frac{1}{2} (z_S - z_N). \quad (102.6)$$

Это и есть основная формула рассматриваемого способа.

Склонения звезд известны. Если звезды выбрать таким образом, чтобы разность их зенитных расстояний была меньше диаметра поля зрения трубы, то разность  $z_S - z_N$ , входящая в формулу (102.6), может быть измерена при помощи окулярного микрометра без определения абсолютных значений зенитных расстояний звезд. Разность при помощи микрометра может быть измерена с высокой точностью; это, наряду с простотой, является достоинством данного способа.

Измерив  $(z_S - z_N)$ , легко находим искомую широту по формуле (102.6).

Для рассматриваемого способа имеются заранее составленные эфемериды, содержащие подобранные пары звезд.

Так как разность зенитных расстояний измеряется микрометром, а положение трубы по высоте предполагается неизменным, то в процессе наблюдения обращается особое внимание на выполнение этого условия: изменение положения трубы по высоте учитывается так же, как и в способах Цингера и Певцова, при помощи поверительного уровня.

К ориентировке лимба и установке трубы в меридиане, как это следует из самого способа, предъявляются более высокие требования, чем при применении описанных выше способов астрономических определений.

Для наблюдений по этому способу используют зенит-телескоп или универсал, снабженный окулярным микрометром и поверительным уровнем.

Точные определения времени на обсерваториях, на службе времени и основных долготных пунктах выполняют при помощи пассажного инструмента. Пассажный инструмент служит для наблюдения прохождения звезд через какой-либо вертикал и главным образом через меридиан. Схема инструмента проста. Инструмент состоит из массивной подставки, несущей стойки с лагерами. В лагерах помещается горизонтальная ось с трубой; на горизонтальную ось ставят или подвешивают чувствительный уровень. Инструмент отличается массивностью, более сильной оптикой по сравнению с точными геодезическими инструментами, большей чувствительностью уровня и тщательностью отделки цапф, от которых зависит постоянство его визирной плоскости.

Для определения времени плоскость большого круга инструмента с возможной точностью совмещается с плоскостью меридиана. Имеем

$$s = \alpha + t.$$

Но в меридиане в момент верхней кульминации звезд  $t = 0$ , следовательно, в момент кульминации  $s = \alpha$ . Если по часам в момент прохождения звезды через меридиан сделан отсчет  $T$ , то поправка часов вычислится по формуле

$$u = \alpha - T. \quad (102.7)$$

Таким образом, идея определения времени при помощи пассажного инструмента проста: необходимо фиксировать моменты прохождения звезды через меридиан. Так как плоскость большого круга инструмента не может быть практически точно совмещена с плоскостью меридиана, то наблюдаемый момент  $T$  редуцируется по соответствующим формулам на меридиан.

В современных пассажных инструментах наблюдения выполняют при помощи специального контактного микрометра.

В мореходной и авиационной астрономии, а также при производстве астрономических определений в северных районах \* применяется способ измерения высот светил в произвольных азимутах (способ Сомнера). Сущность этого способа заключается в следующем.

В любой момент времени для каждой звезды на земном шаре существует точка, для которой эта звезда будет находиться в зените.

На рис. 178, изображающем небесную сферу и Землю, такой точкой для светила  $\sigma$  является точка  $M$ . Она называется географическим местом светила  $\sigma$ .

\* Заметим, что точность астрономических определений широт, долгот и азимутов по большинству изложенных способов заметно падает по мере увеличения широты, начиная с  $60-65^\circ$ .

Из рис. 178 видно, что экваториальные координаты точки зенита будут равны

$$\left. \begin{aligned} \delta_Z &= \varphi \\ \alpha_Z &= s \end{aligned} \right\}. \quad (102.8)$$

Для зенита Гринвича имеем

$$\alpha_{Z_{Гр}} = S. \quad (102.9)$$

На рис. 178 меридиан Гринвича обозначен буквой  $G$ , а зенит Гринвича обозначен на сфере через  $Z_{Гр}$ .

Если через  $\varphi_*$  и  $\lambda_*$  обозначить географические координаты точки  $M$  географического места светила  $\sigma$ , имеющего экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$ , то

$$\left. \begin{aligned} \varphi_* &= \delta \\ \lambda_* &= s - S = \alpha_Z - \alpha_{Z_{Гр}} \end{aligned} \right\}. \quad (102.10)$$

Предположим, что в определяемой точке измерено зенитное расстояние светила  $\sigma$  и получено его значение, равное  $z$ . Это значит, что зенит точки наблюдения находится от  $\sigma$  на сферическом расстоянии  $z$ ; иначе говоря, зенит этой точки находится на малой окружности с центром в  $\sigma$  и радиусом, равным сферическому расстоянию  $z$ . Проекция этой окружности на поверхности Земли представится малой окружностью  $m_1 m_2 m_3$ , все точки которой отстоят от географического места светила  $M_*$  ( $\varphi_*, \lambda_*$ ) на сферическом расстоянии  $z$ ; следовательно, одна из точек этой окружности является точкой наблюдения. Эта окружность на земной поверхности называется кругом равных высот, так как во всех точках этой окружности светило  $\sigma$  имеет одну и ту же высоту над горизонтом или одно и то же зенитное расстояние  $z$ .

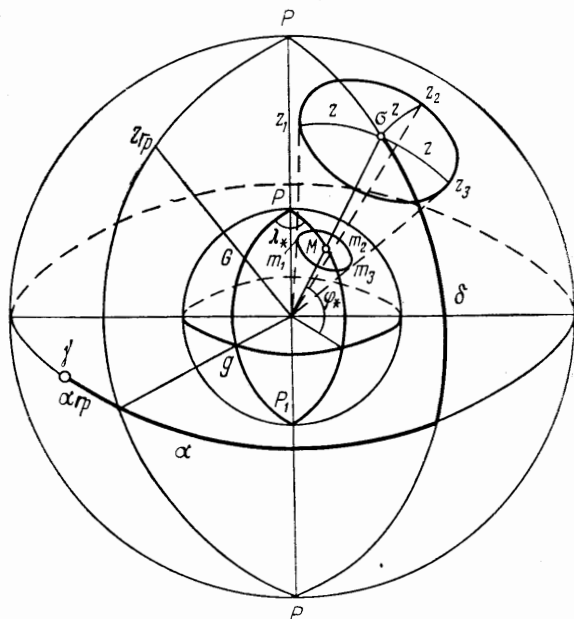


Рис. 178

Таким образом, измеренное зенитное расстояние одного светила в определенный момент определяет расстояние точки наблюдения от географического места светила, но еще не определяет положения точки наблюдения. Измерив в другой момент зенитное расстояние на второе светило, можно построить второй круг равных высот. Пересечение этих двух кругов и определит точку наблюдения, т. е. искомые координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ .

Изложенное и определяет сущность способа измерения высот светил в произвольных азимутах. Для наблюдения по этому способу следует брать звезды, имеющие разность азимутов около  $90^\circ$ . В этом случае пересечение дуг

обоих кругов высот произойдет под углом, близким к прямому; это будет невыгоднейший случай засечки.

Наблюдения двух звезд в рассматриваемом способе необходимы для определения искомых координат данной точки. Практически наблюдают большее число звезд, в результате чего получаются избыточные измерения, позволяющие вести обработку результатов наблюдений по способу наименьших квадратов.

Обработка результатов астрономических наблюдений, исполненных по данному способу, может производиться аналитическим и графическим методами. При применении этого способа для астрономических определений опорных пунктов обычно применяется аналитический метод. В мореходной и авиационной астрономии, т. е. при определении положения корабля на море и самолета в воздухе, предпочтение оказывается графическим методам, так как требования к точности определений в этих случаях значительно ниже и графические методы обработки наблюдений им удовлетворяют. Простота же, а главное быстрота определения координат при применении графических методов дает последним большие преимущества.

### § 103. Азимутальные определения

Общие основания астрономического определения азимута направления были указаны в § 100. Для полноты изложения вопросов данного параграфа кратко напомним их. Азимут светила в данный момент может быть получен из решения параллактического треугольника. Координаты светила  $\alpha$  и  $\delta$  и широта  $\varphi$  места наблюдения должны быть известны.

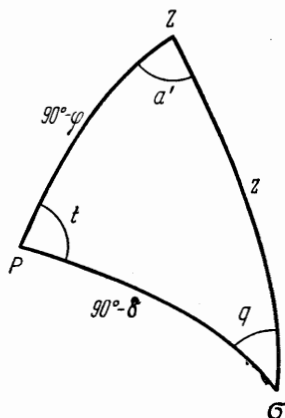


Рис. 179

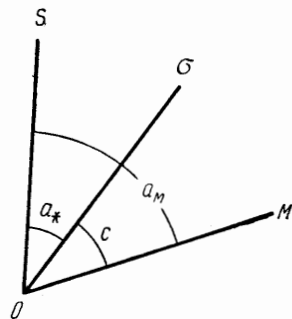


Рис. 180

Могут иметь место два случая.

**Первый случай.** Поправка часов  $u$  известна. Отметив в момент наблюдений светила отсчет  $T$  по часам, найдем

$$t = T + u - \alpha. \quad (103.1)$$

Следовательно, в треугольнике  $Pz\sigma$  (рис. 179) известны стороны  $(90^\circ - \varphi)$ ,  $(90^\circ - \delta)$  и угол  $t$ ; решая треугольник, находим азимут направления на светило в момент его наблюдения  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ . Этот способ нередко называют способом определения азимута по часовому углу светила.

Второй случай. Измерено в момент  $T$  зенитное расстояние  $z$ , и, следовательно, известны три стороны параллактического треугольника. Решение треугольника по трем сторонам приводит к определению азимута направления на светило в момент  $T$ , т. е.  $a' = 180^\circ - a$ .

Если  $OS$  — направление от точки наблюдения на точку юга  $S$  (рис. 180), то из астрономических наблюдений находят азимут светила  $a_*$ , изображающийся углом  $SO\sigma$ . Если в момент наблюдений светила  $\sigma$  измерить горизонтальный угол  $c = \sigma OM$  между светилом и земным предметом  $M$ , то искомый азимут земного предмета  $a_M$  определится по формуле

$$a_M = a_* + c.$$

Таким образом, определение азимута земного предмета сводится к определению азимута некоторого светила и измерению горизонтального угла между светилом и земным предметом.

Рассмотрим наивыгоднейшие условия для определения азимута светила.

Для первого случая напомним из параллактического треугольника по формуле котангенсов

$$\operatorname{tg} \delta \cos \varphi = \sin \varphi \cos t - \sin t \operatorname{ctg} a. \quad (103.2)$$

Дифференцируем эту формулу по переменным  $a$ ,  $\varphi$  и  $t$ . После тригонометрических преобразований и замены дифференциалов  $da$ ,  $d\varphi$  и  $dt$  ошибками  $\Delta a$ ,  $\Delta \varphi$  и  $\Delta t$ , найдем

$$\Delta a = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z} \Delta t - \frac{\sin a}{\operatorname{tg} z} \Delta \varphi. \quad (103.3)$$

Минимальное значение коэффициентов при  $\Delta t$  и  $\Delta \varphi$  бывает при наблюдении близполюсных звезд, имеющих склонение, близкое к  $90^\circ$ , и азимут, мало отличающийся от  $180^\circ$ . Из ярких звезд этим условиям наилучшим образом удовлетворяет Полярная звезда, для которой  $\delta \approx 89^\circ$ , а азимут близок к  $180^\circ$ . Удобство наблюдений по Полярной для определений азимута заключается еще в том, что указанные наивыгоднейшие условия сохраняются в течение суток, а следовательно, наблюдения допускается производить в любое время; поэтому, применяя первый способ при ночных наблюдениях, всегда используют Полярную. Если необходимо этим способом выполнить определения азимута по Солнцу, то наивыгоднейшие условия для наблюдений будут при восходе и заходе Солнца. Действительно, в этом случае  $\operatorname{tg} z$  близок к бесконечности, т. е. влияние второго члена пропадает, а  $\sin z = 1$  получает максимальное значение. Так как коэффициент при  $\Delta t$  не бывает близким к нулю, то для повышения точности результатов определений необходимо добиваться большей точности определения поправки, влияющей на точность вычисления  $t$ , как это видно из формулы (103.1).

Для второго случая из параллактического треугольника напомним

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos a. \quad (103.4)$$

После дифференцирования и простых преобразований найдем

$$\Delta a = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi \sin t} \Delta z - \frac{1}{\cos \varphi \operatorname{tg} t} \Delta \varphi. \quad (103.5)$$

Наименьшее значение коэффициентов при  $\Delta z$  и  $\Delta \varphi$  будет при  $t = 90$  или  $270^\circ$ , что соответствует в часовой мере  $t = 6^h$  или  $18^h$ , когда  $\sin t = \pm 1$ .

а  $\operatorname{tg} t = \pm \infty$ . Кроме того, поскольку первый член зависит от  $\cos q$ , то значение коэффициента при  $\Delta z$  будет тем меньше, чем  $q$  ближе к  $90^\circ$ . Это условие будет справедливо для звезд, имеющих элонгацию, в момент элонгации, когда  $\cos q = 0$ ; для звезд, не имеющих элонгации, — в тот момент, когда  $q$  имеет максимальное значение, т. е. при прохождении светила через первый вертикал. Таким образом, наивыгоднейшие условия для определения азимута по зенитным расстояниям будут иметь место при наблюдении светил, когда часовой угол близок к 6 или  $18^h$  и светило находится вблизи элонгации или первого вертикала.

Дальше будут рассмотрены способы определения азимута, которые преимущественно применяются на практике.

1. Приближенный способ определения азимута по Полярной. Этот способ уже описан в § 100. Из решения параллактического треугольника для Полярной было получено выражение азимута (100.24)

$$a' = \Delta \sin t \sec (\varphi + x),$$

или, не отличая  $\{90^\circ - (\varphi + x)\}$  от  $z$ ,

$$\left. \begin{aligned} a' &= \Delta \sin t \operatorname{cosec} z \\ a &= 180^\circ - a' \end{aligned} \right\}, \quad (103.6)$$

где  $\Delta = 90^\circ - \delta$ , и

$$t = s - \alpha = T + u - \alpha. \quad (103.7)$$

Зенитное расстояние вычисляется по формуле, получаемой из выражения (101.14),

$$z = 90^\circ - \varphi + 1.$$

Величина  $I$  выбирается, как указывалось ранее, из таблицы, помещаемой в Астрономическом ежегоднике.

Для рассматриваемого способа определения азимута по часовому углу  $t$  Полярной необходимо знать поправку часов хотя бы приближенно, до  $0,1-1,0^m$ , и приближенно широту до  $1'$ . Значение  $z$  целесообразно выбирать из рабочих эфемерид Полярной.

2. Приближенное совместное определение азимута земного предмета и поправки часов по Солнцу. Если измерено зенитное расстояние светила и известна широта точки наблюдения (в данном случае приближенно до  $0,1-1,0'$ ), то из решения параллактического треугольника по трем его сторонам могут быть найдены все его элементы, в том числе  $a' = 180^\circ - a$  и часовой угол  $t$ , по которому вычислится момент наблюдений светила. Произведя в этот момент отсчет по часам и сопоставив его с вычисленным моментом наблюдения, получим поправку часов.

При этом для повышения точности измерения зенитного расстояния наведение делают на нижний и верхний края диска Солнца; вертикальную нить в момент наблюдений с возможной точностью наводят на центр Солнца (биссектирование диска Солнца).

Для вычисления поправки используют формулы (101.18), полученные ранее, т. е.

$$\cos t_\odot = \sec \varphi \sec \delta_\odot \cos z_\odot - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_\odot, \quad (103.8)$$

или

$$\left. \begin{aligned} m &= t_\odot - \eta \mp 12^h \\ m &= t_\odot - T_\odot \\ u &= m - T \end{aligned} \right\}. \quad (103.9)$$

Для вычисления азимута земного предмета формулы получатся следующим образом. Из параллактического треугольника имеем

$$\sin \delta_{\odot} = \sin \varphi \cos z_{\odot} - \cos \varphi \sin z_{\odot} \cos a_{\odot},$$

откуда

$$\cos a_{\odot} = +\operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} z_{\odot} - \sin \delta_{\odot} \sec \varphi \operatorname{cosec} z_{\odot}. \quad (103.10)$$

Формулы для вычислений азимута и поправки часов могут быть также получены на основании формул полупериметра.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_{\odot} &= 90^{\circ} - \delta_{\odot}; \\ u &= 90^{\circ} - \varphi \end{aligned}$$

и

$$p = \frac{1}{2} (z_{\odot} + \Delta_{\odot} + u),$$

$$m^2 = \frac{\sin(p - z_{\odot}) \sin(p - \Delta_{\odot}) \sin(p - u)}{\sin p},$$

а также, имея в виду, что

$$a_{\odot} = 180^{\circ} - a'_{\odot} = 360^{\circ} - A_{\odot},$$

( $A_{\odot}$  — азимут Солнца, отсчитанный от точки севера), получим

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{m}{\sin(p - z_{\odot})};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A_{\odot}}{2} = \frac{m}{\sin(p - \Delta_{\odot})};$$

$$\operatorname{tg} \frac{q}{2} = \frac{m}{\sin(p - u)}.$$

Для вечерних наблюдений  $t_{\odot} = t$ , а для утренних  $t_{\odot} = 24^{\text{h}} - t$ . Для контроля вычислений имеем

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A_{\odot}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{q}{2} = \frac{m}{\sin p}.$$

Дальнейшее вычисление поправки часов производится по формулам (103.9).

Пользуясь горизонтальным углом  $c$  между земным предметом и центром Солнца, переходим к азимуту земного предмета  $M$

$$A_M = A_{\odot} \pm c.$$

При приближенном определении азимута из наблюдений зенитных расстояний Солнца поправка часов должна быть известна астроному приближенно, до нескольких минут. При вычислении азимута целесообразно использовать специальные таблицы, составленные инженером А. М. Петровым.

3. Определение азимута по способу Ф. Н. Красовского. В 1924 г. проф. Ф. Н. Красовским был предложен удобный в применении способ определения азимута земного предмета. Одним из достоинств этого способа является то, что при определении азимута нет необходимости знать время, а следовательно, и иметь при наблюдениях часы.

Сущность этого способа заключается в следующем. Все светила совершают в течение суток видимый путь по суточной параллели, причем видимая скорость



их перемещения по небесной сфере, и в частности по азимуту, различна, она зависит от склонения светила и от широты места наблюдения. Это можно видеть из формулы (103.3).

Следовательно, если взять две звезды, имеющие различное склонение, то разность их азимутов для данной точки наблюдения будет изменяться в течение суток. Каждому моменту суток на пункте с данной широтой  $\varphi$  будет соответствовать определенное значение разности азимутов этих двух звезд. Отсюда следует и обратный вывод: каждому значению разности азимутов двух рассматриваемых светил соответствует определенный момент времени. Следовательно, обозначив через  $Q$  указанную разность азимутов, можно написать

$$s = f(\alpha, \delta, \alpha_*, \delta_*, Q, \varphi), \quad (103.11)$$

где  $\alpha$  и  $\delta$  — координаты звезды, азимут которой нужно определить и за которую принимают Полярную;  $\alpha_*$ ,  $\delta_*$  — координаты второй звезды, называемой вспомогательной, за которую обычно принимают Мицар или  $\delta$  Кассиопеи;  $\varphi$  — широта пункта наблюдений. Но, как известно, азимут Полярной является функцией ее экваториальных координат, широты места и времени наблюдения, поэтому, принимая во внимание (103.11), можно символически написать

$$A = F(\alpha, \delta, \alpha_*, \delta_*, \varphi, Q), \quad (103.12)$$

где  $A$  — азимут Полярной, отсчитываемый от точки Севера.

В выражении (103.12) координаты обеих выбранных звезд в течение известного периода могут считаться постоянными; переменными величинами являются  $\varphi$  и  $Q$ .

Можно составить таблицы, дающие сразу значение азимута Полярной как функции двух аргументов — широты точки наблюдения и горизонтального угла  $Q$ , измеряемого непосредственно между Полярной и вспомогательной звездой. При помощи таких таблиц азимут Полярной вычисляется очень просто.

Строго говоря, для определения горизонтального угла между Полярной и вспомогательной звездами на обе эти звезды наведения должны были бы совершаться одновременно. Так как это при помощи теодолита сделать невозможно, то, как видно из описанного выше порядка наблюдений, наведения выполняют последовательно, но при обоих кругах симметрично относительно среднего момента данного приема. Практически при исполнении указанной программы наблюдений нужно следить, чтобы промежутки времени между наведениями на одну и другую звезду при обоих кругах были равны между собой в пределах  $1^m$ .

**4. Точное определение азимута земного предмета.** Точное определение азимута земного предмета производится также при помощи наблюдений Полярной.

Различие между точным определением азимута и приближенным заключается лишь в точности самих измерений, в учете ряда поправок, которыми пренебрегают при приближенном определении азимута.

**5. Определение азимута по Солнцу.** Определение азимута производится по часовому углу Солнца, т. е. по способу, одинаковому с описанным способом определения азимута по Полярной. Согласно выводу о наивыгоднейших условиях определения азимута, наблюдения должны выполняться в утренние и вечерние часы, при этом чем точнее необходимо получить азимут, тем строже следует соблюдать это условие.

Сущность способа и общий порядок наблюдений заключаются в том, что измеряется угол между центром Солнца и земным предметом с фиксацией

момента измерения по часам, поправка которых должна быть известна. По моменту наблюдения определяется часовой угол Солнца, в результате чего становятся известными три элемента параллактического треугольника: стороны  $90^\circ - \delta$ ,  $90^\circ - \varphi$  и угол  $t$ . Из решения этого треугольника определяется азимут Солнца в момент наблюдений. При помощи горизонтального угла между Солнцем и земным предметом вычисляется азимут направления на последний.

Наблюдения Солнца при приближенных определениях азимута заключаются в наведении вертикальных нитей непосредственно на центр Солнца; если необходимо получить азимут с возможно большей точностью, то наведения производят на левый и правый края Солнца с введением в последующем поправки  $y$  за радиус Солнца по формуле

$$y = \pm R_\odot \operatorname{cosec} z. \quad (103.13)$$

В этом случае также необходимо вводить поправку  $\frac{J''}{\operatorname{tg} z}$  за наклон горизонтальной оси, определяемый при помощи накладного уровня. Таким образом, значение окончательного направления на Солнце при наблюдении его левого или правого края вычислится по формуле

$$N_\odot = N'_\odot + \frac{J}{\operatorname{tg} z} \pm R_\odot \operatorname{cosec} z. \quad (103.14)$$

где  $N'_\odot$  — непосредственно измеренное значение направления на один из краев Солнца.

Формулы для вычислений будут следующие:

$$m = T + u$$

$$\begin{array}{l} \text{и} \\ \text{или} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} t_\odot = m + \eta + 12^h \\ t_\odot = m + T_\odot \end{array} \right\}. \quad (103.15)$$

Применяя к параллактическому треугольнику  $ZP\sigma$  формулу четырех элементов, напомним

$$\begin{array}{l} \text{откуда} \end{array} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_\odot \cos \varphi &= \sin \varphi \cos t_\odot - \sin t_\odot \operatorname{ctg} a_\odot, \\ \operatorname{ctg} a_\odot &= \sin \varphi \operatorname{ctg} t_\odot - \operatorname{tg} \delta_\odot \cos \varphi \operatorname{cosec} t_\odot. \end{aligned} \quad (103.16)$$

Азимут направления на земной предмет  $M$ , отсчитываемый от точки Юга, вычислится по соотношению

$$a_M = a_\odot \pm c, \quad (103.17)$$

где  $c$  — горизонтальный угол между центром Солнца и земным предметом в момент наблюдений.

#### § 104. Определение долготы пункта

В § 93 было указано, что разность долгот двух пунктов на земной поверхности равна разности часовых углов какого-либо светила, наблюдаемого в этих пунктах в один и тот же момент. То же самое относится к часовым углам любой точки небесной сферы. Возьмем в качестве таких точек точку весеннего равноденствия, центр истинного Солнца и центр среднего экваториального Солнца.

Вспомнив, что часовые углы этих точек численно равны соответственно звездному времени, истинному времени и среднему времени, напомним

$$\lambda_A - \lambda_B = s_A - s_B = t_{\odot A} - t_{\odot B} = m_A - m_B, \quad (104.1)$$

где значки  $A$  и  $B$  показывают, что время  $s$ ,  $t_{\odot}$  и  $m$  относится к пунктам  $A$  и  $B$  земной поверхности, а  $\lambda_A - \lambda_B$  представляет разность долгот этих двух пунктов.

Примем меридиан пункта  $B$  за начальный меридиан, т. е. будем подразумевать под пунктом  $B$  Гринвич, для которого  $\lambda_B = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= s - S \\ \lambda &= m - T_0 \end{aligned} \right\}, \quad (104.2)$$

где  $s$  и  $m$  — местное звездное и среднее время, а  $S$  и  $T_0$  — гринвичское звездное и среднее время, считаемое в один физический момент с  $s$  и  $m$ .

Таким образом, определение долготы данного пункта сводится к определению местного (звездного или среднего) и гринвичского (звездного или среднего) времени в один и тот же момент.

Местное время определяют путем астрономического определения поправки часов по одному из рассмотренных способов; зная поправку часов  $u$ , легко получить время как отсчет по часам плюс его поправка. Наиболее распространенным способом определения поправки часов является способ Цингера.

Гринвичское время определяют путем приема по радио сигналов точного времени, подаваемых в определенный момент по всемирному времени.

Время подачи радиосигналов бывает заранее известно; однако фактическая подача сигналов точно не совпадает с моментом, который предусмотрен программой передачи этих сигналов. Поэтому специальные службы времени определяют точные моменты фактической подачи радиосигналов и публикуют их в виде сводных моментов подачи ритмических сигналов.

Сравнивая показание хронометра, соответствующее моменту подачи сигналов, и зная этот момент подачи сигнала, легко получаем поправку часов  $U$  относительно гринвичского среднего времени, а именно

$$U = T_0 - T, \quad (104.3)$$

где  $T_0$  — момент подачи сигнала по среднему гринвичскому времени (всемирному), а  $T$  — показание часов в момент подачи сигналов.

Поправка звездного времени относительно гринвичского звездного времени определяется аналогично:

$$U = S - T, \quad (104.4)$$

где  $S$  — момент звездного времени, соответствующий моменту гринвичского среднего солнечного времени  $T_0$ , вычисляется на основании (98.10) по формуле

$$S = S_0 + T_0 + T_{0\mu}. \quad (104.5)$$

Если приняты сигналы в два различных момента  $T'$  и  $T''$  и определены поправки часов относительно гринвичского времени, то можно вывести их ход.

Пусть  $U_1$  — поправка часов относительно гринвичского времени в мо-

мент  $T'$ ;  $U_2$  — поправка тех же часов относительно гринвичского времени в момент  $T''$ . Тогда часовой ход  $\omega$  определится по формуле

$$\omega = \frac{U_2 - U_1}{T'' - T'}, \quad (104.6)$$

где  $T'' - T'$  должно быть выражено в часах и их долях.

Перейдем к описанию порядка вывода долгот. Для определения долготы данного пункта существует несколько программ, различающихся между собой количеством наблюдений и их расположением. Мы опишем нормальную программу, которая состоит в следующем:

- 1) прием сигналов первой радиостанции,
- 2) наблюдение четырех — восьми пар Цингера,
- 3) прием сигналов второй радиостанции.

Прием сигналов от двух радиостанций позволяет вывести ход часов и получить момент, соответствующий среднему моменту подачи радиосигналов по всемирному (гринвичскому) времени.

Из наблюдений пар Цингера получаем поправку часов относительно местного времени. Из приема радиосигналов выводим средний момент их приема. Поправку часов относительно местного времени приводим к этому же моменту, используя для этого полученный ход часов. Прибавив к этому моменту приведенную поправку, получаем местное звездное время в средний момент приема сигналов. Сравнивая полученное местное звездное время с известным гринвичским временем в средний момент приема сигналов, получаем искомую долготу.

Пусть из первого приема радиосигналов получено показание часов  $T'$  в момент подачи сигналов, а гринвичское среднее время подачи в этот момент равно  $T''$ . Соответствующее гринвичское звездное время  $S'$  получим на основании (98.10) по формуле

$$S' = S_0 + T'_0 + T'_{0\mu}. \quad (104.7)$$

Для второго приема радиосигналов будем иметь соответственно  $T''$ ,  $T'_0$  и  $S''$ . Средний момент приема радиосигналов найдется из равенства

$$T = \frac{1}{2} (T' + T''). \quad (104.8)$$

Этому моменту будет соответствовать гринвичское звездное время

$$S = \frac{1}{2} (S' + S''). \quad (104.9)$$

Далее, берем среднее арифметическое из значений поправок часов относительно местного звездного времени, полученных из наблюдений пар Цингера,  $u_m$ , которое будет соответствовать некоторому среднему моменту  $T_m$  как среднему арифметическому из показаний часов в моменты наблюдений пар Цингера, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u_m &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \\ T_m &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \end{aligned} \right\}, \quad (104.10)$$

где  $n$  — число пар Цингера, которые наблюдались в период между приемами двух радиостанций. Тогда поправка часов в момент сравнения  $T$  определится так:

$$u = u_m + \omega(T - T_m), \quad (104.11)$$

где  $\omega$  — часовой ход, получаемый по поправкам  $U_1$  и  $U_2$ , выводимым по результатам приема радиосигналов обеих станций, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{U_2 - U_1}{T'' - T'} \\ U_1 &= S' - T' \\ U_2 &= S'' - T'' \end{aligned} \right\}, \quad (104.12)$$

причем  $(T'' - T')$  выражено в часах и их долях. Местное звездное время будет равно

$$s = T + u, \quad (104.13)$$

Искомая долгота  $\lambda$  относительно Гринвича определится по формуле

$$\lambda = s - S. \quad (104.14)$$

Средняя ошибка вывода долготы на пунктах триангуляции I класса равна  $\pm 0,03^s$ .

Определение долготы основывается на точном определении времени. Время же определяется из астрономических наблюдений, заключающихся в фиксации моментов прохождения звезд через нити трубы. Опыт показывает, что результаты наблюдений астронома бывают искажены некоторой систематической ошибкой, которая является следствием того, что наблюдатель фиксирует момент прохождения светила через нить или немного раньше, или немного позже момента действительного нахождения светила на нити. Проистекающая вследствие этого ошибка в определении долготы называется личным уравнением астронома.

Личное уравнение астронома определяется следующим образом. Перед выездом на полевые астрономические работы астроном производит определение долготы на пункте, долгота которого уже известна с весьма большой точностью.

Если результат определения астрономом долготы на таком пункте обозначить через  $\lambda'_0$ , а известное значение долготы этого же пункта — через  $\lambda_0$ , то личное уравнение получится

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda'_0. \quad (104.15)$$

Личное уравнение в первоклассных работах определяется трижды: перед выездом на полевые работы, в середине полевого сезона и по окончании полевых работ. В долготы пунктов, полученные согласно (103.14), вводится поправка, равная значению личного уравнения астронома.

#### § 105. Сведения о постановке астрономических работ в СССР и применяемых методах

Астрономические определения I класса выполняются на обоих пунктах выходных сторон базисных сетей I класса, а также на промежуточных пунктах примерно через 70—100 км по линиям астрономо-геодезического нивелирования.

Выполнение астрономических определений на обоих пунктах выходных

сторон имеет целью повышение точности определения астрономического азимута и контроль.

Если  $\varphi_1, \lambda_1, \alpha_1$  — результаты астрономических определений на первом пункте (рис. 181), а  $\varphi_2, \lambda_2, \alpha_2$  — результаты астрономических определений на втором, то, если не учитывать ошибок астрономических измерений, должно точно удовлетворяться уравнение Лапласа

$$A_1 - \alpha_1 = -(\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1, \quad (105.1)$$

где  $A_1$  — азимут направления 1—2, вычисленный по формулам прямой геодезической задачи от азимута направления 2—1 (с принятием в качестве исходных данных астрономических координат  $\varphi_2, \lambda_2, \alpha_2$  пункта 2);  $L_1$  — геодезическая долгота пункта 1, вычисленная от пункта 2.

Величина расхождения между вычисленными значениями левой и правой частей уравнения (105.1) характеризует точность результатов определений азимутов и контролирует их. Взятие среднего из двух определений повышает точность конечного результата определения азимута. Астрономические наблюдения азимута и долготы на обоих пунктах должны быть исполнены с одинаковой точностью; широта же на втором пункте может быть определена с меньшей точностью.

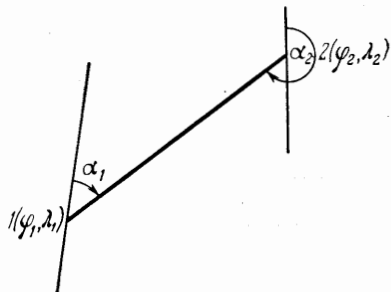


Рис. 181

Астрономические пункты 1 класса определяются со средними квадратическими ошибками:  $\pm 0,03''$  и  $0,50''$  — в определении долготы и азимута на обоих пунктах,  $\pm 0,30''$  — в определении широты.

Аналогичные определения производятся и при построении опорной сети 1 класса методом полигонометрии; заметим, что при проложении точных полигонометрических ходов и сетей роль азимутов Лапласа возрастает. При построении сплошных сетей 1 класса астрономические пункты 1 класса определяются примерно через 10 сторон.

Для астрономо-гравиметрического нивелирования необходимо иметь только широты и долготы, поэтому определение азимутов на пунктах для указанной цели может не производиться.

Астрономические определения 2 класса выполняют на пунктах базисных сторон 2 класса и в середине полигонов 1 класса.

Определение азимутов Лапласа в геодезических сетях 2 класса в настоящее время производится с той же точностью, как и на пунктах 1 класса.

Астрономические определения меньшей точности могут доставлять координаты пунктов как опорных для съемок в масштабе 1 : 100 000 в труднодоступных районах и как исходных пунктов при вычислении местных триангуляций, не привязанных к государственной триангуляции, и т. п.; широкое применение находят определения астрономических азимутов на пунктах ходов и сетей съемочного обоснования для контроля угловых измерений в них и повышения их точности.

Точность результатов астрономических работ на пункте зависит от многих условий: от точности и качества применяемых инструментов, от методов определений и способов наблюдений, от степени соблюдения условий, являющихся наимыгоднейшими при применении данного способа астрономических наблюдений; от количества приемов, от точности вычислений и полноты учета

различного рода поправок, от влияния систематических ошибок и от внешних условий. Немалую роль играет опытность астронома. Точность астрономических определений зависит от широты места наблюдений.

Соответственно этому устанавливают программы и методы астрономических определений и выбирают инструменты при определениях различной точности.

### § 106. Пулковская обсерватория

Пулковская обсерватория была основана в 1839 г. До ее организации в б. С.-Петербурге существовала обсерватория, построенная в 1725 г. по распоряжению Петра I. Эта обсерватория, являвшаяся одной из лучших в мире, занимавшая, по свидетельству современников, одно из прекраснейших зданий Европы, имела общий для всех обсерваторий того времени недостаток: она располагалась на высоком здании и потому не имела устойчивых оснований для установки инструментов. Кроме того, она помещалась в черте города, а городские условия (близость дымовых труб заводов, сотрясения почвы от экипажей, испарения Невы и т. п.) не благоприятствуют точным астрономическим наблюдениям. Следует, однако, отметить, что главная задача, которую ставили перед собой русские астрономы «допулковского» периода, заключалась в применении астрономии при путешествиях и географических обследованиях страны. Это направление астрономии получило самое широкое развитие сразу же после организации первой обсерватории. В течение XVIII века Россия превзошла другие государства в применении астрономии в географии.

Вопрос о выводе обсерватории за черту города был поднят в 1760 г.; однако лишь в 1834 г. было окончательно установлено место строительства будущей обсерватории: для этой цели были выбраны так называемые Пулковские высоты. В 1835 г. было начато строительство обсерватории, в 1839 г. оно было закончено, а 20 (7) августа 1839 г. состоялось открытие Пулковской обсерватории.

Параграф 2-й устава обсерватории, введенного в 1839 г., так определял задачи обсерватории: «Цель учреждения Главной обсерватории состоит в производстве: а) постоянных и сколь можно совершеннейших наблюдений, клонящихся к преуспеванию астрономии, и б) соответствующих наблюдений, необходимых для географических предприятий в империи и для совершаемых ученых путешествий, в) она должна содействовать всеми мерами усовершенствованию практической астрономии, в приспособлении ее к географии и мореходству и доставлять случай к практическим упражнениям в географическом определении мест».

Эта широкая программа астрономических наблюдений обсерватории легла к основу всей дальнейшей ее деятельности. Для нас примечательно отметить то, что при организации обсерватории и в дальнейшей ее работе отводилось большое место применению астрономии при «географических предприятиях» и «ученых путешествиях», имевших конечной целью географическое или картографическое изучение территории государства, т. е. имевших ту же цель, что и современная картографо-геодезическая служба.

Благодаря наличию точнейших по тому времени инструментов, глубокой научной продуманности и исключительному мастерству наблюдений Пулковская обсерватория стала наиболее совершенным астрономическим учреждением этого типа, «астрономической столицей мира» \*.

\* Директор Гринвичской обсерватории Эри в 1847 г. писал. «Ни один астроном не может считать себя вполне усвоившим современную астрономию в ее наиболее разработанной форме, если он не познакомился с Пулковской обсерваторией во всех ее особенностях» и далее

В Великую Отечественную войну Пулковским высотам было суждено стать одним из мест той границы героической обороны Ленинграда, через которую не смогли перешагнуть фашистские орды. В результате длительных артиллерийских обстрелов и воздушных бомбардировок, продолжавшихся в течение почти двух лет, немецко-фашистским варварам и мракобесам удалось разрушить почти до основания Пулковскую обсерваторию — эту цитадель мировой астрономической науки и уничтожить значительную часть уникальных и ценнейших инструментов и большую часть богатейшей фундаментальной библиотеки. Автору пришлось быть на руинах Пулковской обсерватории в 1945 г. вскоре же после окончания войны и видеть разрушенные здания, разбитые наблюдательные павильоны и башни, погнутые и исковерканные подставки и приспособления уничтоженных мощнейших труб, рефракторов и других точнейших астрономических инструментов, через которые русские и советские ученые проникали взором исследователей в неизведанные еще никем глубины вселенной.

В короткий срок при активном и самоотверженном участии коллектива обсерватории во главе с ее директором академиком А. А. Михайловым Пулковская обсерватория была восстановлена. Автору выпала честь принять участие в торжественном заседании и празднествах в Пулково, посвященных восстановлению и открытию обсерватории, оставивших в памяти яркие и незабываемые воспоминания. Это заседание и празднества, на которые прибыли многочисленные зарубежные гости — ученые-астрономы из многих стран мира, — прошли в обстановке большого подъема, гордости за свою Родину и огромного удовлетворения восстановлением в короткий срок на передовом научном уровне одного из уникальных научных учреждений страны — «астрономической столицы мира».

Нет сомнения, что дальнейшая работа советских ученых в Пулковской обсерватории приведет еще ко многим замечательным открытиям и тем самым еще более увеличит славу отечественной астрономической науки.

---

«...Я ничуть не сомневаюсь в том, что одно Пулковское наблюдение стоит по меньшей мере двух, сделанных где бы то ни было в другом месте».

Выдающийся французский физик Био писал (1848 г.): «Ни одно астрономическое учреждение никогда не было так широко задумано, так обдуманно устроено, так богато снабжено, как Пулковская обсерватория...»; «Теперь Россия имеет научный памятник, выше которого нет на свете».



## IV.

# ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

## Глава XVII

### § 107. Общие сведения.

#### Основные понятия о решении геодезических задач из наблюдений ИСЗ

С момента запуска (4 октября 1957 г.) в СССР первого искусственного спутника Земли началось активное освоение человеком космического пространства. Последующее бурное развитие ракетной техники и космонавтики поставило перед геодезией достаточно сложные и своеобразные задачи. Так, например, возникла чисто практическая необходимость в развитии единой системы координат на всю Землю, повысились требования к точности совмещения начала и направления осей государственной геодезической системы координат с центром масс Земли и ее осями инерции. Движение ракет и ИСЗ происходит в поле тяготения Земли и, следовательно, изучение характеристик этого поля становится особенно важным. Большие скорости движения ракет и ИСЗ привели к необходимости создания новых средств измерений и методов их обработки. С другой стороны, сами спутники открыли большие возможности для решения чисто геодезических задач. В итоге возникло новое направление геодезии — **космическая геодезия**.

Космическая геодезия изучает взаимное расположение точек земной поверхности и космических аппаратов, движущихся в гравитационном поле Земли, а также характеристики этого поля с помощью космических средств. Решение задач космической геодезии основывается на определении координат космических аппаратов, по результатам измерения (в основном) направлений, расстояний и относительных скоростей. Измерение направлений производится фотографическими и радиотехническими средствами. Расстояния и относительные скорости измеряются радиотехническими средствами и лазерами.

Производя фотографирование ИСЗ на фоне звездного неба и фиксируя время наблюдения, определяют известными астрономическими методами прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  ИСЗ. Некоторое отличие от обычных в астрономии способов возникает в связи с различием угловой скорости движения ИСЗ и звезд. В итоге при фотографических способах измеряются углы между направлениями на звезду и на спутник. Роль углового эталона играет звездное небо, так как угловые расстояния между звездами известны. Такой способ измерения углов не связан с отвесной линией, и в этом его большое преимущество.

Из радиотехнических методов наибольшее применение получили методы измерения радиальных скоростей  $\dot{r}$  и дальностей  $r$ . Измерение радиальных скоростей основано на эффекте Доплера. Передатчик, установленный на спутнике, излучает определенную эталонную частоту  $f_0$ . Принимаемая на наземной

станции частота  $f$  на основании эффекта Доплера испытывает сдвиг частоты  $\Delta f$ , зависящий от относительной скорости  $r$  спутника и наземной станции наблюдения. Если  $c$  — скорость света, а  $r$  — расстояние до спутника, то сдвиг частоты, вызванный эффектом Доплера, составляет

$$\Delta f = f - f_0 = \frac{f_0}{c} \cdot r, \quad (107.1)$$

где  $f$  — наблюдаемая частота и  $r$  — производная от дальности по времени.

В непосредственно измеренные величины необходимо вводить различные поправки (за рефракцию, аберрацию, сдвиг частоты и т. п.). Точность наблюдений зависит от применяющихся измерительных средств и от правильности введения в результаты измерений этих поправок. Принципиально точность наблюдений может быть доведена до дециметров в дальности и  $1''$  в углах.

Определяя координаты спутников Земли со станций, координаты которых известны, и со станций, координаты которых не известны, можно определить координаты последних. И так как движение ИСЗ происходит в гравитационном поле Земли, то изучение в координатной форме этого движения дает информацию о гравитационном поле Земли.

Математическое решение геодезических задач из наблюдений искусственных спутников достаточно сложно. Здесь первоначально дадим лишь общие понятия об этом методе, а более подробное — в последующих параграфах.

Если бы Земля была шаром, то действие силы ее притяжения на материальные тела было бы равно, согласно выводам § 56, действию силы притяжения материальной точки, имеющей массу Земли и расположенной в ее центре. Это предположение означает, что мы пренебрегаем вторым и третьим членами формулы для потенциала  $V$  в виде ряда (54.25), которые выражают влияние сжатия Земли и неравномерности распределения масс по долготе, т. е. полагаем, что

$$V = f \frac{M}{R}.$$

В этом случае движение спутника, после вывода его на орбиту, должно было бы совершаться по закону Кеплера, т. е. по плоской кривой — эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Однако вследствие эллипсоидальности Земли орбита спутника претерпевает возмущения — отклоняется от плоской кривой; если использовать понятие «мгновенной орбиты», то можно сказать, что спутник движется по плоской орбите, но сама плоскость орбиты непрерывно вращается и параметры ее изменяются. Эти отклонения — возмущения поддаются аналитическому выражению на основе закона всемирного тяготения, если учесть второй, третий и последующие члены разложения потенциала в ряд (54.25). Этим самым определяется математическая зависимость между сжатием и эллиптичностью земного экватора, с одной стороны, и характеристиками действительной орбиты спутника, с другой. Определяя эти характеристики из непосредственных наблюдений и используя указанные зависимости, получаем возможность вычислить сжатие Земли и эллиптичность ее экватора.

Для определения сжатия Земли из непосредственных наблюдений движения спутника необходимо иметь: скорость вращения орбиты, полуось орбиты и наклон ее к плоскости экватора. По этим данным, а также по значениям большой полуоси земного эллипсоида, силе тяжести на экваторе (определяемым из геодезических и гравиметрических измерений) и вычисляется сжатие Земли.

Выведенное из наблюдений искусственных спутников сжатие характеризует эллипсоидность Земли в целом, т. е. должно рассматриваться как

сжатие общего земного эллипсоида, а не сжатие, наилучшее подходящее к какой-либо части поверхности Земли, определяемое из градусных измерений и из гравиметрических наблюдений (при незавершенности мировой гравиметрической съемки).

Оказывается, что вывод сжатия Земли из наблюдений искусственных спутников совершается с весьма большой точностью; это — следствие того, что сжатие Земли вызывает весьма значительное влияние на орбиту спутника. Можно указать, что влияние сжатия Земли на скорость вращения мгновенной орбиты спутника в 10 000 раз больше воздействия притяжения Луны и Солнца. Поэтому влияние сжатия на орбиту спутника определяется из наблюдений уверенно и достаточно точно, а вычисляемое из этих наблюдений значение сжатия Земли по точности должно быть поставлено на первое место. Вычисления сжатия из наблюдений спутников Земли определили его значение, равное  $\frac{1}{298,26}$ .

При помощи искусственных спутников может осуществляться геодезическая связь между точками, расположенными на больших расстояниях, например, между геодезическими пунктами разных материков. Такая геодезическая связь позволяет устанавливать различие в принятых системах координат при необходимости перевычислять координаты пунктов одной системы в другую.

Решение этой задачи имеет большое научное и практическое значение. Обычные геодезические методы (триангуляция и полигонометрия) для указанной цели не пригодны вследствие больших расстояний между материками. Наблюдения искусственных спутников Земли открывают новые возможности решения этой важной задачи независимо от расстояния между материками.

Объясним идею двух методов геодезической связи материков из наблюдений искусственных спутников.

Первый метод, называемый синхронным, основан на использовании одновременных наблюдений искусственного спутника с конечных точек базисов, расположенных на разных материках. Пусть на рис. 182 *A* и *B* — два материка, на которых выбраны некоторые базисы *ab* и *cd*, конечные точки которых — пункты триангуляции. Измерив одновременно в конечных точках базисов углы  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  и зенитные расстояния, т. е. углы между направлениями

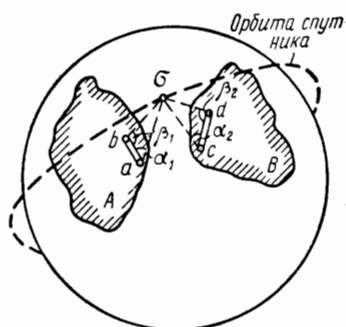


Рис. 182

линий базисов и направлениями на искусственный спутник *σ*, из вычислений устанавливаем геодезическую связь между пунктами обоих базисов, т. е. между триангуляциями, построенными на обоих материках. В данном методе искусственный спутник Земли является как бы визирной целью, координаты которой независимо определяются засечками с пунктов триангуляции обоих материков. Если не принимать во внимание ошибки наблюдений, то различие в значениях вычисленных координат спутника с обоих базисов будет характеризовать различие систем координат, т. е. влияние разностей параметров референц-эллипсоидов, принятых при вычислении триангуляционных сетей на обоих материках. Наблюдения спутника следует производить многократно.

Не останавливаясь на технике наблюдений искусственного спутника,

отметим лишь, что описанный метод требует одновременной видимости его с пунктов обоих базисов. Отсюда следует, что применение этого метода возможно при сравнительно незначительных расстояниях между материками. Нетрудно также сделать вывод, что чем больше высота орбиты спутника Земли, тем значительнее может быть расстояние между базисами. Точная фиксация времени при этом необязательна.

Возможно при помощи ИСЗ решение и несколько иной задачи: по заданным координатам двух пунктов  $A, B$  определить координаты третьего пункта  $C$ , с которым геодезическая связь обычными наземными методами затруднительна или невозможна. Производя одновременные наблюдения искусственного спутника при нескольких его положениях, легко устанавливаются связи между заданными пунктами  $A$  и  $B$  и определяемым пунктом  $C$ . Конечно, описанным способом возможно определение многих пунктов. Последовательное построение образуемых по описанной схеме фигур создает своеобразную геодезическую сеть, называемую космической триангуляцией. Возможно иное построение с искусственным спутником, называемое космической полигонометрией.

Второй метод, называемый орбитальным, заключается в следующем.

Из одновременных наблюдений с нескольких пунктов триангуляции на каждом материке определяются пространственные координаты положения спутника в какой-либо точно фиксируемый определенный момент времени. Если известны параметры орбиты, то указанными наблюдениями устанавливается определяемая геодезическая связь между пунктами триангуляции, расположенными на разных материках. На рис. 183 контуры  $A$  и  $B$  схематически изображают два материка. Произведя одновременно наблюдения искусственного спутника с материка  $A$  в момент времени  $T_1$ , из вычислений получаем пространственные координаты спутника в этот момент в системе координат триангуляции материка  $A$ . Произведя аналогичные наблюдения с материка  $B$ , получаем координаты спутника в системе координат триангуляции второго материка в момент  $T_2$ . Но зная параметры движения искусственного спутника и координаты его в момент  $T_1$  (в первой системе координат), можем вычислить координаты его в той же системе в момент  $T_2$ . Сопоставляя вычисленные таким образом координаты спутника с его координатами, полученными из наблюдений с материка  $B$ , получаем разности координат спутника, которые позволяют выявить различия в системах координат, принятых в вычислениях триангуляций обоих материков. Конечно, это очень схематическое объяснение с целью показать лишь основную идею — принцип метода; при более подробном рассмотрении этой задачи рассуждения значительно сложнее, а решение ее основывается на разделах математики и механики, обычно выходящих за пределы программы дисциплин, изучаемых в технических вузах.

При этом методе нет необходимости одновременно видеть спутник с обоих материков, поэтому связь может осуществляться при любых расстояниях между материками. Существенное условие для применения этого метода —

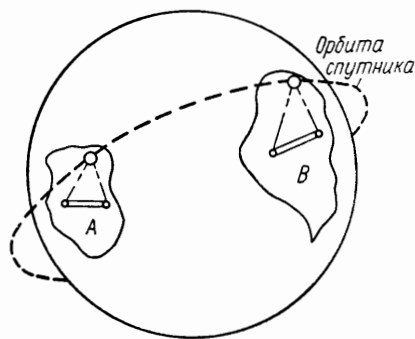


Рис. 183

достаточно точное знание параметров орбиты и времени наблюдений с пунктов триангуляции на каждом материке. Отсюда следует, что искусственные спутники, предназначенные для геодезических целей, должны иметь устойчивую и хорошо известную орбиту, а угловые измерения с пунктов триангуляции на каждом материке для определения упомянутых координат спутника должны сопровождаться точным определением времени наблюдений. Конечно, во время полета спутника должны приниматься соответствующие радиосигналы.

Существуют и иные методы использования искусственных спутников для геодезических связей материков. При соответствующих параметрах спутников и программе наблюдений их с Земли специальной аппаратурой могут определяться и координаты точек земной поверхности.

Таким образом, область использования искусственных спутников Земли для геодезических целей достаточно обширна.

### § 108. Основы теории движения искусственного спутника Земли

Движение спутника по орбите происходит под влиянием поля тяготения Земли. Кроме того, играют роль и притяжение других тел, сопротивление атмосферы, световое давление и другие силы.

Ускорение  $g$  спутника, вызываемое силой тяготения Земли, может быть определено через силовую функцию Земли  $V$  как

$$\vec{g} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (V), \quad (108.1)$$

где  $\vec{r}$  — вектор положения спутника в геоцентрической системе координат.

Силовая функция Земли во внешней точке, определяемая суммарным притяжением материальных точек, составляющих физическое тело Земли, равна

$$V = f \iiint\limits_{(T)} \frac{dm}{r}, \quad (108.2)$$

где  $dm$  — масса элементарного объема в теле Земли;  $r$  — расстояние от центра этого объема до внешней точки;  $f = 6,670 \times (1 \pm 0,0007) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$  есть постоянная тяготения.

Интегрирование нужно вести по всему телу Земли, для чего необходимо знать закон распределения плотности внутри Земли. Так как этот закон неизвестен, то в геодезии и небесной механике идут по другому пути — разлагают выражение для силовой функции (108.2) в ряд по сферическим функциям, представляя его, например, в следующем виде:

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^m C_{mn} \cdot \cos nl + S_{mn} \cdot \sin nl \right) \left( \frac{r_0}{r} \right)^m \cdot P_{mn} \psi, \quad (108.3)$$

где  $\mu = fM$  — гравитационный параметр Земли;  $M$  — масса Земли;  $r, \psi, l$  — сферические координаты спутника;  $r_0$  — средний радиус Земли;  $P_{mn}$  — полиномы Лежандра;  $C_{mn}, S_{mn}$  — постоянные величины, зависящие от формы

и внутреннего строения Земли и определяемые по результатам гравиметрических и спутниковых наблюдений.

Вектор ускорения спутника, вызываемого телом Земли, равен

$$\bar{g}_3 = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial \bar{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \nabla \bar{V}, \quad (108.4)$$

где  $\bar{r}$  — вектор положения спутника;  $\nabla \bar{V}$  — вектор, составляющие которого равны частным производным возмущающей части силовой функции Земли по соответствующим координатам.

Ускорение спутника, вызываемое притяжением других планет, представим в виде

$$\bar{g}_n = \sum_{i=1}^k \mu_i \left( \frac{\bar{r}_i - \bar{r}}{|\bar{r}_i - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (108.5)$$

где  $\mu_i$ ,  $\bar{r}_i$  — соответственно гравитационный параметр и вектор положения  $i$ -й планет.

Сила, с которой спутник тормозится атмосферой, называется силой лобового сопротивления. Ускорение, вызываемое этой силой, равно

$$\bar{g}_a = - \frac{1}{2} C_x \frac{A}{m} \rho(H) v \cdot \bar{v}, \quad (108.6)$$

где  $C_x$  — коэффициент аэродинамического сопротивления;  $A$  — площадь сечения ИСЗ;  $v$  — скорость ИСЗ относительно Земли;  $\rho(H)$  — плотность атмосферы как функции высоты;  $m$  — масса ИСЗ.

Ускорение, испытываемое спутником под действием светового давления, определяется формулой

$$\bar{g}_c = K \frac{A}{m} \cdot \frac{\bar{r}_c - \bar{r}}{|\bar{r}_c - \bar{r}|^3}, \quad (108.7)$$

где  $K$  — коэффициент, характеризующий излучающую способность Солнца и отражательные свойства поверхности объекта.

В итоге дифференциальное уравнение движения спутника под действием перечисленных сил может быть записано как

$$\bar{g} = - \frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \nabla \bar{V} + \bar{g}_n + \bar{g}_a + \bar{g}_c \quad (108.8)$$

или

$$\bar{g} = - \frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \bar{g}_b, \quad (108.9)$$

где  $\frac{\mu}{r^3} \bar{r}$  — основное ускорение, вызванное притяжением Земли, рассматриваемой как материальная точка;  $\bar{g}_b$  — возмущающее ускорение, вызванное другими силами.

Траектория спутника определяется интегрированием этого уравнения. Решение задачи о движении спутника достаточно сложно и в качестве первого приближения рассматривают движение спутника под действием материальной точки с массой, равной массе Земли. Такое движение происходит в поле центральной силы и называется невозмущенным или кеплеровым (подчиняющимся законам Кеплера). Учет других воздействий и членов разложения потенциала дает возмущения в движении спутника.

# 1. Невозмущенное движение

Кеплер вывел законы движения планет вокруг Солнца, но они справедливы для любого тела, массой которого можно пренебречь по сравнению с массой притягивающего тела, причем последнее должно обладать центральной симметрией распределения плотностей.

Законы Кеплера:

1. Орбиты планет суть эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2. Радиус-вектор каждой планеты описывает равные площади в равные промежутки времени.

3. Отношение квадратов периодов обращения двух планет равно отношению кубов их больших полуосей.

Траектории движения небесных тел могут быть круговыми, эллиптическими, параболическими или гиперболическими. Кроме того, в поле центральной силы возможно еще радиальное движение (подъем по вертикали и свободное падение).

Пусть центральное тело расположено в начале координат и имеет массу  $M$ . Спутник имеет бесконечно малую массу, и его положение задается вектором  $\vec{r}$ . Тогда действующая на спутник сила, отнесенная к единице массы, равна

$$\vec{g} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}. \quad (108.10)$$

В результате имеем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой зависит от шести произвольных постоянных.

Умножим уравнение (108.10) скалярно на  $2\dot{\vec{r}}$  и получим

$$2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \cdot 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (108.11)$$

или

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{d}{dt} (r^2), \quad (108.12)$$

но так как

$$\dot{\vec{r}} = v^2, \quad \vec{r}^2 = r^2, \quad (108.13)$$

то

$$\frac{d}{dt} (v^2) = -\frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{d}{dt} (r^2) \quad (108.14)$$

или

$$\frac{d}{dt} (v^2) = -\frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (108.15)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \quad (108.16)$$

Выражение (110.16) называется интегралом энергии, а постоянная интегрирования  $h$  — постоянной энергии. Вид орбиты зависит от значения постоянной энергии:  $h = -\mu/r$  — по окружности,  $h < 0$  — по эллипсу,  $h = 0$  — по параболе,  $h > 0$  — по гиперболе.

Если спутник движется по коническому сечению (не по прямой), то векторное произведение его положения  $\vec{r}$  на скорость  $\vec{V}$  выразится следующим образом:

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \neq 0. \quad (108.17)$$

Дифференцируя это выражение по  $t$ , получим

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \ddot{\bar{r}}. \quad (108.18)$$

Учитывая, что

$$\dot{\bar{r}} \times \dot{\bar{r}} = 0$$

и

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = -\mu \frac{1}{r^3} (\bar{r} \times \bar{r}) = 0,$$

получим

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = 0 \quad (108.19)$$

и после интегрирования

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{c}, \quad (108.20)$$

где  $\bar{c}$  — постоянный вектор, называемый константой площадей.

Уравнение (108.20) называют интегралом площадей, и оно может быть переписано в координатной форме следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2 \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3 \end{aligned} \right\}. \quad (108.21)$$

Величины  $c_1, c_2, c_3$  называются постоянными площадей.

Из уравнений (108.21) легко получить важное соотношение

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = xyz - xzy + zyx - xyz + xzy - yzx = 0. \quad (108.22)$$

Постоянные площадей  $c_1, c_2, c_3$  образуют вектор кинетического момента и определяют плоскость, уравнение которой

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0. \quad (108.23)$$

Эта плоскость проходит через начало координат (притягивающую точку  $M$ ) и является плоскостью орбиты.

Умножив  $\bar{c}$  векторно на  $\bar{r}$ , получим

$$\bar{c} \times \bar{r} = -\frac{\mu}{r^3} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) \times \bar{r} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} \times (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}),$$

и, воспользовавшись известным векторным тождеством

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

найдем

$$\bar{c} \times \ddot{\bar{r}} = -\frac{\mu}{r^3} [\bar{r} \cdot (\bar{r} \cdot \dot{\bar{r}}) - \bar{V} \cdot (\bar{r} \cdot \bar{r})] = -\frac{\mu}{r^3} [\dot{\bar{r}} \cdot \bar{r}^2 - \bar{r} \cdot \dot{\bar{r}} \bar{r}] = -\mu \frac{\dot{\bar{r}} \cdot \bar{r} - \bar{r} \cdot \dot{\bar{r}}}{r^2} \quad (108.26)$$

и

$$\frac{d}{dt} (\bar{c} \times \dot{\bar{r}}) = -\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{r}}{r} \right). \quad (108.27)$$

Интегрируя, найдем

$$\bar{c} \times \dot{\bar{r}} = \mu \frac{\bar{r}}{r} = -\bar{f}, \quad (108.28)$$



где  $\bar{f}$  — некоторый постоянный вектор, называемый вектором Лапласа.

Уравнение (108.28) называют уравнением Лапласа. Нетрудно убедиться, что вектор  $\bar{c}$  ортогонален вектору  $\bar{f}$ , т. е.

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0. \quad (108.29)$$

Вектор  $\bar{c}$  ортогонален плоскости орбиты, а вектор  $\bar{f}$  лежит в этой плоскости и определяет фокальную ось орбиты. Умножив (108.28) скалярно на  $\bar{r}$  и сложив все три получившихся уравнения, получим

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z = -\mu r + c^2. \quad (108.30)$$

Уравнения (108.23) и (108.30) полностью определяют орбиту. Как следует из них, орбита есть линия пересечения поверхности вращения второго порядка, задаваемой уравнением (108.30), и плоскости (108.23), в которой лежит фокальная ось этой поверхности.

Так как движение происходит в плоскости (108.23), то удобно перейти к новой системе координат  $\xi, \eta, \zeta$ , направив ось  $\zeta$  по вектору кинетического момента  $\bar{c}$ , а оси  $\xi$  и  $\eta$  расположив в плоскости орбиты, причем ось  $\xi$  направить по вектору Лапласа  $\bar{f}$ . Тогда переход от координат в системе  $x, y, z$  к координатам в системе  $\xi, \eta, \zeta$  определится следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{f} & \frac{f_2}{f} & \frac{f_3}{f} \\ \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} & \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} & \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (108.31)$$

В новых координатах уравнение (108.23) запишется как

$$\zeta = 0, \quad (108.32)$$

а уравнение (108.30) примет вид

$$\mu r + f \xi = c^2. \quad (108.33)$$

Введя в плоскости  $\xi\eta$  полярную систему координат  $r, \vartheta$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= r \cdot \cos \vartheta \\ \eta &= r \cdot \sin \vartheta \end{aligned} \right\}. \quad (108.34)$$

В полярной системе координат уравнение (108.33) примет вид

$$\mu r + fr \cdot \cos \vartheta = c^2, \quad (108.35)$$

откуда

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu} \cdot \cos \vartheta}. \quad (108.36)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{c^2}{\mu} \\ e &= \frac{f}{\mu} \end{aligned} \right\}, \quad (108.37)$$

и тогда уравнение (108.36) запишется в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \vartheta}, \quad (108.38)$$

которое и является полярным уравнением орбиты.

Орбита является круговой при  $e = 0$ , эллиптической при  $0 < e < 1$ , параболической при  $e = 1$ , гиперболической при  $e > 1$ .

В новой системе координат  $\xi, \eta, \zeta$  формулы (108.21) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \eta \dot{\xi} - \xi \dot{\eta} &= 0 \\ \xi \dot{\xi} - \xi \dot{\xi} &= 0 \\ \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} &= c \end{aligned} \right\}, \quad (108.39)$$

так как  $\xi = 0$  и  $\dot{\xi} = 0$ . Третье уравнение с учетом (108.34) примет вид

$$r^2 \dot{\theta} = c \quad (108.40)$$

и дает возможность найти зависимость угла  $\vartheta$  от времени.

Плоскость орбиты спутника, движущегося в центральном поле, проходит через начало координат и пересекает плоскость экватора вдоль линии узлов  $O\Omega$  (рис. 184). Точка, в которой спутник пересекает плоскость экватора с юга на север, называется восходящим узлом. Угол  $XO\Omega$  называется долготой восходящего узла и обозначается  $\Omega$ . Угол между касательной в восходящем узле к орбите в направлении движения тела и касательной к экватору в направлении оси  $Y$  называется наклонением орбиты и обозначается через  $i$ . Угол  $i$  изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , причем если  $i$  превышает  $90^\circ$ , то считают, что движение обратное. Углы  $\Omega$  и  $i$  определяют ориентацию плоскости орбиты в пространстве. Угол  $\Omega\pi$ , отсчитываемый в направлении движения по орбите, определяет положение перигея  $\pi$  и обозначается через  $\omega$ . Он называется расстоянием перигея от узла и определяет ориентацию орбиты

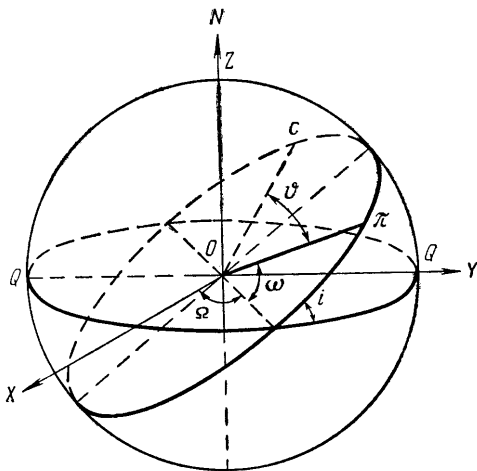


Рис. 184

в ее плоскости. Угол  $\pi OS$  называется истинной аномалией и обозначается через  $\vartheta$ . Элементы  $a$  — большая полуось и  $e$  — эксцентриситет определяют форму и размеры орбиты. Время вводится посредством задания  $\tau$  — момента прохождения перигея. Таким образом,  $a, e, i, \Omega, \omega + \vartheta$  и  $\tau$  могут рассматриваться как шесть независимых элементов, которые полностью определяют орбиту и положение тела на орбите в любой момент времени.

Установим связь постоянных интегрирования  $\bar{c}$  и  $\bar{f}$  и элементов орбиты. На основании (108.38) и (108.39) запишем

$$\frac{p^2}{(1 + e \cdot \cos \vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = c \quad (108.41)$$

или

$$dt = \frac{p^2}{c} \cdot \frac{d\vartheta}{(1 + e \cdot \cos \vartheta)^2}. \quad (108.42)$$

Возьмем интеграл от момента прохождения ИСЗ через перицентр  $\tau$  до момента  $t$ , соответственно  $\vartheta$  изменится от нуля до  $\vartheta$ . Имеем

$$t - \tau = \frac{p^2}{c} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cdot \cos \vartheta)^2}. \quad (108.43)$$

Будем полагать, что движение эллиптическое, т. е.  $0 < e < 1$ . Введем новую угловую переменную  $E$  (эксцентрическая аномалия), определяемую следующей подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (108.44)$$

Отсюда имеем

$$\sec^2 \frac{E}{2} dE = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \sec^2 \frac{\vartheta}{2} d\vartheta, \quad (108.45)$$

следовательно,

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot dE}{1 - e^2 \cdot \cos E}. \quad (108.46)$$

Далее имеем

$$1 + e \cdot \cos \vartheta = 1 + e \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E}. \quad (108.47)$$

Подставляя полученные выражения в интеграл (108.43), найдем

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \int_0^E \frac{(1 - e \cos E) dE}{(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} (E - e \sin E) \quad (108.48)$$

и

$$t - \tau = \frac{p^2}{c (1 - e^2)^{3/2}} (E - e \sin E). \quad (108.49)$$

Так как для эллипса справедливо соотношение

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (108.50)$$

и учитывая

$$p = \frac{e^2}{\mu},$$

найдем окончательно

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) = E - e \sin E. \quad (108.51)$$

Это уравнение называется уравнением Кеплера и дает искомую зависимость угла  $E$  от времени. Величина

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \quad (108.52)$$

называется средним движением, и вместо эксцентрической аномалии  $E$  рассматривают величину средней аномалии  $M$

$$M = n(t - \tau). \quad (108.53)$$

Тогда уравнение Кеплера запишется как

$$M = E - e \sin E. \quad (108.54)$$

Заметим, что величина  $n$  определяет период невозмущенного движения ИСЗ

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (108.55)$$

Таким образом мы получаем эллиптическую орбиту невозмущенного движения ИСЗ и закон движения по ней. Векторы  $\bar{c}$  и  $\bar{f}$  определяют ориентацию орбиты в пространстве.

В соответствии с рис. 184 нетрудно убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{c} &= \sin i \cdot \sin \Omega \\ \frac{c_2}{c} &= -\sin i \cdot \cos \Omega \\ \frac{c_3}{c} &= \cos i \\ \frac{f_1}{f} &= \cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \frac{f_2}{f} &= \cos \omega \cdot \sin \Omega + \sin \omega \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \frac{f_3}{f} &= \sin \omega \cdot \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (108.56)$$

Часто вместо истинной аномалии  $\vartheta$  пользуются так называемым аргументом широты  $u$

$$u = \vartheta + \omega. \quad (108.57)$$

В случае кругового и почти кругового движения, когда  $f = 0$  и понятие линии апсид (а, стало быть, перигея и апогея) теряет смысл, а также теряют смысл углы  $\vartheta$  и  $\omega$ , отсчитываемые от и до перигея, в качестве основной угловой переменной пользуются аргументом широты  $u$  (при  $i \neq 0$ ). Теперь имеем все шесть постоянных, определяющих некоторую эллиптическую орбиту невозмущенного движения ИСЗ. При конкретных начальных данных эти шесть постоянных принимают конкретные значения и называются элементами орбиты:  $p$  — параметр орбиты, который определяет размеры эллипса; вместо параметра  $p$  часто употребляется большая полуось  $a$ , а иногда связанные с ней период обращения  $T$  или среднее движение  $n$ ;  $e$  — эксцентриситет эллипса;  $\Omega$  — долгота восходящего узла, которая определяет ориентацию плоскости орбиты в пространстве;  $i$  — наклон плоскости орбиты к плоскости земного экватора;  $\omega$  — угловое расстояние перицентра (линии апсид) от узла (от линии узлов);  $\tau$  — момент прохождения ИСЗ через перигей.

Иногда вместо  $p$  и  $e$  в качестве элементов рассматриваются величины  $r_\pi$  и  $r_\alpha$  — расстояния в перигее и апогее. Они определяются по следующим формулам:

$$r_\pi = a(1 - e), \quad r_\alpha = a(1 + e). \quad (108.58)$$

Эти величины особенно полезны при изучении эволюции эллиптической орбиты под действием возмущений. Вместо  $\tau$ , как уже говорилось выше, иногда употребляется в качестве элемента величина  $M_0$  (средняя аномалия в эпоху), которая более универсальна, чем  $\tau$ , так как сохраняет физический смысл при круговом движении, когда  $\tau$  не имеет смысла.

Приведем полное решение задачи о невозмущенном движении ИСЗ, т. е. формулы, определяющие координаты  $x, y, z$  и компоненты скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  в любой момент времени.

Из выражений (108.31) и (108.56) имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{f_1}{f} \xi + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} \eta = r \cdot \cos \vartheta \cdot (\cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) + \\ &+ r \cdot \sin \vartheta (-\sin \omega \cdot \cos \Omega - \cos \omega \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) = \\ &= r [\cos (\vartheta + \omega) \cdot \cos \Omega - \sin (\vartheta + \omega) \cdot \sin \Omega \cdot \cos i]. \end{aligned}$$

Так как  $\vartheta + \omega = u$ , то

$$x = r \cdot (\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i).$$

Аналогично получаются две другие формулы для  $y$  и  $z$ . Окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot (\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) \\ y &= r \cdot (\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i) \\ z &= r \cdot (\sin u \cdot \sin i) \end{aligned} \right\}, \quad (108.59)$$

Составляющие скорости можно получить прямым дифференцированием формул (108.59), но можно исходить из следующих соображений. Компоненты скорости, радиальная и трансверсальная, равны

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \dot{r} = \frac{ce}{p} \cdot \sin \vartheta = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \cdot \sin \vartheta \\ v_u &= r \dot{\vartheta} = \frac{c}{p} (1 + e \cdot \cos \vartheta) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cdot \cos \vartheta) \end{aligned} \right\}. \quad (108.60)$$

Первая формула получается дифференцированием уравнения (108.38) с последующей заменой  $\vartheta$  из выражения (108.39), а вторая — из (108.39) с подстановкой вместо  $r$  его значения (108.38).

Направляющие косинусы радиуса-вектора  $r$ , равные

$$\cos \alpha_r = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta_r = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma_r = \frac{z}{r},$$

определяются формулами (108.59), а направляющие косинусы трансверсального направления — формулами

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \cos \alpha_u}{du} &= -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \frac{d \cos \beta_u}{du} &= -\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \frac{d \cos \gamma_u}{du} &= \cos u \cdot \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (108.61)$$

Теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \cos \alpha_r \cdot v_r + \frac{d \cos \alpha_u}{du} \cdot v_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [e \cdot \sin \vartheta \cdot (\cos u \cdot \cos \Omega - \\ &\quad - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) + (1 + e \cdot \cos \vartheta) \cdot (-\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i)] \\ \dot{y} &= \cos \beta_r \cdot v_r + \frac{d \cos \beta_u}{du} \cdot v_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [e \cdot \sin \vartheta \cdot (\cos u \cdot \sin \Omega + \\ &\quad + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i) + (1 + e \cdot \cos \vartheta) \cdot (-\sin u \cdot \sin \Omega + \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i)] \\ \dot{z} &= \cos \gamma_r \cdot v_r + \frac{d \cos \gamma_u}{du} \cdot v_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot [e \cdot \sin \vartheta \cdot \sin u \cdot \sin i + \\ &\quad + (1 + e \cdot \cos \vartheta) \cdot \cos u \cdot \sin i] \end{aligned} \right\} \quad (108.62)$$

Формулы (108.59) и (108.62) дают общее решение задачи о невозмущенном движении ИСЗ, которое зависит от шести произвольных постоянных — элементов орбиты невозмущенного движения. Приведем сводку формул и схему определения элементов орбиты невозмущенного движения по начальным данным.

Пусть в момент  $t_0$  (начальный момент времени или «эпоха») заданы величины  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ . Определим элементы  $p, e, \Omega, \omega, i$  и  $\tau$ .

Формулы (108.21) дают значения постоянных площадей

$$\begin{aligned} c_1 &= y_0 \cdot \dot{z}_0 - z_0 \cdot \dot{y}_0; \quad c_2 = z_0 \cdot \dot{x}_0 - x_0 \cdot \dot{z}_0; \quad c_3 = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0; \\ c &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}. \end{aligned}$$

Формулы (108.28) дают значения постоянных интегралов Лапласа

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + \dot{y}_0 c_3 - \dot{z}_0 c_2; \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + \dot{z}_0 c_1 - \dot{x}_0 c_3; \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + \dot{x}_0 c_2 - \dot{y}_0 c_1; \\ f &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}. \end{aligned}$$

По формулам (108.37) найдем значения параметров орбиты

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{f}{\mu}.$$

Формулы (108.56) однозначно определяют углы  $\Omega, \omega$  и  $i$ :

$$\cos i = \frac{c_3}{c}, \quad \operatorname{tg} \Omega = -\frac{c_2}{c_1}, \quad \sin \omega = \frac{f_3}{f} \cdot \operatorname{cosec} i.$$

Остается найти  $\tau$ . Из (108.31) найдем

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{f_1}{f} x_0 + \frac{f_2}{f} y_0 + \frac{f_3}{f} z_0 \\ \eta_0 &= \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{c f} x_0 + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{c f} y_0 + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{c f} z_0 \\ r_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (108.63)$$

Формулы (108.34) определяют начальное значение истинной аномалии

$$\sin \vartheta_0 = \frac{\eta_0}{r_0}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{\xi_0}{r_0}. \quad (108.64)$$

Из (108.44) находим начальное значение эксцентрической аномалии

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}, \quad (108.65)$$

а из уравнения Кеплера — среднюю аномалию в эпоху  $M_0$

$$M_0 = E_0 - e \cdot \sin E_0. \quad (108.66)$$

Теперь из соотношения (108.53) получим

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n} \cdot M_0, \quad (108.67)$$

где  $n$  определяется уже найденными значениями  $p$  и  $e$  как

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = \frac{\sqrt{\mu} \cdot (1-e^2)^{3/2}}{p^{3/2}} = \sqrt{\mu} \cdot \left( \frac{1-e^2}{p} \right)^{3/2}. \quad (108.68)$$

Таким образом, может быть задано полное решение задачи невозмущенного движения ИСЗ.

Если ось  $x$  направить в восходящий узел орбиты, то уравнения (108.59) примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos u \\ y &= r \cdot \sin u \cdot \cos i \\ z &= r \cdot \sin u \cdot \sin i \end{aligned} \right\}. \quad (108.69)$$

В то же время, в соответствии с рис. 184,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \delta \cdot \cos (\Omega - \alpha) \\ y &= r \cdot \cos \delta \cdot \sin (\Omega - \alpha) \\ z &= r \cdot \sin \delta \end{aligned} \right\}. \quad (108.70)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (\Omega - \alpha) &= \cos i \cdot \operatorname{tg} u \\ \sin \delta &= \sin i \cdot \sin u \end{aligned} \right\}. \quad (108.71)$$

Учитывая (108.38) и то, что

$$1 + e \cdot \cos \vartheta = \frac{1-e^2}{1-e \cdot \cos E}, \quad (108.72)$$

получим

$$r = \frac{p}{1-e^2} \cdot (1 - e \cdot \cos E) = a(1 - e \cdot \cos E). \quad (108.73)$$

Уравнения (108.70) и (108.73) дают связь сферических координат  $\alpha, \delta, r$  спутника с элементами орбиты.

## 2. Возмущения в движении ИСЗ

Гравитационное поле Земли в действительности не является полем центральной силы из-за несферичности Земли и неравномерности распределения масс внутри нее. Кроме того, на движение спутника действуют притяжения

Луны и Солнца, силы сопротивления атмосферы солнечного давления и т. п. В результате действия этих возмущающих сил действительная орбита является не коническим сечением, а сложной пространственной кривой. Возмущения делятся на периодические и вековые. Периодические возмущения влияют на мгновенное положение возмущаемого тела и, в свою очередь, подразделяются на короткопериодические и долгопериодические. Вековые возмущения пропорциональны времени. Они больше воздействуют на форму и ориентацию орбиты в пространстве. Возмущение, обусловленное сжатием центрального тела, имеет вековой характер.

Задача исследования возмущенного движения достаточно сложна. Наиболее плодотворной идеей для изучения возмущенного движения является идея оскулирующего движения. Она заключается в приближении дуг действительной орбиты (возмущенной орбиты) дугами невозмущенной орбиты. Такая невозмущенная орбита называется соприкасающейся (оскулирующей) орбитой. Таким образом, оскулирующая орбита определяется как кеплерова орбита, элементарная дуга которой совпадает с элементарной дугой действительной орбиты.

Невозмущенное движение определяется шестью постоянными величинами  $p, e, \Omega, \omega, i, \tau$ . Пусть в момент  $t$  на ИСЗ подействовала малая возмущающая сила  $\Delta F$  и длительность этого воздействия  $\Delta t$  мала. В результате вместо движения по орбите  $p, e, \Omega, \omega, i, \tau$  спутник будет двигаться по орбите  $p + \Delta p, e + \Delta e, \Omega + \Delta \Omega, \omega + \Delta \omega, i + \Delta i, \tau + \Delta \tau$ , близость которой к невозмущенной орбите определяется величиной возмущающей силы. Как только действие силы прекратится, орбита станет кеплеровым эллипсом, но другим. Построив такие эллипсы для моментов  $t + \Delta t, t + 2\Delta t$  и т. д., получим непрерывное изменение элементов под действием возмущающей силы. Орбита, таким образом, получается как набор точек, каждая из которых лежит на определенном оскулирующем эллипсе. Изменение оскулирующих эллипсов описывается функциями  $p(t), e(t), \Omega(t), i(t), \tau(t)$ .

Обозначив через  $V$  потенциал поля, в котором движется спутник, а через  $\psi$  — потенциал возмущения, получим

$$V = -\frac{\mu}{r} + \psi. \quad (108.74)$$

Движение по возмущенной орбите определится следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + g_{\psi}^x \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + g_{\psi}^y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + g_{\psi}^z \end{aligned} \right\}, \quad (108.75)$$

где  $g_{\psi}^x, g_{\psi}^y, g_{\psi}^z$  — проекции возмущающего ускорения на оси  $x, y, z$ .

В дальнейшем удобнее воспользоваться проекциями возмущающего ускорения на оси  $r, s, w$  (рис. 185). В этой системе координат начало отсчета расположено в центре масс спутника, а направление осей выбрано следующим образом:  $r$  направлена по радиусу — вектору,  $s$  лежит в плоскости орбиты

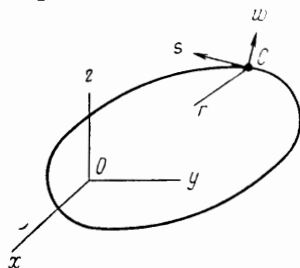


Рис. 185



и направлена под углом  $90^\circ$  к радиусу-вектору в направлении трансверсальной скорости,  $w$  направлена по нормали к плоскости орбиты в направлении вектора кинетического момента.

Уравнения связи координатных систем  $x, y, z$  и  $r, s, w$  (без учета сдвига) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x &= (\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) r + \\ &\quad + (\cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i - \sin u \cdot \cos \Omega) \cdot s + \sin \Omega \cdot \sin i \cdot w \\ y &= (\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i) \cdot r + \\ &\quad + (\cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i - \sin u \cdot \sin \Omega) \cdot s - \cos \Omega \cdot \sin i \cdot w \\ z &= \sin u \cdot \sin i \cdot r + \cos u \cdot \sin i \cdot s + \cos i \cdot w \end{aligned} \right\}. \quad (108.76)$$

Для полного определения оскулирующей орбиты необходимы 6 дифференциальных уравнений первого порядка

$$d(\text{элемент})/dt = f(\text{остальные элементы } g_B^r, g_B^s, g_B^w). \quad (108.77)$$

В курсах небесной механики (например, см. М. Б. Балк «Элементы динамики космического полета», «Наука», 1965 г.) приводятся выводы этих уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i} \cdot g_B^w, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{\sqrt{\mu p}} \cdot g_B^w, \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left\{ \sin \vartheta \cdot g_B^r + \left[ \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \cdot g_B^s \right\} \\ \frac{dp}{dt} &= 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot g_B^s \\ \frac{dw}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[ -\frac{\cos \vartheta}{e} \cdot g_B^r + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \frac{\sin \vartheta}{e} \cdot g_B^s - \frac{r}{p} \cdot \text{ctg } i \cdot \sin u \cdot g_B^w \right] \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e\mu} \left[ (e \cdot \sin \vartheta \cdot N - \cos \vartheta) \cdot g_B^r + \frac{p}{2} \cdot N \cdot g_B^s \right] \end{aligned} \right\}, \quad (108.78)$$

где

$$N = \frac{2p^2}{r^2} \int_0^\vartheta \frac{\cos \vartheta \cdot d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3}. \quad (108.79)$$

Во многих практически встречающихся случаях возмущающее ускорение не зависит от времени  $t$ , и целесообразно за независимое переменное принять аргумент широты  $u$ .

Так как

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^3 \Gamma}, \quad (108.80)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{1 - \frac{r^3}{\mu p} \cdot \text{ctg } i \cdot \sin u \cdot g_B^w}, \quad (108.81)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3 \Gamma \cdot \sin u}{\mu p \cdot \sin i} \cdot g_B^w \\
 \frac{di}{du} &= \frac{r^3 \Gamma}{\mu p} \cdot \cos u \cdot g_B^w \\
 \frac{de}{du} &= \frac{r^2 \Gamma}{\mu e} \cdot \left[ \sin \vartheta \cdot g_B^r + \cos \vartheta \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cdot g_B^s + e \frac{r}{p} g_B^w \right] \\
 \frac{dp}{du} &= \frac{2r^3 \Gamma}{\mu} g_B^s \\
 \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2 \Gamma}{\mu e} \cdot \left[ \cos \vartheta \cdot g_B^r + e \sin \vartheta \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cdot g_B^s - e \frac{r}{p} \cdot \operatorname{ctg} i \cdot \sin u g_B^w \right] \\
 \frac{d\tau}{du} &= \frac{r^4 \Gamma}{e \mu \cdot \sqrt{\mu p}} \cdot \left[ (e \cdot \sin \vartheta N - \cos \vartheta) g_B^r + \frac{p}{2} \cdot N \cdot g_B^s \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (108.82)$$

Данную систему решают численно.

Рассмотрим частные случаи учета возмущений:

1. Учет сжатия Земли (без влияния атмосферы и других сил).

Как следует из формулы (108.4), возмущающий потенциал силовой функции Земли, обусловленный сжатием Земли, имеет вид

$$V_\alpha = I_2 \frac{\mu}{r} \cdot \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (3 \sin^2 \psi - 1), \quad (108.83)$$

где  $R$  — экваториальный радиус Земли,  $r$  и  $\psi$  — радиус-вектор и геоцентрическая широта ИСЗ.

Величина  $I_2$  может быть представлена через угловую скорость Земли  $\omega$ , ускорение силы тяжести на экваторе  $g_e$  и сжатие Земли  $\alpha$  как

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\omega^2 R}{g} - 2\alpha \right). \quad (108.84)$$

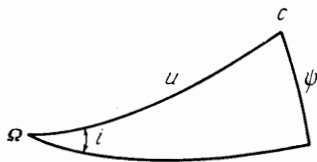


Рис. 186

Проектируя на небесную сферу экватор и меридиан спутника, получим прямоугольный сферический треугольник (рис. 186), из которого имеем

$$\sin \psi = \sin u \cdot \sin i \quad (108.85)$$

и

$$V_\alpha = I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{2r^3} \cdot (3 \cdot \sin^2 u \sin^2 i - 1). \quad (108.86)$$

Компоненты возмущающего ускорения равны

$$\left. \begin{aligned}
 g_\alpha^r &= \frac{\partial V_\alpha}{\partial r} \\
 g_\alpha^s &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_\alpha}{\partial u} \\
 g_\alpha^w &= \frac{1}{2 \sin u} \cdot \frac{\partial V_\alpha}{\partial i}
 \end{aligned} \right\} \quad (108.87)$$

или, с учетом (110.86), равны

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha}^r &= -\frac{3}{2} I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot (3 \cdot \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1) \\ g_{\alpha}^s &= \frac{3}{2} I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot \sin 2u \cdot \sin^2 i \\ g_{\alpha}^w &= \frac{3}{2} I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot \sin u \cdot \sin 2i \end{aligned} \right\} \quad (108.88)$$

Для практических расчетов удобно перейти к секундному изменению элемента

$$\frac{1}{T} \cdot [d(\text{элемент})]/dN], \quad (108.89)$$

где  $\frac{d(\text{элемент})}{dN}$  — изменение за [один оборот спутника, т. е. от  $u = 0$  до  $u = 2\pi$ , и  $T$  — период одного оборота.

Начнем с долготы восходящего узла  $\Omega$  и аргумента широты  $\omega$ .

Подставим выражение (108.88) в правые части дифференциальных уравнений (108.84), получим систему, определяющую зависимость оскулирующих элементов от  $u$ . При этом, считая в первом приближении  $r \approx 1$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3 \cdot \sin u}{\mu p \cdot \sin i} \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot \sin u \cdot \sin 2i \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2}{\mu e} \cdot \left[ -\cos \vartheta \cdot \frac{3}{2} I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} (3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u - 1) + \right. \\ &\quad \left. + e \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 + \frac{2}{p}\right) \cdot \frac{3}{2} I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot \sin 2u \cdot \sin^2 i - \right. \\ &\quad \left. - e \frac{r}{p} \cdot \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \sin u \cdot \sin 2i \right] = \\ &= \frac{r^2}{\mu e} \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 \cdot \frac{\mu R^2}{r^4} \cdot \left[ \cos \vartheta (1 - 3 \sin^2 i \cdot \sin^2 u) + \right. \\ &\quad \left. + e \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right) \cdot \sin 2u \cdot \sin^2 i - e \frac{r}{p} \cdot \sin^2 u \cdot \operatorname{ctg} i \cdot \sin 2i \right] \end{aligned} \right\} \quad (108.90)$$

Положив в течение одного оборота  $p$ ,  $\omega$  и  $i$  постоянными, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= 3I_2 \cdot \frac{\pi R^2}{p^2} \cdot \cos i \left( \frac{\text{рад}}{c} \right) \\ \frac{d\omega}{dN} &= 3I_2 \cdot \frac{\pi R^2}{p^2} \cdot (5 \cos^2 i - 1) \left( \frac{\text{рад}}{c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (108.91)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{d\Omega/dN}{T} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 86\,400 \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 \times \\ &\times \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \cdot \left( \frac{R}{r_{\text{ср}}} \right)^{3/2} \cdot \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left( \frac{\text{град}}{\text{сутки}} \right) \\ \dot{\omega} &= -\frac{180}{\pi} \cdot 86\,400 \cdot \frac{3}{2} \cdot I_2 \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \cdot \left( \frac{R}{r_{\text{ср}}} \right)^{3/2} \cdot \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} \left( \frac{\text{град}}{\text{сутки}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (108.92)$$

где  $r_{\text{ср}}$  — среднее расстояние спутника.

Подставляя числовые значения  $I_2 = 1082,8 \cdot 10^{-6} \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $\mu = 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $R = 6378 \text{ км}$ , получим

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &\approx -10 \cdot \left(\frac{R}{r_{\text{сп}}}\right)^{7/2} \cdot \cos i, \\ \omega &\approx 5 \left(\frac{R}{r_{\text{сп}}}\right)^{7/2} \cdot (5 \cos^2 i - 1).\end{aligned}\quad (108.93)$$

Другие элементы орбиты ( $p$ ,  $i$ ,  $e$ ,  $\tau$ ) из-за сжатия Земли испытывают довольно значительные периодические изменения. Однако окончательные изменения этих элементов орбиты за один полный оборот весьма малы.

Сжатие Земли оказывает влияние на положение орбиты в пространстве; на форму и размеры орбиты сжатие Земли практически не влияет. Оно вызывает вращение восходящего узла орбиты в направлении, противоположном направлению вращения спутника; в течение небольших промежутков времени (в случае близких спутников Земли — до нескольких суток) это вращение можно считать равномерным. Для полярного спутника не происходит вращения узла; для экваториального спутника это вращение может составлять около 9 оборотов в сутки. Перигентр спутника вращается в плоскости орбиты практически равномерно, причем при  $i < 63^\circ$  — в направлении движения спутника, а при  $i > 63^\circ$  — в противоположном направлении; при  $i = 65^\circ$  перигентр будет перемещаться со скоростью  $0,4^\circ$  за сутки; для экваториального спутника величина  $\dot{\omega}$  может достигать  $17^\circ$  за сутки. Чем больше полуось  $a$  спутника, тем медленнее будут вращаться плоскость орбиты и большая полуось орбиты.

## 2. Влияние сопротивления атмосферы Земли на движение спутника.

Движение спутника Земли происходит на таких высотах, где плотность атмосферы чрезвычайно мала. Так, например, плотность атмосферы на высоте 240 км меньше плотности атмосферы на уровне моря в  $10^{10}$  раз. Тем не менее от оборота к обороту тормозящее действие атмосферы накапливается и заметным образом меняет орбиту ИСЗ. Компоненты возмущающего ускорения равны

$$g_r^* = -\frac{1}{2} c_x \frac{A}{m} \rho \cdot V \cdot V_r; \quad g_n^* = -\frac{1}{2} c_x \frac{A}{m} \rho \cdot V \cdot V_n, \quad (108.94)$$

где  $V_r$  — радиальная скорость;  $V_n$  — трансверсальная скорость.

Величины  $V_r$  и  $V_n$  в зависимости от элементов и истинной аномалии  $\vartheta$  определяются формулами (108.60), а полная скорость  $V$  — формулой

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \sqrt{(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}. \quad (108.95)$$

В соответствии с уравнениями (110.82) получаем

$$\frac{d\Omega}{du} = 0, \quad \frac{di}{du} = 0. \quad (108.96)$$

Таким образом, сопротивление атмосферы не приводит к изменению положения плоскости орбиты спутника. Если учесть формулы (108.82), (108.60), (108.94), (108.95), получим

$$\left. \begin{aligned}\frac{dp}{du} &= -\frac{1}{2} c_x \frac{A}{m} \rho \frac{p \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \\ \frac{de}{du} &= -\frac{1}{2} c_x \frac{A}{m} \rho \frac{p \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \\ \frac{d\omega}{du} &= -\frac{1}{2} c_x \frac{A}{m} \rho \frac{p \sin \vartheta \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{2e (1 + e \cos \vartheta)}\end{aligned}\right\}. \quad (108.97)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений решается численно. Эволюция орбиты под действием сопротивления атмосферы происходит следующим образом: орбита становится все более круговой, высоты перигея и апогея снижаются, причем высота апогея уменьшается быстрее.

В заключение отметим следующее. Нами были рассмотрены примеры учета возмущающего действия на движение ИСЗ. Общая теория учета возмущений очень сложна. Основной идеей этой теории является разложение в ряд возмущающей функции. Это разложение обычно ведется по степеням некоторого малого параметра, и наиболее существенным вопросом является вопрос о сходимости этого ряда. Кроме того, в разложении этого ряда могут встретиться так называемые резонансные члены, которые значительно усложняют вопрос о сходимости этого ряда.

### § 109. Обработка фотографических наблюдений ИСЗ

Обработка фотографий ИСЗ на фоне звездного неба во многом зависит от типа съемочной камеры и методики наблюдений. Эти отличия особенно сказываются на предварительной обработке негативов и лент печатающего хронографа. Однако основные принципы обработки остаются общими. В результате обработки лент печатающего хронографа получают эталонные моменты всемирного времени для середины экспозиции спутника и звезд. На негативе измеряются прямоугольные координаты  $x, y$  опорных звезд, спутника и положение проекции оптического центра. В эти измерения вводятся поправки за дисторсию объектива, рефракцию и аберрацию. Из звездных каталогов выбираются прямые восхождения и склонения опорных звезд на нормальную эпоху  $T_0 = 1950,0$ . С учетом фактического смещения звезд за время, прошедшее с эпохи  $T_0$  до эпохи наблюдения спутника  $T$ , вычисляют прямые восхождения и склонения звезд на эпоху  $T$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha \cdot (T - T_0) \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta \cdot (T - T_0) \end{aligned} \right\} \quad (109.1)$$

Далее сферические координаты  $\alpha$  и  $\delta$  спутника можно получить следующим образом. Предположим, что фотографическая пластинка перпендикулярна к оптической оси инструмента и параллельна плоскости, касающейся небесной сферы единичного радиуса в точке  $\bar{O}$  пересечения ее с оптической осью камеры. Пусть на этой плоскости имеется система координат с началом в точке  $\bar{O}$ , причем ось  $\bar{\eta}$  направлена на север, а ось  $\bar{\xi}$  перпендикулярна к ней и направлена на восток (рис. 187). Гномоническую проекцию этой системы координат на фотопластинку назовем идеальной системой координат  $\xi, \eta$ . Если  $\alpha^\circ$  и  $\delta^\circ$  есть прямое восхождение и склонение точки  $\bar{O}$ , а  $f$  — фокусное расстояние камеры, то в соответствии с уравнениями гномонической проекции

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f \frac{\operatorname{ctg} \delta \cdot \sin (\alpha - \alpha^\circ)}{\operatorname{ctg} \delta \cdot \cos (\alpha - \alpha^\circ) \cos \delta^\circ + \sin \delta^\circ} \\ \eta &= f \frac{\cos \delta^\circ - \operatorname{ctg} \delta \cdot \cos (\alpha - \alpha^\circ) \cdot \sin \delta^\circ}{\operatorname{ctg} \delta^\circ \cdot \cos (\alpha - \alpha^\circ) \cdot \cos \delta^\circ + \sin \delta^\circ} \end{aligned} \right\} \quad (109.2)$$

Отличие измеренных координат  $x, y$  от идеальных зависит от несовпадения их начал, непараллельности осей координат, неперпендикулярности осей  $x$  и  $y$  и оптической оси по отношению к фотопластинке, неточности введения поправок

за рефракцию, дисторсию и абберацию и т. п. Если эти отличия невелики, то преобразование координат  $x, y$  в  $\xi, \eta$  может быть представлено в линейном виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Ax + By + E \\ \eta &= Cx + Dy + F \end{aligned} \right\}. \quad (109.3)$$

Если отличия велики, то преобразование должно содержать члены 2-го порядка или даже выше.

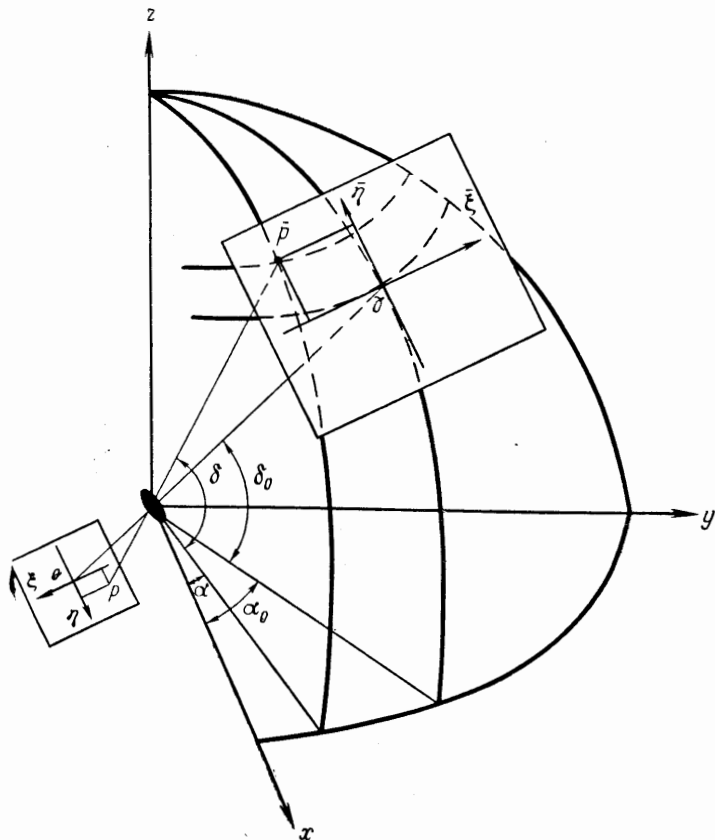


Рис. 187

Постоянные пластинки  $A, B, C, D, E, F$  можно получить из решения уравнений (109.3), если получены изображения не менее трех звезд. Обычно берут больше звезд и постоянные определяются по методу наименьших квадратов. Определив постоянные пластинки, вычисляем координаты спутника  $\xi_c$  и  $\eta_c$  по формуле (109.3) и затем  $\alpha_c$  и  $\delta_c$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha_c - \alpha_0) &= \frac{\xi_c}{f \cdot \cos \delta_0 - \eta_c \sin \delta_0} \\ \operatorname{tg} \delta_c &= \frac{(\sin \delta_0 + \eta_c \cos \delta_0) \cdot \cos(\alpha_c - \alpha_0)}{f \cdot \cos \delta_0 - \eta_c \sin \delta_0} \end{aligned} \right\}. \quad (109.4)$$

Координаты  $\alpha_c$  и  $\delta_c$  ИСЗ получаются в той же системе, в которой заданы координаты опорных звезд.

## § 110. Синхронный и орбитальный методы

Методы решения геодезических задач с помощью ИСЗ принято подразделять на метод синхронных наблюдений и орбитальный. При синхронном методе спутник используется как высоко поднятая цель, на которую одновременно (или почти одновременно) производятся наблюдения с точек с известными и неизвестными координатами. Метод синхронных наблюдений сложен организационно, так как требуется одновременная видимость ИСЗ с различных точек. Синхронизация наблюдений ИСЗ с различных станций может быть организована специальной службой единого времени на наземных станциях либо дискретной подачей светового или радиосигнала со спутника. Здесь следует обра-

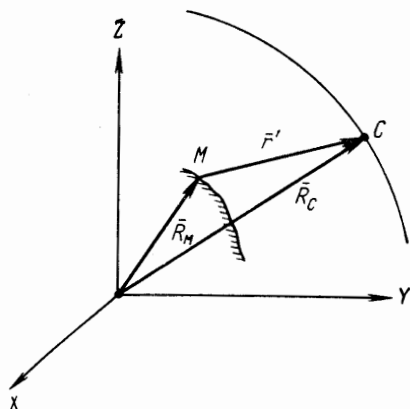


Рис. 188

тить внимание на то, что так как объект движется, то действительно одновременные наблюдения должны быть отнесены к моменту времени, соответствующему подаче светового импульса с объекта, а не к моменту приема импульса наблюдателем. Однако и при активном спутнике будут ситуации, когда одна станция видит спутник, а другая еще нет (например, при небольшой облачности). Таким образом, на практике довольно часто возникают условия, когда наблюдения производятся не совсем синхронно.

Если время наблюдений (в единой системе времени) фиксируется достаточно точно и интервал между наблюдениями с разных станций не очень велик, то такие наблюдения называются квазисинхронными и могут

быть также использованы для определения взаимного положения станций. В этом случае с разных станций (например с двух) получают дискретную запись измеряемых координат  $\alpha'$  и  $\delta'$  и соответствующие метки времени  $T_i$ . Затем интерполированием получают значения  $\alpha'$  и  $\delta'$  на обеих станциях на эти моменты времени  $T_1, T_2$ . Таким образом, квазиодновременные наблюдения могут быть приведены к синхронным.

Решение динамических задач геодезии основывается на наблюдении изменений параметров орбиты во времени под влиянием возмущающих сил, из которых основная — это нецентральность гравитационного поля Земли.

### 1. Основное уравнение космической геодезии

Приведем далее вывод уравнения, которое часто называют основным уравнением космической геодезии. Пусть со станции  $M$  измерены на искусственный спутник  $C$  топоцентрические координаты  $r', \alpha'$  и  $\delta'$  (рис. 188). Уравнение, связывающее положения точек  $M$  и  $C$ , будет

$$\bar{R}_C = \bar{R}_M + \bar{r}', \quad (110.1)$$

где  $\bar{R}_C$  и  $\bar{R}_M$  — соответственно геоцентрические радиусы-векторы точек  $M$  и  $C$ , а  $\bar{r}'$  — топоцентрический радиус-вектор точки  $M$ , т. е.

$$\bar{R}_C = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_M = \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix}, \quad \bar{r}' = \begin{pmatrix} x'_C \\ y'_C \\ z'_C \end{pmatrix}. \quad (110.2)$$

Введем вектор  $\bar{m}$  направляющих косинусов линии  $MC$

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta' \cdot \cos \alpha' \\ \cos \delta' \cdot \sin \alpha' \\ \sin \delta' \end{pmatrix}, \quad (110.3)$$

запишем уравнение (110.2) как

$$\bar{R}_C = \bar{R}_M + r' \cdot \bar{m}, \quad (110.4)$$

где  $r'$  — длина вектора  $r'$ .

Считая, что приближенные положения точек  $M$  и  $C$  известны, получим формулы, связывающие поправки к приближенным координатам  $\bar{R}_C$  и  $\bar{R}_M$ , для чего дифференцируем уравнение (110.4):

$$d\bar{R}_C = d\bar{R}_M + r' \cdot d\bar{m} + \bar{m} \cdot dr'. \quad (110.5)$$

Дифференцируя уравнения (110.3), получим

$$\left. \begin{aligned} dm_1 &= -(\cos \alpha' \cdot \sin \delta') \cdot d\delta' - (\sin \alpha' \cdot \cos \delta') \cdot d\alpha' \\ dm_2 &= -(\sin \alpha' \cdot \sin \delta') \cdot d\delta' + (\cos \alpha' \cdot \cos \delta') \cdot d\alpha' \\ dm_3 &= \cos \delta' \cdot d\delta' \end{aligned} \right\}. \quad (110.6)$$

Теперь система уравнений (110.5) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} dX_C - dX_M &= -r' \cos \alpha' \cdot \sin \delta' \cdot d\delta' - r' \sin \alpha' \cdot \cos \delta' \cdot d\alpha' + \cos \alpha' \cdot \cos \delta' \cdot dr', \\ dY_C - dY_M &= -r' \sin \alpha' \cdot \sin \delta' \cdot d\delta' + r' \cos \alpha' \cdot \cos \delta' \cdot d\alpha' + \sin \alpha' \cdot \cos \delta' \cdot dr', \\ dZ_C - dZ_M &= r' \cos \delta' \cdot d\delta' + \sin \delta' \cdot dr' \end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} dX_C - dX_M \\ dY_C - dY_M \\ dZ_C - dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r' \cos \alpha' \cdot \sin \delta' & -r' \sin \alpha' \cdot \cos \delta' & \cos \alpha' \cdot \cos \delta' \\ -r' \sin \alpha' \cdot \sin \delta' & r' \cos \alpha' \cdot \cos \delta' & \sin \alpha' \cdot \cos \delta' \\ r' \cos \delta' & 0 & \sin \delta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\delta' \\ d\alpha' \\ dr' \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} dX_C - dX_M \\ dY_C - dY_M \\ dZ_C - dZ_M \end{pmatrix} = r' \begin{pmatrix} -\cos \alpha' \cdot \sin \delta' & -\sin \alpha' & \cos \alpha' \cdot \cos \delta' \\ -\sin \alpha' \cdot \sin \delta' & \cos \alpha' & \sin \alpha' \cdot \cos \delta' \\ \cos \delta' & 0 & \sin \delta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos \delta' \cdot d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение (110.5) как

$$d\bar{R}_C - d\bar{R}_M = r' \cdot Q^T \cdot d\bar{l}, \quad (110.7)$$

где

$$Q^T = \begin{pmatrix} -\cos \alpha' \cdot \sin \delta' & -\sin \alpha' & \cos \alpha' \cos \delta' \\ -\sin \alpha' \cdot \sin \delta' & \cos \alpha' & \sin \alpha' \cos \delta' \\ \cos \delta' & 0 & \sin \delta' \end{pmatrix}; \quad d\bar{l} = \begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos \delta' \cdot d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix}.$$



Нетрудно убедиться, что

$$Q^T \cdot Q = E.$$

Тогда, умножив уравнение (110.6) слева на  $\frac{1}{2'} Q$ , получим

$$d\bar{e} = \frac{1}{r'} \cdot Q \cdot (d\bar{R}_C - d\bar{R}_M) \quad (110.8)$$

или

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos \alpha' d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix} = \frac{1}{r'} \begin{pmatrix} -\cos \alpha' \cdot \sin \delta' & -\sin \alpha' \cdot \sin \delta' & \cos \delta' \\ -\sin \alpha' & \cos \alpha' & 0 \\ \cos \alpha' \cdot \cos \delta' & \sin \alpha' \cdot \cos \delta' & \sin \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_C - dX_M \\ dY_C - dY_M \\ dZ_C - dZ_M \end{pmatrix}. \quad (110.9)$$

Уравнение (110.8) и является основным уравнением космической геодезии, так как оно дает связь измеряемых топоцентрических координат  $\alpha'$ ,  $\delta'$ ,  $r'$  с определяемыми параметрами  $d\bar{R}_C$  и  $d\bar{R}_M$  (последние можно рассматривать как поправки к приближенным значениям координат наземных станций и положений спутника).

При численном решении уравнений (110.9) величины  $d\delta'$ ,  $d\alpha'$ ,  $dr'$  полагают равными разностям между измеренными значениями и значениями, вычисленными по приближенным координатам точек  $M$  и  $C$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} d\delta' &= \delta'_{\text{изм}} - \delta'_{\text{выч}} \\ d\alpha' &= \alpha'_{\text{изм}} - \alpha'_{\text{выч}} \\ dr' &= r'_{\text{изм}} - r'_{\text{выч}} \end{aligned} \right\}. \quad (110.10)$$

Если измеренных величин больше, чем определяемых параметров, то последние оценивают статистически.

Если координаты  $\bar{R}_M$  точки  $M$  известны, то основное уравнение принимает вид

$$d\bar{e} = \frac{1}{r'} Q d\bar{R}_C. \quad (110.11)$$

Если же известны координаты спутника  $C$ , а координаты точки  $M$  определяются, то

$$d\bar{e} = -\frac{1}{r'} Q d\bar{R}_M. \quad (110.12)$$

Уравнения (110.11) и (110.12) представляют собой системы трех уравнений с тремя неизвестными параметрами и могут быть однозначно разрешены. Значит, для определения координат спутника  $C$ , при известных координатах точки  $M$ , достаточно определить с одной станции  $\alpha'$ ,  $\delta'$ ,  $r'$ . То же справедливо и для решения обратной задачи. Поэтому будем рассматривать лишь задачу определения координат спутника  $C$ , т. е. только уравнение (110.11), так как все выводы для обратной задачи получаются аналогично. Будем считать, что наблюдения производились синхронно.

Предположим, что на станции  $M$  измерено только топоцентрическое расстояние  $r'$  до спутника. Тогда возникает лишь одно (последнее) уравнение системы (110.11), а именно:

$$dr' = (\cos \alpha' \cdot \cos \delta' \sin \alpha' \cdot \cos \delta' \sin \delta')^T \cdot d\bar{R}_C. \quad (110.13)$$

Здесь  $\alpha'$  и  $\delta'$  вычисляются по приближенным формулам координатам точек  $M$  и  $C$ . Совершенно очевидно, что для определения вектора  $d\bar{R}_C$  необходимо иметь три уравнения типа (110.13), что может быть получено лишь при синхронных наблюдениях топоцентрических расстояний  $r'$  с трех станций. Тогда вместо уравнений (110.11) получим систему уравнений вида

$$\begin{pmatrix} dr'_1 \\ dr'_2 \\ dr'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha'_1 \cos \delta'_1 & \sin \alpha'_1 \cos \delta'_1 & \sin \delta'_1 \\ \cos \alpha'_2 \cos \delta'_2 & \sin \alpha'_2 \cos \delta'_2 & \sin \delta'_2 \\ \cos \alpha'_3 \cos \delta'_3 & \sin \alpha'_3 \cos \delta'_3 & \sin \delta'_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dX_c \\ dY_c \\ dZ_c \end{pmatrix}. \quad (110.14)$$

Если на наземной станции измерялись лишь топоцентрические угловые координаты  $\alpha'$  и  $\delta'$ , то возникают лишь два первых уравнения системы (110.14):

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos \delta' \cdot d\alpha' \end{pmatrix} = \frac{1}{r'} \begin{pmatrix} -\cos \alpha' \sin \delta' & -\sin \alpha' \cdot \cos \delta' & \cos \delta' \\ -\sin \alpha' & \cos \alpha' & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_c. \quad (110.15)$$

Этих уравнений также недостаточно для определения всех трех параметров  $dX_c, dY_c, dZ_c$ . Поэтому нужно производить наблюдения по крайней мере с двух наземных станций. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} d\delta'_1 \\ \cos \delta'_1 \cdot d\alpha'_1 \\ d\delta'_2 \\ \cos \delta'_2 \cdot d\alpha'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r'_1} \cdot \cos \alpha'_1 \cdot \cos \delta'_1 & -\frac{1}{r'_1} \cdot \sin \alpha'_1 \cdot \sin \delta'_1 & \frac{1}{r'_1} \cdot \cos \delta'_1 \\ -\frac{1}{r'_1} \cdot \sin \alpha'_1 & \frac{1}{r'_1} \cdot \cos \alpha'_1 & 0 \\ -\frac{1}{r'_2} \cdot \cos \alpha'_2 \cdot \sin \delta'_2 & -\frac{1}{r'_2} \cdot \sin \alpha'_2 \cdot \sin \delta'_2 & \frac{1}{r'_2} \cdot \cos \delta'_2 \\ -\frac{1}{r'_2} \cdot \sin \alpha'_2 & \frac{1}{r'_2} \cdot \cos \alpha'_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_c. \quad (110.16)$$

Система (110.16) содержит избыточные измерения и поэтому должна решаться по способу наименьших квадратов.

## 2. Метод синхронных наблюдений

Предположим, что имеется сеть космической триангуляции, содержащая  $n + m$  наземных станций, причем координаты  $n$  станций ( $i = i_1, i_2, \dots, i_n$ ) известны, а координаты  $m$  станций ( $j = j_1, j_2, \dots, j_m$ ) определяются. Пусть для построения сети космической триангуляции производились синхронные наблюдения  $s$  положений ИСЗ ( $k = k_1, k_2, \dots, k_s$ ). Наблюдения некоторых положений ИСЗ производились как с определяемых, так и с известных станций, но каждое положение ИСЗ наблюдалось обязательно с нескольких станций (не менее двух). С каждой станции наблюдались либо все, либо некоторые из элементов  $\alpha', \delta', r'$ . Обозначим  $\theta_{ki}$  матрицу

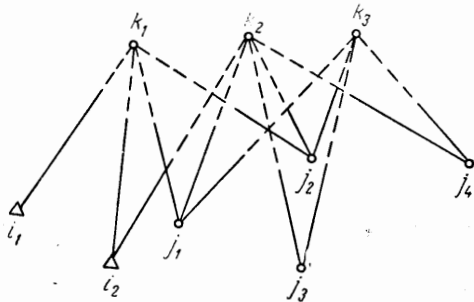


Рис. 189

$\frac{1}{r} Q$  уравнения (110.8), связывающего  $k$ -е положение ИСЗ с известной станцией  $i$ , а через  $\theta_{kv}$  — матрицу уравнения, связывающего  $k$ -е положение ИСЗ с  $j$ -ой станцией, координаты которой неизвестны. Матрицы  $\theta_{ki}$  и  $\theta_{kj}$  могут быть полными, если наблюдались все элементы  $\alpha'$ ,  $\delta'$ ,  $r'$ , или иметь нулевые строки, если те или иные элементы не наблюдались. Запишем систему уравнений, возникающих для всей сети космической триангуляции, в общем виде

$$A d\bar{R} = d\bar{L}, \quad (110.17)$$

где вектор  $d\bar{R}$  состоит из векторов  $d\bar{R}_j$  и  $d\bar{R}_k$ , вектор  $d\bar{L}$  — из векторов  $d\bar{L}_{ki}$  и  $d\bar{L}_{kj}$ . Например,

$$d\bar{R} = \begin{bmatrix} d\bar{R}_{k_1} \\ d\bar{R}_{k_2} \\ \vdots \\ d\bar{R}_{k_s} \\ d\bar{R}_{j_1} \\ \vdots \\ d\bar{R}_{j_s} \end{bmatrix}, \quad d\bar{L} = \begin{bmatrix} \vdots \\ d\bar{L}_{k_j} \\ \vdots \\ \vdots \\ d\bar{L}_{k_i} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (110.18)$$

Здесь

$$d\bar{R}_k = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_k \quad (110.19)$$

есть вектор поправок к приближенным значениям координат  $k$ -ой определяемой станции:

$$d\bar{R}_j = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_j \quad (110.20)$$

— вектор поправок к координатам  $j$ -го положения ИСЗ;

$$d\bar{L}_{kj} = \begin{pmatrix} d\delta'_{kj} \\ \cos \delta'_{kj} d\alpha'_j \\ \frac{dr'_{ks}}{r'_{kj}} \end{pmatrix}; \quad d\bar{L}_{ki} = \begin{pmatrix} d\delta'_{ki} \\ \cos \delta'_{ki} d\alpha'_i \\ \frac{dr'_{ki}}{r'_{ki}} \end{pmatrix} \quad (110.21)$$

— векторы свободных членов уравнений, возникающих на известных и определяемых наземных станциях по наблюдениям ИСЗ. Матрица  $A$  будет определена позднее.

Рассмотрим небольшой пример сети космической триангуляции (рис. 189), состоящей из двух станций ( $i_1, i_2$ ) с известными координатами и четырех определяемых станций ( $j_1, j_2, j_3, j_4$ ). Причем наблюдения производились на три ( $k_1, k_2, k_3$ ) положения ИСЗ так, что каждое положение наблюдалось синхронно.

Запишем для этой сети уравнения типа (110.8), возникающие для каждого направления на ИСЗ со станций  $j$  и  $i$ :

$$\left. \begin{aligned} d\bar{l}_{k_1 i_1} &= \theta_{k_1 i_1} \cdot d\bar{R}_{k_1} \\ d\bar{l}_{k_1 i_2} &= \theta_{k_1 i_2} \cdot d\bar{R}_{k_1} \\ d\bar{l}_{k_1 j_1} &= \theta_{k_1 j_1} \cdot (d\bar{R}_{k_1} - d\bar{R}_{j_1}) \\ d\bar{l}_{k_1 j_2} &= \theta_{k_1 j_2} \cdot (d\bar{R}_{k_1} - d\bar{R}_{j_2}) \\ d\bar{l}_{k_2 i_1} &= \theta_{k_2 i_1} \cdot d\bar{R}_{k_2} \\ d\bar{l}_{k_2 j_1} &= \theta_{k_2 j_1} \cdot (d\bar{R}_{k_2} - d\bar{R}_{j_1}) \\ d\bar{l}_{k_2 j_2} &= \theta_{k_2 j_2} \cdot (d\bar{R}_{k_2} - d\bar{R}_{j_2}) \\ d\bar{l}_{k_2 j_3} &= \theta_{k_2 j_3} \cdot (d\bar{R}_{k_2} - d\bar{R}_{j_3}) \\ d\bar{l}_{k_2 j_4} &= \theta_{k_2 j_4} \cdot (d\bar{R}_{k_2} - d\bar{R}_{j_4}) \\ d\bar{l}_{k_3 j_1} &= \theta_{k_3 j_1} \cdot (d\bar{R}_{k_3} - d\bar{R}_{j_1}) \\ d\bar{l}_{k_3 j_2} &= \theta_{k_3 j_2} \cdot (d\bar{R}_{k_3} - d\bar{R}_{j_2}) \\ d\bar{l}_{k_3 j_3} &= \theta_{k_3 j_3} \cdot (d\bar{R}_{k_3} - d\bar{R}_{j_3}) \\ d\bar{l}_{k_3 j_4} &= \theta_{k_3 j_4} \cdot (d\bar{R}_{k_3} - d\bar{R}_{j_4}) \end{aligned} \right\} \quad (110.22)$$

или в матричном виде

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} -\theta_{k_1 j_1} & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_1 j_1} & 0 & 0 & \\ 0 & -\theta_{k_1 j_2} & 0 & 0 & \theta_{k_1 j_2} & 0 & 0 & \\ -\theta_{k_2 j_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_2 j_1} & 0 & \\ 0 & -\theta_{k_2 j_2} & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_2 j_2} & 0 & \\ 0 & 0 & -\theta_{k_2 j_3} & 0 & 0 & \theta_{k_2 j_3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_{k_2 j_4} & 0 & \theta_{k_2 j_4} & 0 & \\ -\theta_{k_3 j_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_3 j_1} & \\ 0 & -\theta_{k_3 j_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_3 j_2} & \\ 0 & 0 & -\theta_{k_3 j_3} & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_3 j_3} & \\ 0 & 0 & 0 & -\theta_{k_3 j_4} & 0 & 0 & \theta_{k_3 j_4} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_1 i_1} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_1 i_2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{k_2 i_2} & 0 & \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} d\bar{R}_{j_1} \\ d\bar{R}_{j_2} \\ d\bar{R}_{j_3} \\ d\bar{R}_{j_4} \\ d\bar{R}_{k_1} \\ d\bar{R}_{k_2} \\ d\bar{R}_{k_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\bar{l}_{k_1 j_1} \\ d\bar{l}_{k_1 j_2} \\ d\bar{l}_{k_2 j_1} \\ d\bar{l}_{k_2 j_2} \\ d\bar{l}_{k_2 j_3} \\ d\bar{l}_{k_2 j_4} \\ d\bar{l}_{k_3 j_1} \\ d\bar{l}_{k_3 j_2} \\ d\bar{l}_{k_3 j_3} \\ d\bar{l}_{k_3 j_4} \\ d\bar{l}_{k_1 i_1} \\ d\bar{l}_{k_1 i_2} \\ d\bar{l}_{k_2 i_2} \end{pmatrix} \quad (110.23)$$

Следовательно, матрица  $A$  из (110.17) может быть представлена в виде матрицы из элементов  $\theta_{ki}$  и  $\theta_{kj}$  таким образом, что

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} \text{Блок из элементов} & & \text{Блок из элементов} & \\ & -\theta_{kj} & & +\theta_{kj} \\ \hline & & \text{Блок из элементов} & \\ 0 & & & +\theta_{ki} \end{array} \right).$$

Определяемые параметры  $d\bar{R}_j$  и  $d\bar{R}_k$  получаются из уравнения (110.23), которое при наличии избыточных измерений может быть решено по способу наименьших квадратов.

### 3. Орбитальный метод

Орбитальный метод использования ИСЗ в геодезических целях перспективен, так как не требует одновременности наблюдений. Однако он требует достаточно точного знания теории движения ИСЗ. Но если пользоваться средними значениями элементов, то на небольшом отрезке времени почти круговая орбита, подчиняющаяся законам Кеплера, может быть использована в качестве первого приближения. В этом случае применение орбитального метода для определения координат может быть объяснено следующим образом. Наблюдения положений ИСЗ с точек, координаты которых известны, выполняются для определения элементов орбиты. По элементам орбиты вычисляются координаты ИСЗ как функции времени. По наблюдениям ИСЗ с точек, координаты которых не известны, определяют последние.

Обозначим через  $\bar{u}$  вектор, состоящий из следующих элементов орбиты на эпоху  $T_0$ :

$$\bar{u} = (n, e, \Omega, i, \omega, m_0). \quad (110.24)$$

Представим вектор  $\bar{u}$  через его приближенное значение и поправки  $du$  к этому приближенному значению:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + d\bar{u} = \begin{pmatrix} n \\ e \\ \Omega \\ i \\ \omega \\ m_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dn \\ de \\ d\Omega \\ di \\ d\omega \\ dm_0 \end{pmatrix}. \quad (110.25)$$

Вернемся к уравнению (110.8):

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ d\alpha' \\ \frac{dr'}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{r'} \cdot Q (d\bar{R}_C - d\bar{R}_m). \quad (110.26)$$

По аналогии с (110.9) получим, что

$$\begin{aligned} d\bar{R}_C &= \frac{1}{R} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cdot \sin \delta & -\sin \alpha \cdot \cos \delta & \cos \alpha \cdot \cos \delta \\ -\sin \alpha \cdot \sin \delta & \cos \alpha \cdot \cos \delta & \sin \alpha \cdot \cos \delta \\ \cos \delta & 0 & \sin \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d\delta \\ d\alpha \\ \frac{dR'}{R} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{R} \cdot \bar{Q} \cdot \begin{pmatrix} d\delta \\ d\alpha \\ \frac{dR'}{R} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (110.27)$$

Подставив (110.27) в (110.26), получим

$$\begin{pmatrix} \frac{d\delta'}{r'} \\ \frac{d\alpha'}{r'} \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix} = \frac{1}{rR} \cdot Q \cdot \tilde{Q} \cdot \begin{pmatrix} d\delta \\ d\alpha \\ \frac{dR}{R} \end{pmatrix} - Q d\bar{R}_m. \quad (110.28)$$

Но полярные координаты  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $R$  выражаются через элементы орбиты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \Omega + \operatorname{arctg} [\cos i \cdot \operatorname{tg} (\omega + \vartheta)] \\ \sin \delta &= \sin i \cdot \sin (\omega + \vartheta) \\ R &= a (1 - e \cdot \cos E) \end{aligned} \right\}. \quad (110.29)$$

Входящие в эти формулы дополнительные элементы ( $\vartheta$  — истинная аномалия,  $a$  — большая полуось,  $E$  — эксцентрическая аномалия,  $M$  — средняя аномалия) определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} \\ M &= E - e \sin E \\ M &= M_0 + n (T - T_0) \\ a &= \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (110.30)$$

Далее необходимо представить приращения сферических координат  $d\delta$ ,  $d\alpha$ ,  $dR$  через приращения элементов орбиты  $dn$ ,  $de$ ,  $d\Omega$ ,  $di$ ,  $d\omega$ ,  $dM_0$ .

Запишем

$$\left. \begin{aligned} dn &= \frac{\partial \delta}{\partial n} dn + \frac{\partial \delta}{\partial e} de + \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial \delta}{\partial i} di + \frac{\partial \delta}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \delta}{\partial M_0} dM_0 \\ d\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial n} dn + \frac{\partial \alpha}{\partial e} de + \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial \alpha}{\partial i} di + \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \alpha}{\partial M_0} dM_0 \\ dR &= \frac{\partial R}{\partial n} dn + \frac{\partial R}{\partial e} de + \frac{\partial R}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial R}{\partial i} di + \frac{\partial R}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial R}{\partial M_0} dM_0 \end{aligned} \right\}. \quad (110.31)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial \delta}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial i} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = 0.$$

Далее, с учетом (110.29) и (110.30), получим

$$\frac{\partial \delta}{\partial n} \cos \delta = \sin i \cos (\omega + \vartheta) \frac{\partial (\omega + \vartheta)}{\partial n} = \sin i \cos (\omega + \vartheta) \frac{\partial (\omega + \vartheta)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial n},$$

но

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\omega + \vartheta)}{\partial E} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial E} = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{E}{2}} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{E}{2} \cdot \cos^2 \frac{E}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \sin \frac{E}{2} \cdot \cos \frac{E}{2}} = \frac{\sin \vartheta}{\sin E}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial M} = \frac{1}{1-e \cdot \cos E},$$

$$\frac{\partial M}{\partial n} = T - T_0,$$

В итоге

$$\frac{\partial \delta}{\partial n} = \frac{\sin i \cdot \cos(\omega + \vartheta) \cdot \sin \vartheta (T - T_0)}{\cos \delta \cdot \sin E (1 - e \cdot \cos E)}.$$

Подобным же образом

$$\frac{\partial \delta}{\partial e} = \frac{1}{\cos \delta} \cdot \frac{\partial}{\partial e} \sin i \sin(\omega + \vartheta) = \frac{\sin i}{\cos \delta} \cos(\omega + \vartheta) \frac{\partial}{\partial e} (\omega + \vartheta) = \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial e},$$

если обозначить  $u = \omega + \vartheta$  и учитывать, что  $d\vartheta = d\omega$ .

Из (110.30) получим

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\partial e} = \operatorname{tg} \frac{E}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial e} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\partial}{\partial e} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

и

$$2 \frac{\partial \vartheta}{\partial e} = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E}{2}} \frac{\partial E}{\partial e}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial e} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{1}{1-e^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial e} = \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E - e \cos E \frac{\partial E}{\partial e} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial e} (1 - e \cos E) = \sin E, \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E},$$

то

$$2 \frac{\partial \vartheta}{\partial e} = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{1-e^2} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{E}{2}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial e} &= \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} \left\{ 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \frac{1}{1-e} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{E}{2}} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{E}{2}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \right\} = \\ &= \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} \left\{ \sin \vartheta \frac{1}{1-e^2} + \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{E}{2}} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{E}{2}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \right\} = \\ &= \frac{\sin u \cos u \sin \vartheta}{\cos \delta} \left\{ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{1 - e \cos E} \right\}. \end{aligned}$$

Далее

$$\frac{\partial \delta}{\partial i} = \frac{\cos i \sin u}{\cos \delta}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \omega} = \frac{\partial \delta}{\partial \vartheta} = \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta},$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial M_0} = \frac{\partial \delta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} \frac{\sin \vartheta}{\sin E} \frac{1}{1 - e \cos E} \cdot 1 = \frac{\sin i \cos u \sin \vartheta}{\sin E (1 - e \cos E)},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial n} = \frac{\cos i}{[1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u] \cos^2 u} \frac{\sin \vartheta}{\sin E} \frac{T - T_0}{1 - e \cos E} =$$

$$= \frac{\cos i \sin \vartheta}{[1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u] \cos^2 u \sin E} \frac{T - T_0}{1 - e \cos E},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e} = \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial e} = \frac{\cos i}{[1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u] \cos^2 e} \frac{\partial \vartheta}{\partial e},$$

но

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial e} = \sin \vartheta \left( \frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{1 - e \cos E} \right),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e} = \frac{\cos i \sin \vartheta}{(1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u) \cos^2 i} \left( \frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{1 - e \cos E} \right),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} = 1,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial i} = \frac{\sin i \operatorname{tg} i}{1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} = \frac{\cos i}{(1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u) \cos^2 u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial M_0} = \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_0} = \frac{\cos i \sin \vartheta}{(1 + \cos^2 i \operatorname{tg}^2 u) (1 - e \cos E) \cos^2 e \sin E},$$

$$\frac{\partial R}{\partial n} = (1 - e \cos E) \frac{\partial a}{\partial n} + a \frac{\partial}{\partial n} (1 - e \cos E),$$

$$\frac{\partial a}{\partial n} = -\frac{2a}{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = (1 - e \cos E) = \frac{\partial}{\partial E} (1 - e \cos E) \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial n} = \frac{e \sin E (T - T_0)}{1 - e \cos E},$$

т. е.

$$\frac{\partial R}{\partial n} = -\frac{2a(1 - e \cos E)}{3n} + \frac{ae \sin E (T - T_0)}{1 - e \cos E},$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial}{\partial e} (a - ae \cos E) = \frac{\partial}{\partial e} (-ae \cos E) = -a \cos E + ae \sin E \frac{\partial E}{\partial e},$$

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\partial}{\partial e} (M + e \sin E) = \sin E + e \cos E \frac{\partial E}{\partial e},$$

и

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E},$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -a \cos E + \frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E},$$

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial R}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_0} = ae \sin E \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Уравнения (110.31) можно записать как

$$\begin{pmatrix} d\delta \\ d\alpha \\ dR \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial n} & \frac{\partial \delta}{\partial e} & \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} & \frac{\partial \delta}{\partial i} & \frac{\partial \delta}{\partial \omega} & \frac{\partial \delta}{\partial M_0} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial n} & \frac{\partial \alpha}{\partial e} & \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} & \frac{\partial \alpha}{\partial i} & \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} & \frac{\partial \alpha}{\partial M_0} \\ \frac{\partial R}{\partial n} & \frac{\partial R}{\partial e} & \frac{\partial R}{\partial \Omega} & \frac{\partial R}{\partial i} & \frac{\partial R}{\partial \omega} & \frac{\partial R}{\partial M_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dn \\ de \\ d\Omega \\ di \\ d\omega \\ dM_0 \end{bmatrix} = D du. \quad (110.32)$$



Подставив (110.32) в (110.28), получим

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos' d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix} = \frac{1}{r'R} \cdot Q \cdot \bar{Q} \cdot D \cdot d\bar{u} - Q d\bar{R}_M. \quad (110.33)$$

Если наблюдения производить со станций с известными координатами, то

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos' d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix} = \frac{1}{r'R} \cdot Q \cdot \bar{Q} \cdot D \cdot d\bar{u}. \quad (110.34)$$

В этом случае измеренные по крайней мере с двух твердых станций значения  $\delta', \alpha', r'$  дают возможность определить поправки  $d\bar{u}$  к элементам приближенной орбиты  $\bar{u}_0$ . Исправив этими поправками приближенное значение орбиты, вычислим (см. 110.25) координаты  $\bar{R}_c$  на моменты наблюдений ИСЗ с определяемых станций. Таким образом, измерения с определяемых станций будут произведены на известные положения ИСЗ, что дает возможность вычислить координаты определяемых станций. Если спутник наблюдался с нескольких твердых станций или наблюдалось более двух положений ИСЗ с одной станции, то  $d\bar{u}$  определяется по способу наименьших квадратов.

В эллиптическую орбиту можно ввести вековые возмущения, вызванные сжатием Земли и сопротивлением атмосферы. Сжатие Земли приводит к вращению линии узлов в экваториальной плоскости (регрессия  $\Omega$ ) и к вращению линии аписид по плоскости орбиты (регрессия  $\omega$ ).

Ранее уже были получены формулы, определяющие меры этих движений:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= -10 \left( \frac{R}{r_{cp}} \right)^{7/2} \cdot \cos i, \\ \dot{\omega} &= -5 \left( \frac{R_3}{r_{cp}} \right)^{7/2} \cdot (5 \sin^2 i - 1). \end{aligned}$$

Влияние атмосферы вызывает изменение формы и размеров орбиты ( $a$  и  $e$ ) в ее плоскости при очень малом изменении перигея. Вращение атмосферы вызывает вековые изменения в наклонении, которые можно считать линейными на коротком интервале времени. Если взять только вековую часть возмущений, то орбита может быть представлена в общем виде степенным рядом

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + d\bar{u} + \dot{d\bar{u}} (T - T_0) + \frac{1}{2} \ddot{d\bar{u}} (T - T_0)^2 + \dots, \quad (110.35)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{d\bar{u}} &= d(\dot{n}, \dot{e}, \dot{\Omega}, \dot{i}, \dot{\omega}, \dot{M}_0) \\ \ddot{d\bar{u}} &= d(\ddot{n}, \ddot{e}, \ddot{\Omega}, \ddot{i}, \ddot{\omega}, \ddot{M}_0) \end{aligned} \quad (110.36)$$

Число членов этого уравнения зависит от величины  $T - T_0$ . Для определения орбиты второго приближения используем метод, аналогичный предыдущему, но уравнение (108.53) заменяют на интеграл

$$M = M_0 + \int_0^T n dT. \quad (110.37)$$

В соответствии с новым определением орбиты (как орбиты второго приближения) нужно искать поправки  $\bar{du}$ ,  $\dot{du}$ ,  $\ddot{du}$  и т. д.

Пусть  $T - T_0$  достаточно мало, чтобы ограничиться первым членом разложения, т. е.

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{du} + \dot{du} (T - T_0). \quad (110.38)$$

Тогда искомыми параметрами будут векторы

$$\left. \begin{aligned} \bar{du} &= (dn, de, d\Omega, di, d\omega, dM_0) \\ \dot{du} &= (\dot{dn}, \dot{de}, \dot{d\Omega}, \dot{di}, \dot{d\omega}, \dot{dM_0}) \end{aligned} \right\} \quad (110.39)$$

и уравнение (110.35) примет вид

$$\begin{pmatrix} d\delta \\ \cos d\alpha \\ \frac{dR}{R} \end{pmatrix} = (\tilde{Q}, D) \cdot \begin{pmatrix} \bar{du} \\ \dot{du} \end{pmatrix}, \quad (110.40)$$

где матрица  $D$  равна

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial u} & \frac{\partial \delta}{\partial e} & \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} & \frac{\partial \delta}{\partial i} & \frac{\partial \delta}{\partial \omega} & \frac{\partial \delta}{\partial \dot{M}_0} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial e} & \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} & \frac{\partial \alpha}{\partial i} & \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} & \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{M}_0} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial e} & \frac{\partial R}{\partial \Omega} & \frac{\partial R}{\partial i} & \frac{\partial R}{\partial \omega} & \frac{\partial R}{\partial \dot{M}_0} \end{pmatrix} \cdot (T - T_0). \quad (110.41)$$

В итоге получим

$$\begin{pmatrix} d\delta' \\ \cos \delta' d\alpha' \\ \frac{dr'}{r'} \end{pmatrix} = Q \cdot (\tilde{Q}, D) \cdot \begin{pmatrix} \bar{du} \\ \dot{du} \end{pmatrix} - Q dR_M. \quad (110.42)$$

Если учитывать не только вековые, но и периодические изменения элементов орбиты, возникающие из-за несферичности гравитационного поля и изменения плотности атмосферы с высотой, то орбиту следует записывать как

$$u + \delta u = \bar{u}_0 + \bar{du} + \dot{du} (T - T_0) + \dots, \quad (110.43)$$

где  $\delta u$  — короткопериодические изменения орбиты.

Приведем выражения для короткопериодических изменений четырех элементов, которые были получены Козаи:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \frac{1}{4} J \left( \frac{R}{p} \right)^2 \sin i \left\{ \cos 2(\vartheta + \omega) + e \cos(\vartheta + 2\omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} e \cos(3\vartheta + 2\omega) \right\} \\ \delta\Omega &= -J \left( \frac{R}{p} \right)^2 \cos i \left\{ (\vartheta - M) + e \sin \vartheta - \frac{1}{2} \sin 2(\vartheta + \omega) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e \sin(\vartheta + 2\omega) - \frac{1}{6} e \sin(3\vartheta + 2\omega) \right\} \\ \delta R &= \frac{1}{3} J \left( \frac{R}{p} \right)^2 p \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ -1 - \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \cos \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \right] + J \left( \frac{R}{p} \right)^2 p \sin^2 i \left[ \frac{1}{6} \cos^2(\vartheta + \omega) \right] \\ \delta u &= J \left( \frac{R}{p} \right)^2 \left\{ \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (\vartheta - M + e \sin \vartheta) + \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{2}{3} e \left( 1 - \frac{e^2}{2} - \sqrt{1 - e^2} \right) \sin \vartheta + \frac{1}{6} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \sin 2\vartheta \right] - \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \sin^2 i \right) e \sin(\vartheta + 2\omega) - \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \sin^2 i \right) \sin 2(\vartheta + \omega) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} (1 - \sin^2 i) e \sin(3\vartheta + 2\omega) \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (110.44)$$

где

$$\mu = 1 - J \left( \frac{R}{p} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{1 - e^2}. \quad (110.45)$$

Из сказанного следует, что применение орбитального метода требует достаточно сложных вычислений. Кроме того, орбитальный метод менее точен, чем метод синхронных наблюдений, из-за неточности знания параметров, определяющих движение ИСЗ, или законов изменения этих параметров во времени (гравитационное поле Земли, плотность атмосферы и т. д.). Короче говоря, основным препятствием для широкого применения орбитального метода для геодезических целей является трудность высокоточного прогнозирования орбиты на большие отрезки времени  $T - T_0$ . В то же время применение этого метода очень заманчиво, так как он не требует синхронных (или квазисинхронных) наблюдений.

### § 111. Использование наблюдений ИСЗ для определения параметров, характеризующих гравитационное поле Земли

Если считать Землю симметричной относительно оси вращения, то разложение  $V$  земного потенциала по сферическим функциям можно записать в следующем виде:

$$V = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + C_{20} \left( \frac{R}{r} \right)^2 P_{20} + C_{40} \left( \frac{R}{r} \right)^4 R_{40} + \dots \right\}. \quad (111.1)$$

Если при этом ограничиться определением только  $C_{20}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{40}$ , то, как показано И. Д. Жонголовичем, формулы для возмущений узла и перигея за один драконический период будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \delta\Omega &= \rho_2 J + \rho_3 C_{30} + \rho_4 D + \rho_{22} J^2 \\ \delta\omega &= q_2 J + q_3 C_{30} + q_4 D + q_{22} J^2 \end{aligned} \right\}, \quad (111.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J &= -\frac{3}{2} C_{20} \\ D &= \frac{35}{8} C_{40} \end{aligned} \right\} \quad (111.3)$$

и

$$\rho_2 = -\frac{2\pi a_0^2 \cos i}{a^2 (1-e^2)^2},$$

$$\rho_3 = \frac{2\pi a_0^2 \cos i}{a^2 (1-e^2)^3} \left[ \frac{45}{8} \sin^2 i - \frac{3}{2} \right] \frac{e \sin \omega}{\sin i},$$

$$\rho_4 = \frac{2\pi a_0^2 \cos i}{a^4 (1-e^2)^4} \left[ \left( \frac{3}{2} \sin^2 i - \frac{6}{7} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} e \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{3}{2} \sin^2 i - \frac{9}{14} \right) e^2 \cos 2\omega \right]$$

$$\rho_{22} = -\frac{2\pi a_0^2 \cos i}{a^4 (1-e^2)^4} \left[ \left( \frac{10}{3} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{20}{3} \sin^2 i - \frac{8}{3} \right) e \cos \omega + \right. \\ \left. + \left( \frac{5}{24} \sin^2 i + \frac{1}{6} \right) e^2 - \left( \frac{5}{4} \sin^2 i - \frac{7}{2} \right) e^2 \cos 2\omega \right]$$

$$q_2 = \frac{2\pi a_0^2}{a^2 (1-e^2)^2} \left[ 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right]$$

$$q_3 = \frac{2\pi a_0^3}{a^3 (1-e^2)^3} \left[ \left( -\frac{3}{2} \sin^2 i + \frac{15}{8} \sin^4 i \right) + \left( \frac{3}{2} - \frac{105}{8} \sin^2 i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{105}{8} \sin^4 i \right) e^2 \right] \frac{\sin \omega}{e \sin i}$$

$$q_4 = \frac{2\pi a_0^4}{a^4 (1-e^2)^4} \left[ \frac{12}{7} - \frac{93}{14} \sin^2 i + \frac{21}{4} \sin^4 i \right] + \quad (111.4) \\ + \left( \frac{9}{14} \sin^2 i - \frac{3}{4} \sin^4 i \right) \cos 2\omega + \left( \frac{27}{14} - \frac{27}{4} \sin^2 i + \frac{81}{16} \sin^4 i \right) e^2 + \\ + \left( -\frac{9}{14} + \frac{15}{4} \sin^2 i - \frac{27}{8} \sin^4 i \right) e^2 \cos 2\omega \right]$$

$$q_{22} = \frac{2\pi a_0^4}{a^4 (1-e^2)^4} \left[ \left( -2 + \frac{23}{6} \sin^2 i - \frac{5}{3} \sin^4 i \right) e^{-1} \cos \omega + \right. \\ + \left( \frac{95}{12} \sin^2 i - \frac{445}{48} \sin^4 i \right) + \left( -2 + \frac{23}{12} \sin^2 i + \frac{5}{8} \sin^4 i \right) \cos 2\omega + \\ + \left( -\frac{25}{6} + \frac{461}{24} \sin^2 i - \frac{50}{3} \sin^4 i \right) e \cos \omega + \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \sin^2 i \right) \times \\ \times e \cos 3\omega + \left( \frac{7}{12} - \frac{3}{8} \sin^2 i - \frac{15}{32} \sin^4 i \right) e^2 + \left( \frac{7}{12} - \frac{79}{24} \sin^2 i + \right. \\ \left. + \frac{45}{16} \sin^4 i \right) e^2 \cos 2\omega \left. \right]$$

Величины  $\delta\Omega$  и  $\delta\omega$  в выражениях для коэффициентов  $p$  и  $q$  заданы для момента прохождения спутником восходящего узла. Значение большой полуоси  $a$  определяется из уравнений

$$a = \sqrt{\frac{fM}{3n^2}} T^{2/3};$$

$$\left. \begin{aligned} T_{\Omega} &= T_{\pi} - JT \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \left[ 3 - \frac{5}{2} \sin^2 i - e \cos \omega (1 - 5 \sin^2 i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{2} e^2 \left( 1 - \frac{10}{17} \sin^2 i \right) + \frac{9}{2} e^2 \cos 2\omega \left( 1 - \frac{5}{6} \sin^2 i \right) \right] \\ T_{\pi} &= T_{\Omega} + \frac{JT}{1-e^2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \left( 1 - 2e \cos \omega + \frac{3}{2} e^2 \cos 2\omega \right) \end{aligned} \right\}, \quad (111.5)$$

которые решаются методом последовательных приближений. Здесь  $T_{\Omega}$  и  $T_{\pi}$  — соответственно наблюдаемые значения драконического и аномалистического периода. Величины  $\delta\Omega$  и  $\delta\omega$  вычисляются по результатам наблюдений  $a$ ,  $\delta$  и  $r$ . Значения  $\Omega$  и  $\omega$  в узле и перигее определяют интерполяцией (по Лагранжу или по способу наименьших квадратов) по равномерно расположенным во времени значениям  $\Omega$  и  $\omega$ , которые определены по результатам наблюдений.

Далее по формулам (111.4) можно определить коэффициенты  $p_2, p_3, p_4, p_{22}$  и  $q_2, q_3, q_4, q_{22}$  по средним значениям  $a, e, \omega, i$ . Из решения уравнений типа (111.2) определяют неизвестные  $J, C_{30}$  и  $D$  и по ним три первых параметра гравитационного потенциала Земли  $C_{20}, C_{30}, C_{40}$ . Сжатие Земли может быть определено через  $J, \omega, a, f, M$  как

$$\alpha = J + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} J^2 - \frac{1}{7} Jn - \frac{11}{56} n^2 + \left( \frac{1}{2} J^3 + \frac{3}{49} J^3 n + \frac{39}{392} Jn^2 + \frac{9}{196} n^3 \right), \quad (111.6)$$

где

$$n = \frac{\omega^2 a^3}{fM}. \quad (111.7)$$

Практически в формуле (111.6) во всех членах, кроме первого, можно вместо  $J$  подставить его приближенное значение 0,001625. Положив также

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.09} \cdot 729\,212 \cdot 10^{-10} \text{ рад/с}^2,$$

$$fM = 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2,$$

получим

$$\alpha = J + 1728,88 \cdot 10^{-6} = 0,003354 \approx \frac{1}{298,5}.$$

Для эллипсоида Красовского  $\alpha = \frac{1}{298,3}$ .

Определение высших гармоник в разложении потенциала по сферическим функциям — задача достаточно сложная, и изложение ее выходит за рамки данной главы

## § 112. Связь различных геодезических систем с помощью ИСЗ

Геодезическая прямоугольная система координат  $\bar{R}$  связана с геодезическими координатами  $B, L, H_r$  уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H_r) \cdot \cos B \cdot \cos L \\ Y &= (N + H_r) \cdot \cos B \cdot \sin L \\ Z &= [N(1 - e^2) + H_r] \cdot \sin B \end{aligned} \right\}. \quad (112.1)$$

Система координат  $\bar{R}$  задается координатами  $B^\circ, L^\circ$  и  $H_r^\circ$  начального пункта и параметрами расчетного эллипсоида. Параллельность между геоцентрической системой (общий земной эллипсоид) и геодезической (референц-эллипсоид) обеспечивается не только применением астрономических координат  $\varphi, \lambda$  и азимута  $\alpha$ , но также и внесением поправки за уклонение отвеса в астрономические координаты при условии, что астрономический азимут тоже исправлен за уравнение Лапласа. Пусть  $\varphi, \lambda$  и  $H_a$  будут координаты исходной точки геодезической системы, полученные астрономическими методами и нивелированием, и  $\xi, \eta, \zeta$  — абсолютные уклонения отвеса. Тогда

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi - \xi \\ L &= \lambda - \eta \cdot \operatorname{cosec} \varphi \\ A &= \alpha - (\lambda - L) \cdot \sin \varphi \\ H_r &= H_a - \zeta \end{aligned} \right\}. \quad (112.2)$$

Погрешности в  $\varphi, \lambda$  и  $H$  практически не влияют на непараллельность геодезической системы относительно геоцентрической. Ошибка же в азимуте  $dA$ , измеренном из начального пункта системы, выразится в повороте системы координат вокруг вертикали на величину  $dA$ . Так как ось, вокруг которой поворачивается система координат, не исходит из начальной точки, то одновременно будет иметь место и перенос. Матрица поворота может быть получена как произведение пяти матриц поворота:

$$\begin{aligned} M_A &= \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos dA & \sin dA & 0 \\ -\sin dA & \cos dA & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (112.3)$$

Ошибки в  $\xi$  и  $\eta$  приведут еще к двум вращениям геодезической системы координат относительно геоцентрической, причем матрицы поворота будут равны  $M_\xi$  и  $M_\eta$ , если считать положительным направлением запад для  $d\xi$  и север для  $d\eta$ :

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d\xi \cos \lambda_0 \\ 0 & 1 & -d\xi \sin \lambda_0 \\ d\xi \cdot \cos \lambda_0 & d\xi \cdot \sin \lambda_0 & 1 \end{pmatrix} \\ M_\eta &= \begin{pmatrix} 0 & -d\eta \cdot \cos \varphi_0 & -d\eta \cdot \sin \varphi_0 \cdot \sin \lambda_0 \\ d\eta \cdot \cos \varphi_0 & 1 & d\eta \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 \\ d\eta \cdot \sin \varphi_0 & -d\eta \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \lambda_0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (112.4)$$

Общий поворот от совместного влияния  $dA$ ,  $d\xi$ ,  $d\eta$  будет

$$M_{A\xi\eta} = M_A \cdot M_\xi \cdot M_\eta. \quad (112.5)$$

Выполнив все перемножения и учитывая лишь члены 1-го порядка малости, получим

$$M_{A\xi\eta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (112.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{21} &= -dA \cdot \sin \varphi + d\eta \cdot \cos \varphi \\ a_{31} &= dA \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda + d\xi \cdot \cos \lambda + d\eta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ a_{12} &= dA \cdot \sin \varphi - d\eta \cdot \cos \varphi \\ a_{33} &= 1 \\ a_{32} &= -dA \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda + d\xi \cdot \sin \lambda - d\eta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ a_{13} &= -dA \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda - d\xi \cdot \cos \lambda - d\eta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ a_{23} &= dA \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda - d\xi \cdot \sin \lambda + d\eta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ a_{33} &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (112.7)$$

Обозначив через  $\bar{C} = (C_1, C_2, C_3)$  координаты центра масс Земли в геодезической системе координат  $\bar{R}' = (X', Y', Z')$  и через  $\bar{R} = (X, Y, Z)$  — геоцентрические координаты, получим

$$\bar{R}' = M_{A\xi\eta} \cdot (\bar{R} + \bar{C}) = \bar{R} + \bar{C} + (M - E) \cdot (\bar{R} + \bar{C}). \quad (112.8)$$

Произведя умножение  $M - E$  на  $\bar{R} + \bar{C}$  и сгруппировав подобные члены относительно  $dA$ ,  $d\xi$ ,  $d\eta$ , получим

$$\left. \begin{aligned} X' &= X + C_1 + [\sin \varphi \cdot (Y + C_2) - \cos \varphi \cdot \sin \lambda \cdot (Z + C_3)] dA - \\ &\quad - \cos \lambda \cdot (Z + C_3) \cdot d\xi - [\cos \varphi \cdot (Y + C_2) + \sin \varphi \cdot \sin \lambda \cdot (Z + C_3)] \cdot d\eta \\ Y' &= Y + C_2 + [-\sin \varphi \cdot (X + C_1) + \cos \varphi \cdot \cos \lambda \cdot (Z + C_3)] dA - \\ &\quad - [\sin \lambda \cdot (Z + C_3)] \cdot d\xi + [\cos \varphi \cdot (X + C_1) + \sin \varphi \cdot \cos \lambda \cdot (Z + C_3)] \cdot d\eta \\ Z' &= Z + C_3 + [\cos \varphi \cdot \sin \lambda \cdot (X + C_1) - \cos \varphi \cdot \cos \lambda \cdot (Y + C_2)] dA + \\ &\quad + [\cos \lambda \cdot (X + C_1) + \sin \lambda \cdot (Y + C_2)] \cdot d\xi + [\sin \varphi \cdot \sin \lambda \cdot (X + C_1) - \\ &\quad - \sin \varphi \cdot \cos \lambda \cdot (Y + C_2)] d\eta \end{aligned} \right\}. \quad (112.9)$$

или

$$\bar{R}' = \bar{R} + \bar{C} + G \begin{pmatrix} dA \\ d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}. \quad (112.10)$$

Если имеются не связанные между собой триангуляции (для каждой свой расчетный эллипсоид и своя начальная точка), с которых синхронно наблюдались положения ИСЗ, то при различии геодезических координат ИСЗ, полу-

ченных в разных системах (пока не учитываются ошибки измерений), геоцентрические координаты в разных системах должны быть одинаковы, т. е.

$$\bar{R}'_1 + \bar{C}_1 + G_1 \begin{pmatrix} dA_1 \\ d\xi_1 \\ d\eta_1 \end{pmatrix} = \bar{R}'_2 + \bar{C}_2 + G_2 \begin{pmatrix} dA_2 \\ d\xi_2 \\ d\eta_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\bar{R}'_2 - \bar{R}'_1 = \Delta \bar{c} + G_1 \begin{pmatrix} dA_1 \\ d\xi_1 \\ d\eta_1 \end{pmatrix} - G_2 \begin{pmatrix} dA_2 \\ d\xi_2 \\ d\eta_2 \end{pmatrix}. \quad (112.11)$$

Имея определение двух положений ИСЗ, можно отыскать вектор  $\Delta c$  и  $dA_1, d\xi_1, d\eta_1$ , если на  $dA, d\xi, d\eta$  наложить какое-нибудь условие, например

$$dA_2 = d\xi_2 = d\eta_2 = 0 \quad (112.12)$$

или

$$dA_1 = dA_2, \quad d\xi_1 = d\xi_2, \quad d\eta_1 = d\eta_2. \quad (112.13)$$

Если имеется больше двух одновременных наблюдений ИСЗ, то параметры  $\Delta c_1, \Delta c_2, \Delta c_3, dA_1, d\xi_1, d\eta_1$  получают по способу наименьших квадратов.

Знание этих параметров и дает возможность связать между собой различные триангуляции. Совместная обработка наблюдений ИСЗ с ряда различных триангуляций дает возможность получить довольно хорошее приближение к общему эллипсоиду своеобразным осреднением референц-эллипсоидов различных триангуляций.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация 433  
Абсолютное определение силы тяжести 228, 229  
Аддитивент 78  
Азимут астрономический 11, 286  
— геодезический 286  
Азимутальное условное уравнение 397  
Альмукантарат 402  
Аномалия истинная 469  
— средняя 471  
— эксцентрическая 470  
Аномалия силы тяжести 267, 268  
— — в свободном воздухе 270  
Астрономическое нивелирование 337  
Астрономический пункт 457  
Астрономо-геодезическая сеть 394, 395  
Астрономо-гравиметрическое нивелирование 323, 343  
Астрономические системы координат: горизонтная 401  
— — — первая экваториальная 402  
— — — вторая экваториальная 403

Большая полуось 15

Вековые возмущения 475  
Вектор кинетического момента 467  
Вектор Лапласа 468  
Венинг-Мейнеса формулы 283  
Волны геоида 347  
Время атомное 417  
— всемирное 415, 417  
— декретное 416  
— звездное 412  
— поясное 415  
— солнечное 414  
— экваториальное 414  
— эфемеридное 412  
Высота динамическая 333  
— нормальная 329  
— ортометрическая 328  
— геоида над эллипсоидом 322, 346

Гал 225  
Геодезические координаты (широта, долгота) 17  
Геодезическая линия 48  
Геоид 8  
Главные радиусы кривизны 27  
Гравиметр 228, 230  
Гравиметрия 6, 11  
Гравитационный параметр 464  
Гравиметрическая съемка 7, 11  
Градусные измерения по меридиану 209, 365—366  
— — по параллели 209, 365—366

Движения звезд собственные 409, 410  
Дирекционный угол 166, 167

Дифференциальные уравнения геодезической линии 53—55

Дифференциальные формулы первого рода 150

— — второго рода 159

Длина дуги меридиана 35

— — параллели 41

— — нормального сечения 61

Длина маятника математического 229

— — физического 229

Длина хорды 63

Долгота 17

Закон всемирного тяготения 212

Звено триангуляции 366

Земля: внутреннее строение 221—223

— вращение 411

— объем (размеры эллипсоида Красовского) 220

— площадь (размеры эллипсоида Красовского) 221

— средняя плотность 220

— масса 220

Изостазия 315

Изостатическая компенсация 315

Изостатическая поправка 319

Интеграл энергии 466

Исходные геодезические даты 392, 393

Квазигеоид 9, 11, 345

Километровая сетка (линия) 199

Клеро теорема 256

Комформное изображение эллипсоида на плоскости 164—169

— — — на шаре 111

Координаты Гаусса — Крюгера 20, 162

— прямоугольные пространственные 16

— сфероидические 19

Космическая геодезия 11, 460

Коэффициент аэродинамического сопротивления 465

Лапласа азимут 304, 305

Лапласа вектор 468

Лежандра теорема решения треугольников 68—74

Линия узлов 469

Личное уравнение астронома 455, 456

Малая полуось 15

Масштаб изображения 114, 179

Маятник 228—229

Меридиан 35

Меридианный эллипс 18

Метод дуг 365

— площадей 376

— проектирования 383

— развертывания 371, 376

Миллигал 226

Молоденского М. С. теория изучения фигуры Земли 219

Наклонение орбиты 469

Невозмущенное движение 465, 466

Нивелирование астрономическое 337—340

Нивелирование астрономо-гравиметрическое 3—40, 343

— геометрическое 323

Нормальное сечение эллипсоида 27

— — прямое 46

— — обратное 47

Нутация 410

Обратная геодезическая задача 82  
 Общий земной эллипсоид 9  
 Орбита возмущенная 475  
 Орбита оскулирующая 475  
 Орбитальный метод 463, 488  
 Ориентирование земного эллипсоида 10, 392  
 Ортометрическая поправка 328  
 Осевой меридиан 164  
 Отвесная линия 11  
 Отступление геоида, квазигеоида от эллипсоида 10, 346

Параллель 41  
 Первый вертикал 34  
 Перекрытие зон 193  
 Переход из зоны в зону 193—198  
 Площадь трапеции 42  
 Погрешности геодезических измерений 7  
 Поправка в азимут за высоту наблюдаемой точки 354, 355  
 Поправка в зенитное расстояние за параллакс 431  
 — — — рефракцию 432  
 — — — радиус Солнца 432  
 Поправка в направление за кривизну изображения геодезической линии на плоскости 167, 182—186  
 Потенциал притяжения Земли 230  
 — силы тяжести 251  
 — центробежной силы 251  
 Практическая астрономия 400  
 Пратта гипотеза 316  
 Прецессия 409  
 Прямая геодезическая задача 81  
 Прямое нормальное сечение 46, 47  
 Прямоугольные плоские координаты Гаусса-Крюгера 20, 162  
 Прямоугольные сфероидические координаты 19  
 Пулковская обсерватория 458, 459

Радиус кривизны меридианного сечения 27  
 — — первого вертикала 27, 29  
 — — произвольного нормального сечения 33, 34  
 — — средний 32  
 — параллели 41  
 Рамки планшетоу 45  
 Расхождение взаимных нормальных сечений 48  
 Редукция на плоскость направлений 182—186, 167  
 — — расстояний 167  
 Референц-эллипсоид 10, 391  
 Решение сферических треугольников 68  
 — сфероидических треугольников 72, 73

Сближение меридианов 166  
 Световое давление 465  
 Сжатие полярное эллипсоида 15  
 Сжатие экватора 347  
 Сила тяжести 225—230  
 Силовая функция Земли 464  
 Синхронный метод 462, 482  
 Слагающие уклонения отвесной линии 280  
 Соприкасающаяся плоскость 48  
 Стокса теорема 265  
 Сферическая астрономия 408  
 Сферический избыток треугольника 70, 71  
 — треугольник 68  
 Сферические функции 235, 464  
 Сфероидическая геодезия 11

Таблицы Ларина 188  
Трансверсальная скорость 476

Угол между взаимными нормальными сечениями 63  
Угол между геодезической линией и прямым нормальным сечением 52  
Уклонение отвесной линии: абсолютное 279  
— — — астрономо-геодезическое 279  
— — — гравиметрическое 292  
— — — местное 371, 375  
— — — относительное 279  
Уравнение астрономо-геодезической сети 396—398  
Уравнение геоида 252, 253  
Уравнение Лапласа 248  
Уровенная поверхность 8, 240, 253  
Ускорение силы тяжести 225—226

Фигура геоида 8, 9  
Физическая геодезия 11, 208  
Физическая поверхность Земли 9, 208, 209  
Футшток 321  
Формулы решения главной геодезической задачи:  
— — — — Бесселя 122  
— — — — Гаусса 111  
— — — — по способу вспомогательной точки 91  
— — — — Молоденского 143  
Формулы нормального распределения силы тяжести 261, 262

Центробежная сила 251

Часы 428

Широта астрономическая 18  
— геодезическая 17  
— геоцентрическая 19  
— нормальная 113  
— приведенная 24

Эксцентриситет эллипсоида:  
— первый 15  
— второй 15  
Эллипсоид Красовского 14, 391  
Эллиптичность земного экватора 347  
Эфемериды 435

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии. М., «Недра», 1973, 222 с.
2. Багратуни Г. В. Курс сфероидической геодезии. М., Геодезиздат, 1962, 252 с.
3. Багратуни Г. В. Решение обратной геодезической задачи на большие расстояния. М., Геодезиздат, 1950, с. 36—40. («Труды Московского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», вып. 9).
4. Багратуни Г. В. Новый метод вывода формул для преобразования геодезических координат в прямоугольные и обратно. М., Геодезиздат, 1953, с. 3—9. («Труды Московского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», вып. 15).
5. Бессель Ф. В. Избранные геодезические сочинения. Под редакцией Г. В. Багратуни. М., Геодезиздат, 1961, 232 с.
6. Беррот А. и Хоффманн В. Космическая геодезия. М., Изд-во иностранной литературы, 1963, 410 с.
7. Белова Н. А. Курс сферической астрономии. М., «Недра», 1971, 181 с.
8. Беспалов Н. А. О применении численного анализа в сфероидической геодезии. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1968, вып. 2, с. 3—14.
9. Беспалов Н. А. О применении цепных дробей в сфероидической геодезии. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1966, вып. 3, с. 21—29.
10. Беспалов Н. А. Романовский В. А., Хитров Б. Ф. Вычислительный лабораторный практикум по сфероидической геодезии. М., МИИГАиК, 1969, 65 с.
11. Бонч-Бруевич М. Д. Геодезия. Справочное руководство. Т. 1. М., Изд-во Министерства коммунального хозяйства, 1949, 422 с.
12. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимберев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961, 256 с.
13. Бойко Е. Г., Кленицкий Б. М., Ландис И. М., Устинов Г. А. Построение, уравнивание и оценка точности космических геодезических сетей. М., «Недра», 1972, 206 с.
14. Буткевич А. В. О решении треугольников с измеренными сторонами на сфероиде и редуцировании измеренных сторон. Новосибирск, 1957, с. 89—100. («Труды Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», вып. 8).
15. Буткевич А. В. Решение обратной геодезической задачи на значительные расстояния. М., Геодезиздат, 1960, с. 39—48. («Труды Новосибирского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии», вып. 13).
16. Вейс Г. Геодезическое использование искусственных спутников. М., «Недра», 1967, 114 с.
17. Витковский В. В. Практическая геодезия. СПб, 1911 г., 896 с.
18. Витман А. И. Решение геодезических задач на большие расстояния. Сборник научно-технических статей ГУГК, вып. 12. М., Геодезиздат, 1954, 97 с.
19. Ганьшин В. Н. Сравнение длин нормального сечения и геодезической линии. — Изв. вузов. 1958, вып. 2, с. 33—43.
20. Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 2. Под редакцией Г. В. Багратуни. М., Геодезиздат, 1958, 246 с.

21. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Изд-во физико-математической литературы, 1963, 446 с.
22. Еремеев В. Ф. Теория ортометрических, динамических и нормальных высот. М., Геодезиздат, 1951, с. 11—25. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 86).
23. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Динамические высоты и их применение. Сборник статей по геодезии ГУГК, вып. 10. М., Геодезиздат, 1955, с. 23—39.
24. Еремеев В. Ф. Формулы и таблицы для вычисления геодезических координат по методу Молоденского. М., Геодезиздат, 1957, с. 77—105. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 121).
25. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. М., «Недра», 1964, 499 с.
26. Зданович В. Г., Белолоиков А. И., Гусев Н. А., Звонарев К. А. Высшая геодезия. М., «Недра», 1970, 511 с.
27. Изотов А. А. Определение размеров Земли для геодезических работ СССР. Сборник статей ГУГК, вып. 20. М., Геодезиздат, 1948, с. 3—46.
28. Изотов А. А. Форма и размеры Земли по современным данным. М., Геодезиздат, 1950, 204 с. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 73).
29. Изотов А. А. Новые исходные геодезические данные. Сборник статей ГУГК, вып. 17. М., Геодезиздат, 1948, с. 22—35.
30. Келль Н. Г. Высшая геодезия. Ч. 1. Л., Госстройиздат, 1932, 492 с.
31. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. Ч. 2. М., Геодезиздат, 1942, 560 с.
32. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения. Т. 1—4. М., Геодезиздат, 1953—1956, 361 с.
33. Кузнецов А. Н. Геодезическая астрономия. М., «Недра», 1966, 370 с.
34. Магницкий В. А. Основы физики Земли. М., Геодезиздат, 1953, 290 с.
35. Магницкий В. А. Внутреннее строение Земли. — «Знание», серия 12, № 7, 1961, 40 с.
36. Макаров Н. П. Курс геодезической гравиметрии. М., ВИА, 1959, 357 с.
37. Мигаль Н. К. Об определении аномалий силы тяжести по астрономо-геодезическим уклонениям отвеса. Доклады АН СССР. Т. 21, № 5, 1938, 357 с.
38. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. М., Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939, 432 с.
39. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. М., Геодезиздат, 1945, 106 с. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 42).
40. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1960, 251 с. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 131).
41. Молоденский М. С. Методы совместной обработки гравиметрических и геодезических материалов для изучения гравитационного поля Земли и ее фигуры. М., Геодезиздат, 1951, с. 3—11. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 86).
42. Молоденский М. С. Современные задачи изучения фигуры Земли. — «Геодезия и картография», 1958, № 7, с. 3—5.
43. Молоденский М. С. Проблемы и задачи геодезической гравиметрии. — «Геодезия и картография», 1959, № 6, с. 50—55.
44. Морозов Н. П. Курс сфероидической геодезии. М., «Недра», 1969, 304 с.
45. Морозов В. П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. М., ВИА, 1958, 109 с.

46. Пеллинен Л. П. К вопросу о приведении базисов триангуляции к эллипсоиду относимости. М., Геодезиздат, 1953, с. 103—104. («Труды Центр. науч.-исслед. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии», вып. 94).

47. Полевой В. А. Основы математической обработки результатов радиогеодезических измерений. М., «Недра», 1971, 342 с.

48. Рабинович В. Н. Практикум по высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1961, 300 с.

49. Руководство по вычислению азимута и длины геодезической линии на поверхности эллипсоида Красовского. М., РИО ВТС, 1960, 179 с.

50. Сажина Н. Б., Грушинский Н. П. Гравитационная разведка. М., «Недра», 1966, 454 с.

51. Слудский Ф. А. Избранные геодезические труды. М., «Недра», 1967, 237 с.

52. Судаков С. Г. О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР. Сборник статей ГУГК, вып. 17. М., Геодезиздат, 1948, с. 5—21.

53. Судаков С. Г. Общие принципы построения государственных геодезических сетей. — «Геодезия и картография», 1958, № 9, с. 3—12.

54. Тищенко А. П. Геометрические методы космической геодезии. М., «Наука», 1972, 107 с.

55. Урмаев Н. А. Сфероидическая геодезия. М., ВТС, 1955, 168 с.

56. Хитров Б. Ф. О численном решении прямой геодезической задачи по методу Рунге — Кутты — Мерсона. — «Геодезия и картография», 1973, № 9, с. 10—13.

57. Хитров Б. Ф. О применении различных кривых для решения геодезических задач на эллипсоиде. — Изв. вузов, 1973, вып. 3, с. 27—35.

58. Хитров Б. Ф., Беспалов Н. А. Сборник таблиц натуральных значений некоторых основных геодезических величин и коэффициентов на эллипсоиде Красовского. М., МИИГАиК, 1969, 72 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Предисловие . . . . .	3
Введение. Задачи высшей геодезии. Основные понятия и определения . . . . .	6

### I. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

#### Г л а в а I

##### Основные формулы и соотношения на поверхности земного эллипсоида

§	1. Задачи и определение сфероидической геодезии . . . . .	13
§	2. Основные параметры земного эллипсоида и соотношения между ними . . . . .	14
§	3. Системы координат, употребляемые в высшей геодезии . . . . .	16
§	4. Связь между некоторыми системами координат . . . . .	21
§	5. Главные радиусы кривизны в данной точке эллипсоида . . . . .	27
§	6. Средний радиус кривизны . . . . .	32
§	7. Вычисление длины дуги меридиана . . . . .	35
§	8. Вычисление длины дуги параллели . . . . .	41
§	9. Вычисление площадей съемочных трапеций . . . . .	42
§	10. Расчет рамок съемочных трапеций . . . . .	44

#### Г л а в а II

##### Кривые на эллипсоиде вращения

§	11. Взаимные нормальные сечения . . . . .	46
§	12. Геодезическая линия . . . . .	48
§	13. Упрощенный вывод основного уравнения геодезической линии . . . . .	53
§	14. Аналитический вывод основного уравнения геодезической линии на поверхности вращения . . . . .	55
§	15. Расхождение взаимных нормальных сечений . . . . .	57
§	16. Длина дуги нормального сечения . . . . .	61
§	17. Углы между взаимными нормальными сечениями и геодезической линией . . . . .	63
§	18. Положение геодезической линии относительно взаимных нормальных сечений . . . . .	66

#### Г л а в а III

##### Решение малых сферических и сфероидических треугольников

§	19. Общие сведения . . . . .	68
§	20. Решение сферических треугольников по теореме Лежандра . . . . .	68
§	21. Решение треугольников по способу аддитаментов . . . . .	78

#### Г л а в а IV

##### Вычисление геодезических широт, долгот и азимутов

§	22. Общие сведения . . . . .	81
§	23. Общие соображения о решении прямой и обратной геодезических задач . . . . .	82



§ 24. О точности вычисления геодезических координат — широт, долгот и азимутов	87
§ 25. Формулы для решения прямой геодезической задачи по способу вспомогательной точки, вывод формул по Красовскому	91
§ 26. Решение геодезической задачи по формулам со средними аргументами. Вывод формул путем разложения в ряд разностей широт, долгот и азимутов	101
§ 27. Решение обратной геодезической задачи по формулам со средними аргументами	108
§ 28. Теория Гаусса конформного изображения эллипсоида на сфере. Применение ее к решению главной геодезической задачи	111
§ 29. Решение главной геодезической задачи по способу Бесселя	122
§ 30. Решение главной геодезической задачи при помощи нормальных сечений	136
§ 31. Решение прямой геодезической задачи по методу Рунге — Кутты — Мерсона	141
§ 32. Решение прямой и обратной задач методом хорд эллипсоида. Формулы Молоденского	143

## Глава V

### Дифференциальные формулы

§ 33. Дифференциальные формулы первого рода	150
§ 34. Дифференциальные формулы второго рода	159

## Глава VI

### Плоские прямоугольные координаты Гаусса — Крюгера

§ 35. Общие сведения	162
§ 36. Основные сведения о конформной проекции Гаусса — Крюгера эллипсоида на плоскости	164
§ 37. Основные формулы	169
§ 38. Формулы для определения конформных плоских координат $x$ и $y$ по геодезическим координатам $B$ и $L$	173
§ 39. Формулы для вычисления геодезических координат по координатам Гаусса — Крюгера	175
§ 40. Формулы для вычисления сближения меридианов на плоскости	177
§ 41. Формулы для вычисления масштаба изображения	179
§ 42. Формулы для перехода от расстояний на эллипсоиде к расстояниям на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера	180
§ 43. Формулы для вычисления поправок в направлении за кривизну изображения геодезической линии на плоскости	182
§ 44. Формулы и таблицы для вычисления плоских прямоугольных координат Гаусса — Крюгера	186
§ 45. Преобразование координат Гаусса — Крюгера из одной зоны в другую	192
§ 46. Нанесение километровых линий на планшеты топографической съемки. Вставка географической сетки в прямоугольную	199
§ 47. Понятие о некоторых других проекциях в системах плоских координат	200
§ 48. Общее заключение по применению координат Гаусса — Крюгера в геодезических работах СССР	205

## II. ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

### Глава VII

#### Общие сведения

§ 49. Предмет физической геодезии	208
§ 50. Краткий очерк развития знаний о фигуре Земли и методах ее изучения	209
§ 51. Некоторые сведения о строении Земли	220

## Глава VIII

### Основы теории потенциала силы тяжести

§ 52. Некоторые сведения о силе тяжести. Понятие о методах измерения силы тяжести	225
§ 53. Потенциал силы притяжения	230
§ 54. Разложение потенциала земного притяжения в ряд	234
§ 55. Основные свойства потенциала притяжения	239
§ 56. Потенциал притяжения некоторых простейших тел	242
§ 57. Уравнения Лапласа и Пуассона	248
§ 58. Потенциал силы тяжести, его основные свойства	251
§ 59. Теорема Клеро	256

## Глава IX

### Определение внешнего потенциала силы тяжести Земли

§ 60. Нормальный и возмущающий потенциалы	264
§ 61. Аномалии силы тяжести	268
§ 62. Возмущающий потенциал	273

## Глава X

### Уклонения отвесных линий

§ 63. Общие сведения	279
§ 64. Гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий	282
§ 65. Астрономо-геодезический метод вывода уклонений отвесных линий	284
§ 66. Астрономо-гравиметрический метод вывода уклонений отвесных линий	290
§ 67. Влияние уклонений отвесных линий на астрономические азимуты — уравнение Лапласа	303
§ 68. Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые зенитные расстояния	306
§ 69. Об учете влияния уклонений отвесных линий при топографических и инженерно-геодезических работах	307
§ 70. Топографические и топографо-изостатические уклонения отвесной линии	310

## Глава XI

### Высоты

§ 71. Общие сведения	321
§ 72. Системы счета высот	324
§ 73. Астрономическое и астрономо-гравиметрическое нивелирование	337

## Глава XII

### Редукционная проблема

§ 74. Общие сведения	349
§ 75. Редукция базиса на поверхность референц-эллипсоида	352
§ 76. Поправка в измеренные горизонтальные направления за высоту наблюдаемых пунктов	354
§ 77. Редукция измеренных горизонтальных направлений при переходе к поверхности референц-эллипсоида	355
§ 78. Редукции, вызываемые кривизной силовой линии	356
§ 79. О редукциях силы тяжести	357
§ 80. Редукционная задача при линейных измерениях свето- и радиогеодезическими приборами	358
	509

## Г л а в а XIII

### Градусные измерения

§ 81. Общие сведения . . . . .	361
§ 82. Градусные измерения по меридиану и параллели; метод дуг . . . . .	365
§ 83. Уравнения градусных измерений при применении метода развертывания; метод площадей . . . . .	376
§ 84. Метод установления исходных геодезических дат . . . . .	379
§ 85. Уравнения градусных измерений при применении метода проектирования . . . . .	383
§ 86. Общие сведения о выводе параметров земного эллипсоида из астрономо-геодезических и гравиметрических данных . . . . .	389
§ 87. Основные формулы определения параметров эллипсоида по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным . . . . .	390
§ 88. Референц-эллипсоид Красовского. Исходные геодезические даты триангуляции СССР . . . . .	391

## Г л а в а XIV

### Уравнивание астрономо-геодезической сети

§ 89. Общие сведения . . . . .	394
§ 90. Понятие о методах уравнивания астрономо-геодезической сети СССР . . . . .	396

## III. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

## Г л а в а XV

### Элементы сферической астрономии

§ 91. Общие сведения . . . . .	399
§ 92. Системы координат, употребляемые в астрономии . . . . .	400
§ 93. Связь между различными системами координат . . . . .	404
§ 94. Изменения координат, происходящие от суточного движения . . . . .	406
§ 95. Прохождение светил через некоторые основные круги небесной сферы . . . . .	407
§ 96. Понятие о прецессии, нутации, собственных движениях звезд и их влиянии на координаты светил . . . . .	409
§ 97. Измерение времени . . . . .	410
§ 98. Сопоставление различных единиц измерения и систем счета времени . . . . .	418
§ 99. Интерполирование с часовыми изменениями. Примеры на интерполирование и переход от одной системы счета времени к другой . . . . .	421

## Г л а в а XVI

### Определение астрономических координат

§ 100. Общие сведения об астрономических методах определения широт и долгот пунктов и азимутов направлений . . . . .	428
§ 101. Определение времени и широты при помощи измерений зенитных расстояний светил . . . . .	437
§ 102. Определение времени и широты по наблюдениям пар звезд на соответствующих высотах. Понятие о некоторых других способах астрономических определений широты и времени . . . . .	443
§ 103. Азимутальные определения . . . . .	448
§ 104. Определение долготы пункта . . . . .	453
§ 105. Сведения о постановке астрономических работ в СССР и применяемых методах . . . . .	456
§ 106. Пулковская обсерватория . . . . .	458

## IV. ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

### Глава XVII

§ 107. Общие сведения. Основные понятия о решении геодезических задач из наблюдений ИСЗ . . . . .	460
§ 108. Основы теории движения искусственного спутника Земли . . . . .	464
§ 109. Обработка фотографических наблюдений ИСЗ . . . . .	480
§ 110. Синхронный и орбитальный методы . . . . .	482
§ 111. Использование наблюдений ИСЗ для определения параметров, характеризующих гравитационное поле Земли . . . . .	494
§ 112. Связь различных геодезических систем с помощью ИСЗ . . . . .	497
Предметный указатель . . . . .	500
Список литературы . . . . .	504

ПЕТР СЕРГЕЕВИЧ ЗАКАТОВ

**КУРС ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ**

Издание четвертое, переработанное  
и дополненное

Редактор Н. П. Грушинский

Редактор издательства Н. Т. Куприна

Переплет художника А. Я. Гладышева

Художественный редактор В. В. Евдокимов

Технический редактор Е. С. Сычева

Корректор Р. Т. Баканова

---

Сдано в набор 12/VIII 1975 г.

Подписано в печать 12/II 1976 г.

Т-00183. Формат 70 × 100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 32,0.

Усл. печ. л. 41,6. Уч.-изд. л. 35,26. Бумага № 1.

Заказ 460/2412—15. Тираж 20 000 экз. Цена 1 р. 58 к.

---

Издательство «Недра»,

Москва, К-12, Третьяковский проезд, д. 1/19.

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома

Государственного комитета Совета Министров СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

196006, Ленинград, Московский пр., 91.